

1 Vlastnosti množin, Posloupnosti

Rozcvička

- Vyšetřete omezenost množiny $\{3 - n | n \in \mathcal{N}\}$ [shora]
- Vyšetřete omezenost množiny $\{2(1 - x) + 5 | x \in [0, 1]\}$ [omezená]
- Vyšetřete omezenost množiny $\{x^2 + 5x - 6 | x \in [-1, +\infty)\}$ [zdola]
- Vyšetřete omezenost množiny $\left\{ \frac{1}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} \mid n \in \mathcal{N} \right\}$ [zdola]

Zkouškové příklady

1.1 Vlastnosti množin

1. Dokažte $\inf \left\{ \frac{2n^2 + n + 11}{n^2 + 5} \mid n \in \mathcal{N} \right\} = 2$
2. Dokažte $\sup \left\{ \frac{2n^2 + n + 11}{n^2 + 5} \mid n \in \mathcal{N} \right\} = \frac{7}{3}$
3. Dokažte $\inf \left\{ \frac{(-1)^n(n^2 + 1)}{n^2 - 4n + 5} \mid n \in \mathcal{N} \right\} = -5$
4. Dokažte $\sup \left\{ \frac{(-1)^n(n^2 + 1)}{n^2 - 4n + 5} \mid n \in \mathcal{N} \right\} = 5$
5. Dokažte $\sup \left\{ \frac{1 + (-1)^n}{2} + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \mid n \in \mathcal{N} \right\} = 1$
6. Dokažte $\inf \left\{ \frac{1 + (-1)^n}{2} + (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \mid n \in \mathcal{N} \right\} = 0$
7. Dokažte $\inf \left\{ \frac{3x + 1 - 2x^2}{x^2 + 5x} \mid x > 0 \right\} = -2$
8. Dokažte $\sup \left\{ \frac{3x + 1 - 2x^2}{x^2 + 5x} \mid x > 0 \right\} = +\infty$
9. Dokažte $\inf \{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \mid n \in \mathcal{N}\} = 0$
10. Dokažte, že $\sup \left\{ \frac{2x + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + x} : x > 0 \right\} = 2$

1.2 Omezenost a monotonie posloupností

11. Vyšetřete monotonii a omezenost posloupnosti $a_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$ [omezená zdola 0, shora 3/2, není monotonní]
12. Vyšetřete monotonii a omezenost posloupnosti $a_n = \frac{n^2}{n+1}$ [omezená zdola 1/2, neomezená shora, rostoucí]

13. Vyšetřete monotonii a omezenost posloupnosti $a_n = \frac{4n}{\sqrt{4n^2 + 1}}$ [shora 2, zdola $4/5\sqrt{5}$, rostoucí]
14. Vyšetřete monotonii a omezenost posloupnosti $a_n = \frac{4^n}{2^n + 100}$ [zdola $2/51$, shora neomezená, rostoucí]
15. Vyšetřete monotonii a omezenost posloupnosti $a_n = \frac{10^{10}\sqrt{n}}{n+1}$ [zdola 0, shora $1/2 \cdot 10^{10}$, klesající]
16. Vyšetřete monotonii a omezenost posloupnosti $a_n = \ln \frac{2n}{n+1}$ [zdola 0, shora $\ln 2$, rostoucí]
17. Vyšetřete monotonii a omezenost posloupnosti $a_n = \frac{(n+1)^2}{n^2}$ [shora 4, zdola 1, klesající]
18. Vyšetřete monotonii a omezenost posloupnosti $a_n = \sqrt{4 - \frac{1}{n}}$ [zdola $\sqrt{3}$, shora 2, rostoucí]
19. Vyšetřete monotonii a omezenost posloupnosti $a_n = (-1)^{2n+1} \sqrt{n}$ [shora -1, není zdola, klesající]
20. Vyšetřete monotonii a omezenost posloupnosti $a_n = \frac{2^n - 1}{2^n}$ [zdola $1/2$, shora 1, rostoucí]
21. Vyšetřete monotonii a omezenost posloupnosti $a_n = \sin \left(\frac{\pi}{n+1} \right)$ [zdola 0, shora 1, klesající]
22. Vyšetřete monotonii a omezenost posloupnosti $a_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ [zdola 0, shora $1/2$, klesající]
23. Vyšetřete monotonii a omezenost posloupnosti $a_n = \frac{\ln(n+2)}{n+2}$ [zdola 0, shora $1/3 \ln 3$, klesající]
24. Vyšetřete monotonii a omezenost posloupnosti $a_n = \frac{3^n}{(n+1)^2}$ [zdola $3/4$, shora není, rostoucí]

1.3 Limity posloupností

25. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{4^n + 1}$ [0]
26. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^n \sqrt{n}$ [neex]
27. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)^n$ [0]
28. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{tg} \frac{n\pi}{4n+1}$ [1]
29. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n+1)^2}{(3n-1)^2}$ [$\frac{4}{9}$]
30. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{\sqrt{2n^4 + 1}}$ [$\frac{1}{2}\sqrt{2}$]
31. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \pi n$ [neex]

32. $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{1/\sqrt{n}}$ [1]

33. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n) - \ln(n+1)$ [0]

34. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{2\sqrt{n}}$ [$\frac{1}{2}$]

35. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$ [e^2]

36. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n^2}$ $[+\infty]$

37. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1) \cos \sqrt{n}}{n(1 + \sqrt{n})}$ [0]

38. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} \sin e^n \pi}{n+1}$ [0]

39. $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \ln 3n - \ln(n^2 + 1)$ $[\ln 9]$

40. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^n$ [0]

41. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1}$ [0]

42. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x^{100n}}{n!}$ [0]

43. $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{\alpha/n}$ $[1, \alpha > 0]$

44. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+1}}{4^{n-1}}$ [0]

45. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+2)^{1/(n+2)}$ [1]

46. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+2)^{1/n}$ [1]

47. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n e^{-x} dx$ [1]

48. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-n}^n \frac{dx}{1+x^2}$ $[\pi]$

49. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n^2}{n}$ [0]

50. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1+1/n}^{1-1/n} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

51. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5^{n+1}}{4^{2n} - 1}$ [0]

52. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n$ [$\frac{1}{e}$]

53. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_n^{n+1} e^{-x^2} dx$ [0]

54. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n}{2^{n^2}}$ [0]

55. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{x}{2n} \right)^{2n}$ [e^x]

56. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-1/n}^{1/n} \sin x^2 dx$ [0]

57. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(t + \frac{x}{n} \right)^n, x > 0, t > 0$

58. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ [0]

59. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + n} - n$ [$\frac{1}{2}$]

60. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n^3 + n} - n$

61. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$ [$\frac{1}{2}$]

62. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{2n^4 + n - 1}$ [$\frac{1}{8}$]

63. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{(1+n)(2+n)}$ [$+\infty$]

64. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos(n\pi) \sin(n\pi)$ [0]

65. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{1+n} \right)^{1/n}$ [1]

66. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{\pi}{n} \sin \frac{\pi}{n}$ [0]

67. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n} \right)^n$ [$+\infty$]

68. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n(n+1))}{n}$ [0]

69. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right)^n$

$$70. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{n} \ln \frac{n}{\pi} \quad [0]$$

$$71. \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}} \quad []$$

$$72. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n-1}{n^2} \quad [\frac{1}{2}]$$

$$73. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2n+1} - \sqrt{n} \quad [+ \infty]$$

$$74. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad [0]$$

$$75. \lim_{n \rightarrow +\infty} 3\sqrt{n^2+1} - 2n \quad [+ \infty]$$

$$76. \lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt{n^2+1} - n) \quad [\frac{1}{2}]$$

$$77. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1} \quad [0]$$

$$78. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{3n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1} \quad [+ \infty]$$

$$79. \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{3n^2+n+1} - \sqrt{3n^2-n+1} \quad [\frac{1}{\sqrt{3}}]$$

$$80. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \cdots + \sqrt{n}}{(\sqrt{n})^3} \quad [\frac{2}{3}]$$

$$81. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{2n} + \cdots + \frac{1}{n^2} \quad [0]$$

$$82. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^3} \quad [\frac{1}{3}]$$

$$83. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \cdots + n^2}{n^2} - \frac{n}{3} \quad [\frac{1}{2}]$$

$$84. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \quad [e]$$

$$85. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n+4}{3n+5}\right)^n \quad [\frac{1}{\sqrt[3]{e}}]$$

$$86. \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2n+5}{2n+3}\right)^{n+1} \quad [e]$$

$$87. \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \sqrt{n+1} - \sqrt{n})^{\sqrt{n}} \quad [\sqrt{e}]$$

$$88. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(n^2+3n-2)}{\ln(n^5+n+1)} \quad [\frac{2}{5}]$$

$$89. \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(2+e^{3n})}{\ln(3+e^{2n})} \quad [\frac{3}{2}]$$

90. Spočtěte $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-3n+5}(n+1)^{3n-5}$ [e³]
91. Spočtěte $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{n} \sin(e^n \pi)}{n+1}$
92. Spočtěte $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sin \frac{1}{n}$ [1]
93. Spočtěte $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^{-3n}(n+1)^{3n-5}$ [0]
94. Spočtěte $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + \sqrt{n+1} - \sqrt{n})^{\sqrt{n}}$ [\sqrt{e}]
95. Spočtěte $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\ln \left(\frac{3 + (-1)^{2n}}{3} + n \right) - \ln \left(\frac{6 + (-1)^{2n+1}}{3} + n \right) \right)$
96. Spočtěte $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$ [e]
97. Spočtěte $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n+4}{3n+5} \right)^n$ [$e^{-1/3}$]
98. Spočtěte $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{1+n} \right)^{\frac{1}{n}}$ [1]
99. Spočtěte $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-2)^n + (3)^n}{(-2)^{n+1} + (3)^{n+1}}$
100. Spočtěte $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}$ [$\frac{1}{4}$]
101. Spočtěte $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n-5)^{-3n+5}(3n+5)^{3n-5}$ [e¹⁰]