

1 Kuželosečky, polární souřadnice a parametrické křivky

Zkouškové příklady

1.1 Kuželosečky

1. Napište rovnici paraboly, když znáte $V = (0, 0), F = (2, 0)$. $[y^2 = 8x]$
2. Napište rovnici paraboly, když znáte $V = (-1, 3), F = (-1, 0)$. $[(x + 1)^2 = -12(y - 3)]$
3. Napište rovnici paraboly, když znáte $F = (1, 1), d : y = -1$. $[4y = (x - 1)^2]$
4. Napište rovnici paraboly, když znáte $F = (1, 1), d : x = 2$. $[(y - 1)^2 = -2(x - 3/2)]$
5. Popište a načrtněte parabolu $y^2 = 2x$. $[V = (0, 0), F = (1/2, 0), d : x = -1/2]$
6. Popište a načrtněte parabolu $2y = 4x^2 - 1$. $[V = (0, -1/2), F = (0, -3/8), d : y = -5/8]$
7. Popište a načrtněte parabolu $(x + 2)^2 = 12 - 8y$. $[V = (-2, 3/2), F = (-2, -1/2), d : y = 7/2]$
8. Popište a načrtněte parabolu $x = y^2 + y + 1$. $[V = (3/4, -1/2), F = (1, -1/2), d : x = 1/2]$
9. Nalezněte rovnice všech parabol, které prochází bodem $(5, 6)$, mají řídící přímku $y = 1$ a osu $x = 2$. $[2y = x^2 - 4x + 7; 18y = x^2 - 4x + 103]$
10. Nalezněte rovnici paraboly, která má horizontální osu, vrchol $V = (-1, 1)$ a prochází bodem $(-6, 13)$.
11. Napište rovnici elipsy, když znáte (a je hlavní poloosa): $F_1 = (-1, 0), F_2 = (1, 0), a = 3$.
 $[\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1]$
12. Napište rovnici elipsy, když znáte (a je hlavní poloosa): $F_1 = (1, 3), F_2 = (1, 9), a = 5$.
 $[\frac{(x - 1)^2}{16} + \frac{(y - 6)^2}{25} = 1]$
13. Napište rovnici elipsy, když znáte (a je hlavní poloosa): $S = (1, 3), F_1 = (1, 1), a = 5$.
 $[\frac{(x - 1)^2}{21} + \frac{(y - 3)^2}{25} = 1]$
14. Napište rovnici elipsy, když znáte (a je hlavní poloosa): $a = 5, V_1 = (3, 2), V_2 = (3, -4)$.
 $[\frac{(x - 3)^2}{25} + \frac{(y + 1)^2}{9} = 1]$
15. Popište a načrtněte elipsu $3x^2 + 2y^2 = 12$. $[S = (0, 0), F = (0, \pm\sqrt{2}), a = \sqrt{6}, b = 2]$
16. Popište a načrtněte elipsu $4x^2 + 9y^2 - 18y = 27$. $[S = (0, 1), F = (\pm\sqrt{5}, 1), a = 3, b = 2]$
17. Popište a načrtněte elipsu $4(x - 1)^2 + y^2 = 64$. $[S = (1, 0), F = (1, \pm 4\sqrt{3}), a = 8, b = 4]$
18. Nalezněte rovnice hyperboly, když znáte $F_1 = (0, -13), F_2 = (0, 13), a = 5$.
 $[\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1]$
19. Nalezněte rovnice hyperboly, když znáte $F_1 = (-5, 1), F_2 = (5, 1), a = 3$.
 $[\frac{x^2}{9} - \frac{(y - 1)^2}{16} = 1]$

20. Nalezněte rovnice hyperboly, když znáte $F_1 = (-1, -1), F_2 = (-1, 1), a = 1/4$.
- $$[16y^2 - \frac{16}{15}(x+1)^2 = 1]$$
21. Popište a načrtněte hyperbolu $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$.
- $$[S = (0, 0), a = 3, V = (\pm 3, 0), F = (\pm 5, 0), y = \pm \frac{4}{3}x]$$
22. Popište a načrtněte hyperbolu $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-3)^2}{16} = 1$.
- $$[S = (1, 3), a = 3, V_1 = (4, 3), V_2 = (-2, 3), F_1 = (6, 3), F_2 = (-4, 3), y = \pm \frac{4}{3}(x-1) + 3]$$
23. Popište a načrtněte hyperbolu $4x^2 - 8x - y^2 + 6y - 1 = 0$.
- $$[S = (1, 3), a = 2, V_1 = (1, 5), V_2 = (1, 1), F_{1,2} = (1, 3 \pm \sqrt{5}), y = 2x + 1, y = -2x + 5]$$
24. Popište a načrtněte kuželosečku $x^2 - 4y^2 - 10x + 41 = 0$.
- $$[S = (5, 0), a = 2, V = (5, \pm 2), F = (5, \pm 2\sqrt{5}), y = \pm \frac{1}{2}(x-5)]$$
25. Popište a načrtněte kuželosečku $x^2 + 3y^2 + 6x + 8 = 0$.
26. Popište a načrtněte kuželosečku $y^2 + 4y + 2x + 1 = 0$.
- $$[V = (\frac{3}{2}, -2), F = (1, -2), d : x = 2]$$
27. Popište a načrtněte kuželosečku $9x^2 + 25y^2 + 100y + 99 = 0$.
- $$[S = (0, -2), F = (\pm \frac{4}{15}, -2), a = \frac{1}{3}, b = \frac{1}{5}]$$
28. Popište a načrtněte kuželosečku $7x^2 - 5y^2 + 14x - 40y = 118$.
29. Popište a načrtněte kuželosečku $(x^2 - 4y)(4x^2 + 9y^2 - 36) = 0$.

1.2 Polární souřadnice

30. Převed'te z polárních do kartézských souřadnic $\left[3, \frac{1}{2}\pi\right]_p$.
- $$[[0, 3]_k]$$
31. Převed'te z polárních do kartézských souřadnic $[-1, -\pi]_p$.
- $$[[1, 0]_k]$$
32. Převed'te z polárních do kartézských souřadnic $\left[-3, -\frac{1}{3}\pi\right]_p$.
- $$[\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\sqrt{3}\right]_k]$$
33. Převed'te z polárních do kartézských souřadnic $\left[3, -\frac{1}{2}\pi\right]_p$.
- $$[[0, -3]_k]$$
34. Napište všechna vyjádření v polárních souřadnicích bodu $[0, 1]_k$.
- $$[[1, \frac{1}{2}\pi + 2k\pi]_p = [-1, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi]_p]$$
35. Napište všechna vyjádření v polárních souřadnicích bodu $[-3, 0]_k$.
- $$[[3, \pi + 2k\pi]_p = [-3, 2k\pi]_p]$$
36. Napište všechna vyjádření v polárních souřadnicích bodu $[2, -2]_k$.
- $$[\left[2\sqrt{2}, \frac{7}{4}\pi + 2k\pi\right]_p = \left[-2\sqrt{2}, \frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right]_p]$$
37. Napište všechna vyjádření v polárních souřadnicích bodu $[4\sqrt{3}, 4]_k$.
- $$[[8, \frac{\pi}{6} + 2k\pi]_p = [-8, \frac{7}{6}\pi + 2k\pi]_p]$$

38. Prověrte symetrii křivky $r = 2 + \cos \varphi$. [dle osy x]
39. Prověrte symetrii křivky $r(\sin \varphi + \cos \varphi) = 1$. [není symetrická]
40. Prověrte symetrii křivky $r^2 \sin 2\varphi = 1$. [dle počátku (obou os)]
41. Prověrte v polárních souřadnicích symetrii křivky $x^2(y^2 - 1) = \frac{1}{4}$. [dle počátku a obou os]
42. Spočtěte plochu v křivce $r = a \cos \varphi; \varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. [$\frac{1}{4}\pi a^2$]
43. Spočtěte plochu v křivce $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}; \varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. [$\frac{1}{2}a^2$]
44. Spočtěte plochu v křivce $r^2 = a^2 \sin^2 \varphi$. [$\frac{1}{2}\pi a^2$]
45. Spočtěte plochu mezi křivkami $r = 2 \cos \varphi, r = \cos \varphi; \varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$. [$\frac{3}{16}\pi + \frac{3}{8}$]
46. Spočtěte plochu mezi křivkami $r = a \left(4 \cos \varphi - \frac{1}{\cos \varphi} \right); \varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$. [$\frac{5}{2}a^2$]
47. Spočtěte plochu mezi křivkami $r = e^\varphi, r = e^{\frac{\varphi}{2}}; \varphi \in [0, \pi]$. [$\frac{1}{4}(e^{2\pi} + 1 - e^\pi)$]
48. Spočtěte plochu uvnitř $r = 4$ a napravo od křivky $r = \frac{2}{\cos \varphi}$. [$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \frac{1}{2}(16 - \frac{4}{\cos^2 \varphi}) d\varphi = \frac{16}{3}\pi - 4\sqrt{3}$]
49. Spočtěte plochu uvnitř $r = 4$ a mezi $\varphi = \frac{\pi}{2}$ a $r = \frac{2}{\cos \varphi}$.
50. Spočtěte plochu vně $r = 1 + \cos \varphi$ a uvnitř $r = 2 - \cos \varphi$. [2 $\pi + 3\sqrt{3}$]

1.3 Parametrické křivky

51. Nalezněte tečnu (tečny) ke křivce $x = 2t, y = \cos \pi t$ v bodě $t = 0$. [$y = 1$]
52. Nalezněte tečnu (tečny) ke křivce $x = t^2, y = (2-t)^2$ v bodě $t = \frac{1}{2}$. [$3x + y - 3 = 0$]
53. Nalezněte tečnu (tečny) ke křivce $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$ v bodě $t = \frac{\pi}{4}$. [$2x + 2y - \sqrt{2} = 0$]
54. Nalezněte tečnu (tečny) ke křivce $r = 4 - 2 \sin \varphi$ v bodě $\varphi = 0$. [$2x + y - 8 = 0$]
55. Nalezněte tečnu (tečny) ke křivce $r = \frac{4}{5 - \cos \varphi}$ v bodě $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. [$x - 5y + 4 = 0$]
56. Nalezněte tečnu (tečny) ke křivce $r = \frac{\sin \varphi - \cos \varphi}{\sin \varphi + \cos \varphi}$ v bodě $\varphi = 0$. [$x + 2y + 1 = 0$]
57. Nalezněte body, kde má křivka vertikální a horizontální tečny $x = 3t - t^3, y = t + 1$.
[vert. [2, 2], [-2, 0]]
58. Nalezněte body, kde má křivka vertikální a horizontální tečny $x = 3 - 4 \sin t, y = 4 + 3 \cos t$.
[horiz. [3, 7], [3, 1], vert. [-1, 4], [7, 4]]
59. Nalezněte body, kde má křivka vertikální a horizontální tečny $x = t^2 - 2t, y = t^3 - 3t^2 + 2t$.
[horiz. $[-\frac{2}{3}, \pm \frac{2}{9}\sqrt{3}]$, vert. [-1, 0]]

60. Nalezněte body, kde má křivka vertikální a horizontální tečny $x = \cos t, y = \sin 2t$.
[horiz. $[\pm \frac{1}{2}\sqrt{2}, \pm 1]$, vert. $[\pm 1, 0]$]
61. Spočtěte délku křivky $x = t^2, y = t^3; t \in [0, 1]$.
62. Spočtěte délku křivky $r = 2(1 + \cos \varphi)^{-1}; \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
[$\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})$]
63. Spočtěte délku křivky $r = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}; \varphi \in [0, \pi]$.
[$\frac{3}{2}\pi a$]
64. Spočtěte délku křivky $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t; t \in [0, \pi]$.
[$\sqrt{2}(e^\pi - 1)$]
65. Spočtěte délku křivky $r = e^{2\varphi}; \varphi \in [0, 2\pi]$.
[$\frac{1}{2}\sqrt{5}(e^{4\pi} - 1)$]
66. Spočtěte délku křivky $f(x) = \ln\left(\frac{1}{\cos x}\right); x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.
[$\ln(1 + \sqrt{2})$]
67. Spočtěte délku křivky $f(x) = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}); x \in [1, 2]$.
[$\frac{3}{2}$]
68. Spočtěte délku křivky $x = t - \sin t, y = 1 - \cos t; t \in [0, 2\pi]$.
[8]
69. Spočtěte délku křivky $x = \cos t + t \sin t, y = \sin t - t \cos t; t \in [0, 2\pi]$.
[$2\pi^2$]
70. Spočtěte povrch rotačního tělesa (dle x) $y^2 = 2px; x \in [0, 4p]$.
[$\frac{52}{3}\pi p^2$]
71. Spočtěte povrch rotačního tělesa (dle x) $6a^2xy = x^4 + 3a^4; x \in [a, 2a]$.
[$\frac{47}{16}\pi a^2$]
72. Spočtěte povrch rotačního tělesa (dle x) $x = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}, y = t; t \in [3, 8]$.
[$\frac{2152}{15}\pi$]
73. Spočtěte povrch rotačního tělesa (dle x) $r = e^\varphi; \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.
[[$\frac{2}{5}\sqrt{2}\pi(2e^\pi + 1)$]]
74. Spočtěte povrch rotačního tělesa (dle x) $4y = x^3; x \in [0, 1]$.
[$\frac{61}{432}\pi$]
75. Spočtěte povrch rotačního tělesa (dle x) $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t; t \in [0, \frac{\pi}{6}]$.
[$4\pi(2 - \sqrt{3})$]
76. Načrtněte a popište křivku $r = \frac{12}{2 + \sin \varphi}$.
77. Nalezněte body, ve kterých má křivka $x(t) = 3 - 4 \sin t, y(t) = 4 + 3 \sin t$ vertikální a horizontální tečny.
78. Určete plochu, která je společná křivkám $r = 2a\sqrt{3} \cos \varphi; \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
 a $r = 2a \sin \varphi; \varphi \in [0, \pi]$.
79. Načrtněte křivku $r = \frac{9}{5 - 4 \sin \varphi}$.
80. Načrtněte křivku $x(t) = 4t, y(t) = 3\sqrt{t^2 - 1}$.
81. Spočtěte délku křivky $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2}\ln y; y \in [1, e]$.
[$\frac{e^2 + 1}{4}$]
82. Spočtěte obsah plochy, která leží uvnitř křivky $r = 2 \cos \varphi$ a vně křivky $r = 1$.

83. Spočtěte povrch rotačního tělesa (dle osy x) $x(t) = 2 \cos t, y(t) = 2 \sin t; t \in [0, \frac{\pi}{6}]$.
[$4\pi(2 - \sqrt{3})$]
84. Nalezněte body, ve kterých má křivka $x(t) = 3 - 4 \cos t, y(t) = 4 + 3 \cos t$ vertikální a horizontální tečny.
85. Nalezněte body, ve kterých má křivka $x(t) = 3 + 4 \sin t, y(t) = 4 - 3 \cos t$ vertikální a horizontální tečny. Načrtněte křivku.