1 $\boxed{\text{Mocninné řady}}$

1.1 Konvergence

Definice 1.1 (Mocninná řada)

Buď $\{a_n\}$ posloupnost reálných čísel a $x_0 \in \mathbb{R}$. Řada $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ se nazývá mocninnou řadou se středem v bodě x_0.

Řekneme, že mocninná řada $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje na množině I, jestliže pro každé $z \in I$ je číselná řada $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-x_0)^n$ konvergentní. Množině I pak říkáme obor konvergence mocninné řady.

Věta 1.2

Jestliže $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje v bodě x_0+z, $z \neq 0$, pak konverguje absolutně pro každé $x \in (x_0-|z|, x_0+|z|)$, tj. $|x-x_0| < |z|$. Naopak, jestliže řada $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ diverguje v bodě x_0+y, pak pro každé $x \in (-\infty, x_0-|y|) \cup (x_0+|y|, +\infty)$, tj. $|x-x_0| > |y|$, řada $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ diverguje.

Věta 1.3 (O poloměru konvergence)

Pro každou mocninnou řadu $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ existuje právě jedno r, $0 \leq r \leq +\infty$ tak, že řada

1. Konverguje absolutně pro všechna x taková, že $|x-a| < r$
2. Diverguje pro všechna x taková, že $|x-a| > r$.

Definice 1.4 (Poloměr konvergence)

Symbol r z Věty 1.3 nazýváme poloměrem konvergence mocninné řady se středem v bodě a.

Věta 1.5 (Cauchy-Hadamard)

Poloměr konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ se spočítá vzorcem

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

resp. $r = 0$ pokud $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, resp. $r = +\infty$, pokud $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$

1.2 Derivování mocninných řad

Věta 1.6 (Derivace mocninné řady)

Jestliže $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ konverguje na $(a-r, a+r)$, pak

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$$

také konverguje na $(a-r, a+r)$.

1.3 Integrace mocninných řad

Věta 1.7 (Integrace mocninných řad)

Nechť $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-x_0)^n$ konverguje na $(x_0 - r, x_0 + r)$. Pak $g(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$ konverguje na $(a-r, a+r)$ a platí, že $\int f = g + C$, tj.

$$\int \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n \, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + C.$$

1.4 Vlastnosti mocninných řad a sčítání řad

Věta 1.8 (Abelova)

Nechť f je součtová funkce mocninné řady $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(x-a)^n$, která konverguje v bodě $a-r$, resp. $a+r$, kde r je její poloměr konvergence. Pokud je f spojitá v $a-r$ zprava, resp. $a+r$ zleva, pak mocninná řada v tomto bodě konverguje k $f(a-r)$, resp. $f(a+r)$.

Věta 1.9

V oboru konvergence je mocninná řada Taylorovou řadou své součtové funkce.