1 Aplikace integrálu

1.1 Výpočet plochy

Věta 1.1 (Výpočet plochy mezi funkcemi)
Nechť jsou f a g funkce spojité na intervalu $[a,b]$. Potom plocha A vymezená těmito funkcemi je

$$A = \int\limits_a^b |f(x) - g(x)| \, \mathrm{d}x.$$

Důsledek 1.2 (Plocha pod grafem funkce)
Nechť je funkce f spojitá a nezáporná na intervalu $[a,b]$. Pak plocha A_f vymezená grafem funkce f a osou x je

$$A_f = \int\limits_a^b f(x) \, \mathrm{d}x.$$

1.2 Výpočet polohy těžiště

Věta 1.3 (Poloha těžiště plochy pod grafem funkce)
Nechť funkce f je spojitá na $[a,b]$. Potom pro těžiště $T = [\bar{x}, \bar{y}]$ plochy pod grafem funkce f platí

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b x f(x) \mathrm{d}x}{\int_a^b f(x) \mathrm{d}x}, \qquad \bar{y} = \frac{1}{2} \frac{\int_a^b f^2(x) \mathrm{d}x}{\int_a^b f(x) \mathrm{d}x}.$$

Důkaz. Pro důkaz věty použijeme analogii postupu hledání těžiště n hmotných bodů z fyziky. Poloha těžiště z_T pro n hmotných bodů o hmotnostech m_k a polohách z_k (na ose z) je

$$z_T = \frac{\sum\limits_{k=1}^n m_k z_k}{\sum\limits_{k=1}^n m_k}.$$

Na chvíli předpokládejme, že uvažovaná plocha pod grafem funkce f má všude stejnou hustotu ϱ. Uvažujme rozdělení $\sigma = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ intervalu $[a,b]$.

Označme A_k jednotlivé dílčí plochy pod grafem funkce f mezi x_{k-1} a x_k. Dále označme polohu těžiště na ose x symbolem t_k. Snadno nahlédneme, že polohu těžiště A_k na ose y lze vyjádřit $y_k = \frac{1}{2} f(t_k)$. Hmotnost dílčí plochy A_k lze vyjádřit jako $m_k = \varrho f(t_k)(x_k - x_{k-1})$. Každou dílčí plochu A_k lze reprezentovat hmotným bodem o souřadnicích $[t_k, \frac{1}{2} f(t_k)]$ a hmotnosti m_k.

Podle vzorce pro polohu těžiště n hmotných bodů dostáváme pro jednotlivé souřadnice polohy těžiště $x_T(\sigma)$ a $y_T(\sigma)$ (při rozdělení σ) vyjádření

$$x_T(\sigma) = \frac{\sum\limits_{k=1}^n \varrho t_k f(t_k)(x_k - x_{k-1})}{\sum\limits_{k=1}^n \varrho f(t_k)(x_k - x_{k-1})}, \tag{1}$$

$$y_T(\sigma) = \frac{\sum\limits_{k=1}^n \varrho \frac{1}{2} f^2(t_k)(x_k - x_{k-1})}{\sum\limits_{k=1}^n \varrho f(t_k)(x_k - x_{k-1})}, \tag{2}$$

kde $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Hustota ϱ je konstantní, proto ji můžeme vykrátit z obou výrazů. Pro dokončení důkazu stačí v jednotlivých sumách odhadnout funkci $t \cdot f(t)$, resp. $f(t)$, resp. $\frac{1}{2} f^2(t)$ svými maximy a minimy na dílčích intervalech $[x_{k-1}, x_k]$, čímž obdržíme horní a dolní částečné součty. Protože jsme v celém odvození uvažovali libovolné rozdělení σ, dostáváme podle Riemannovy definice určitého integrálu **??** tvrzení věty. □

1.3 Délka grafu funkce

Věta 1.4 (Délka grafu funkce)
Nechť funkce f má spojitou první derivaci na intervalu $[a, b]$. Potom délka grafu funkce L_f je

$$L_f = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, \mathrm{d}x.$$

Důkaz. Nechť σ je rozdělení intervalu $[a, b]$. S využitím Pythagorovy věty můžeme délku grafu funkce aproximovat úsečkou délky d_k na každém dílčím intevalu $[x_{k-1}, x_k]$ takto:

$$d_k = \sqrt{(f(x_k) - f(x_{k-1}))^2 + (x_k - x_{k-1})^2} = (x_k - x_{k-1}) \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \right)^2}.$$

Na intervalu $[x_{k-1}, x_k]$ použijeme Lagrangeovu větu **??** o přírůstku funkce: $\exists c_k \in (x_{k-1}, x_k)$ tak, že

$$d_k = (x_k - x_{k-1}) \sqrt{1 + (f'(c_k))^2}.$$

Označíme-li

$$m_k = \min \left\{ \sqrt{1 + (f'(z))^2} : z \in [x_{k-1}, x_k] \right\},$$
$$M_k = \max \left\{ \sqrt{1 + (f'(z))^2} : z \in [x_{k-1}, x_k] \right\},$$

dostáváme nerovnost

$$(x_k - x_{k-1}) m_k \leq d_k \leq (x_k - x_{k-1}) M_k$$

pro všechna k. Sečteme-li tuto nerovnost přes všechna $k = 1, 2, \ldots, n$, máme

$$s_{\sqrt{1+(f')^2}}(\sigma) \leq L_f(\sigma) \leq S_{\sqrt{1+(f')^2}}(\sigma).$$

Odtud již plyne tvrzení věty. □

1.4 Objem a povrch rotačního tělesa

Věta 1.5 (Objem rotačního tělesa)
Nechť funkce f je nezáporná a má spojitou první derivaci na intervalu $[a, b]$. Potom objem rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu f okolo osy x je

$$V_f = \pi \int_a^b f^2(x) \, \mathrm{d}x.$$

Věta 1.6 (Povrch rotačního tělesa)
Nechť funkce f je nezáporná a má spojitou první derivaci na intervalu $[a, b]$. Potom povrch rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu f okolo osy x je

$$S_f = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \, \mathrm{d}x.$$