1 Transcendentní funkce

1.1 Algebraické a transcendentní funkce

Definice 1.1 (Algebraické číslo)
Algebraické číslo je číslo, které je kořenem polynomu s racionálními koeficienty.

Definice 1.2 (Transcendentní číslo)
Transcendentní číslo je číslo, které není algebraické.

Definice 1.3 (Algebraická funkce)
Algebraická funkce splňuje polynomiální rovnici s polynomiálními koeficienty.

Definice 1.4 (Transcendentní funkce)
Transcendentní funkce je funkce, která není algebraická.

1.2 Logaritmická funkce

Definice 1.5 (Logaritmická funkce)
Logaritmická funkce je nekonstantní diferencovatelná funkce f definovaná na $\mathbb{R}^+$, která pro všechny $x > 0$ a $y > 0$ splňuje

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

Věta 1.6 (Vlastnosti logaritmické funkce)
Buď f logaritmická funkce. Potom

1. $f(1) = 0$
2. $f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$
3. $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$
4. $f'(x) = \frac{1}{x}f'(1)$, kde $f'(1)$ odpovídá bázi logaritmu.

Důkaz.

1. $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$ odkud $f(1) = 0$.
2. $0 = f(1) = f(x \cdot \frac{1}{x}) = f(x) + f(\frac{1}{x})$ odkud $f(x) = -f(\frac{1}{x})$.
3. viz 2.
4. $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{h}\left(f(x+h) - f(x)\right) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{x}{x}\frac{1}{h} f\left(\frac{x+h}{x}\right) \overset{u=\frac{h}{x}}{=} \frac{1}{x} \lim\limits_{u \to 0} \frac{1}{u}(f(1+u) - \underbrace{f(1)}_{0}) = \frac{1}{x}f'(1)$

□

1.3 Přirozený logaritmus

Definice 1.7 (Přirozený logaritmus)
Funkce

$$\ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}, \tag{1}$$

pro $x > 0$ se nazývá **přirozený logaritmus**.

Věta 1.8
Funkce ln je logaritmická funkce.

Důkaz. Předpokládejme bez újmy na obecnosti, že $0 < x < y$.
Podle definice 1.5 musíme ukázat, že $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$:

$$\ln(xy) = \int_1^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_1^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_x^{xy} \frac{\mathrm{d}t}{t} \overset{u=\frac{t}{x}}{=} \int_1^{x} \frac{\mathrm{d}t}{t} + \int_1^{y} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln x + \ln y.$$

□

Věta 1.9 (Vlastnosti $\ln x$)
Funkce $\ln x$ definovaná vztahem (1) má následující vlastnosti:

1. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
2. ln je ostře rostoucí na $D_{\ln}$.
3. $\ln x^\alpha = \alpha \ln x$ pro $\alpha \in \mathbb{R}$.

Důkaz.

1. Derivací integrálu jakožto funkce horní meze v definici 1.7 dostáváme tvrzení věty, což zároveň odpovídá „přirozené" volbě $f'(1) = 1$ ve větě 1.6(4.).
2. Pro všechna $x \in D_{\ln} = \mathbb{R}^+$ je $\frac{1}{x} > 0$ a tudíž podle věty **??** ostře roste.
3. Pro $\alpha = 0$ tvrzení zjevně platí. Pro $\alpha \neq 0$ máme

$$\ln x^\alpha = \int_1^{x^\alpha} \frac{\mathrm{d}t}{t} \overset{t=u^\alpha}{=} \alpha \int_1^{x} \frac{u^{\alpha-1}}{u^\alpha} \mathrm{d}u = \alpha \ln x.$$

□

Definice 1.10 (Eulerovo číslo)
Eulerovo číslo e je jediné číslo, které splňuje $\ln \mathrm{e} = 1$.

1.4 Exponenciální funkce

Definice 1.11 (Exponenciální funkce)
Inverzní funkci k funkci ln nazýváme exponenciální funkcí při základu e a značíme e^x nebo $\exp(x)$.

Věta 1.12 (Vlastnosti exponenciální funkce)

1. $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$ pro $x \in \mathbb{R}$.
2. $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$ pro $x, y \in \mathbb{R}$.
3. $\mathrm{e}^{-x} = \frac{1}{\mathrm{e}^x}$ pro $x \in \mathbb{R}$.

Důkaz.

1. Podle věty **??** o derivaci inverzní funkce platí

$$(\mathrm{e}^x)' = \frac{1}{\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}\right)} = \mathrm{e}^x.$$

2. $\ln \mathrm{e}^{x+y} = (x + y) \ln \mathrm{e} = x + y = x \ln \mathrm{e} + y \ln \mathrm{e} = \ln \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$.
3. viz 2.

□

1.5 Obecná mocnina

Definice 1.13 (Obecná mocnina)
Pro $\beta > 0$ a $\alpha \in \mathbb{R}$ definujeme **obecnou mocninu** jako

$$\beta^\alpha = e^{\alpha \ln \beta},$$

kde β je báze (základ) a α exponent (mocnina).

Věta 1.14 (Vlastnosti obecné mocniny)
Nechť $x > 0$ a $a, b \in \mathbb{R}$. Pak

1. $x^{a+b} = x^a x^b$.
2. $x^{-a} = \frac{1}{x^a}$.
3. $(x^a)' = a x^{a-1}$.
4. $(a^x)' = (\ln a) \cdot a^x$.

Důkaz. Všechny body věty plynou z definice 1.13 a vlastností logaritmu. □

1.6 Obecná báze logaritmu

Definice 1.15 (Obecná báze logaritmu)
Pro $p > 0$, $p \neq 1$ definujeme **logaritmus při základu p** jako

$$\log_p x = \frac{\ln x}{\ln p},$$

kde p je báze (základ). Pro $p = 10$ definujeme dekadický logaritmus a značíme zkráceně symbolem log.

Věta 1.16 (Vlastnosti logaritmu)

1. $\log_p x$ je inverzní funkce k p^x.
2. $(\log_p x)' = \frac{1}{\ln p} \frac{1}{x}$.
3. $\log_p x$ je logaritmická funkce.

Důkaz.

1. Podle definice 1.15 je funkce $\log_p$ stejně jako ln prostá na $\mathbb{R}^+$. Stačí ověřit obě vlastnosti inverzní funkce $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$ a $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}$ (viz věta ??):

$$\log_p p^x = \frac{\ln p^x}{\ln p} = \frac{x \ln p}{\ln p} = x,$$

$$p^{\log_p x} = \mathrm{e}^{\log_p(x) \cdot \ln p} = \mathrm{e}^{\frac{\ln x}{\ln p} \ln p} = \mathrm{e}^{\ln x} = x$$

2. Tvrzení plyne přímou derivací definice 1.15 podle x.
3. Ověření vlastnosti logaritmické funkce (viz definice 1.5):

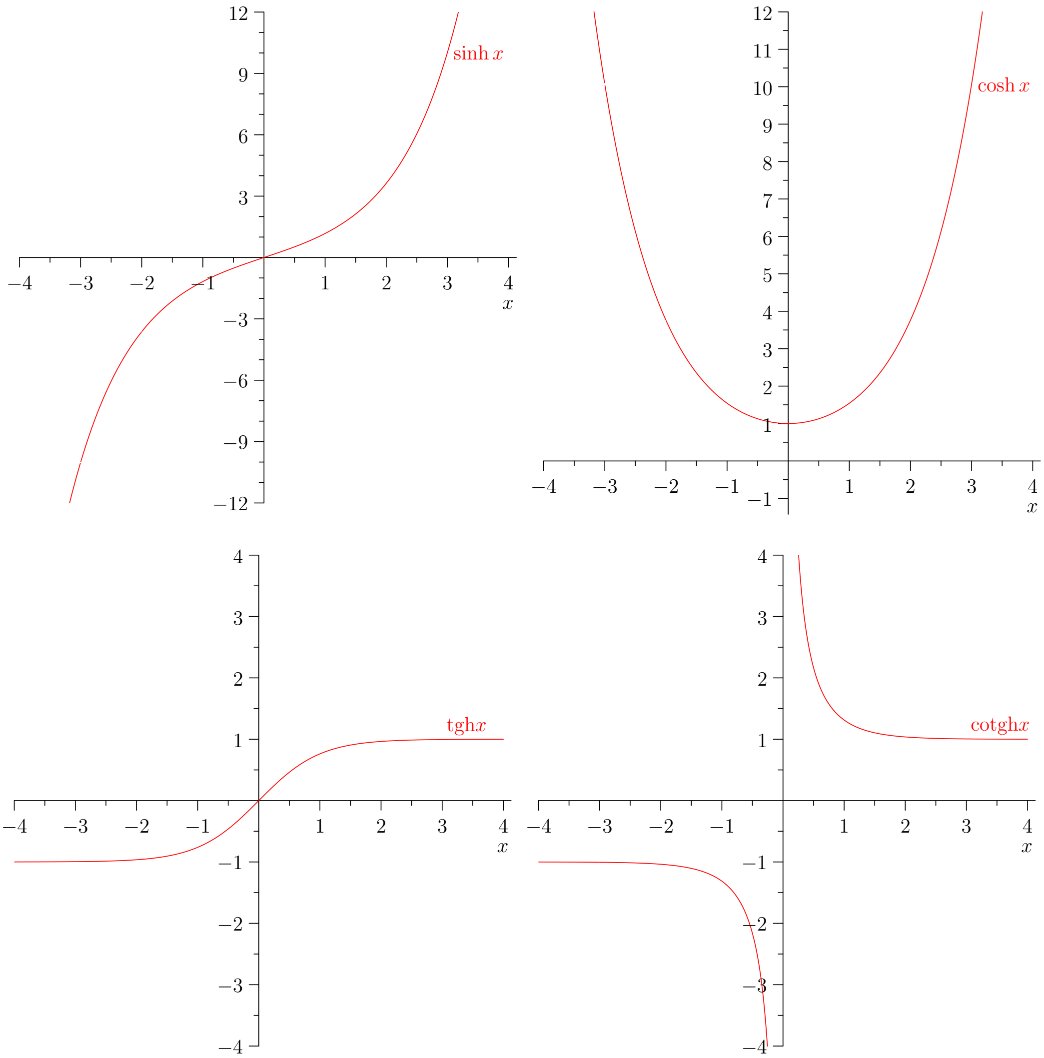
$$\log_p(x \cdot y) = \frac{\ln(x \cdot y)}{\ln p} = \frac{\ln x + \ln y}{\ln p} = \frac{\ln x}{\ln p} + \frac{\ln y}{\ln p} = \log_p x + \log_p y$$

□

1.7 Hyperbolické funkce

Definice 1.17 (Hyperbolické funkce)

$$\begin{aligned}
\sinh x &= \frac{e^x - e^{-x}}{2},\\
\cosh x &= \frac{e^x + e^{-x}}{2},\\
\operatorname{tgh} x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}},\\
\operatorname{cotgh} x &= \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}
\end{aligned}$$



Obrázek 1: Grafy hyperbolických funkcí.

Věta 1.18 (Vlastnosti hyperbolických funkcí sinh a cosh)

1. $\cosh x > \frac{1}{2}\mathrm{e}^x > \sinh x$
2. $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$
3. $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \sinh y \cosh x$

4. $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

Důkaz. Tvrzení se dokáží dosazením vzorců z definice 1.17. □

Věta 1.19 (Derivace hyperbolických funkcí)

$$(\sinh x)' = \cosh x, \tag{2}$$
$$(\cosh x)' = \sinh x, \tag{3}$$
$$(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}, \tag{4}$$
$$(\operatorname{cotgh} x)' = -\frac{1}{\sinh^2 x} \tag{5}$$

1.8 Inverzní hyperbolické funkce

Definice 1.20 (Inverzní hyperbolické funkce)

$\operatorname{argsinh} x = \sinh^{-1} x$	argument hyperbolického sinu,
$\operatorname{argcosh} x = \cosh^{-1} x$	argument hyperbolického cosinu,
$\operatorname{argtgh} x = \operatorname{tgh}^{-1} x,$	argument hyperbolické tangenty,
$\operatorname{argcotgh} x = \operatorname{cotgh}^{-1} x,$	argument hyperbolické kotangenty.

Věta 1.21 (Explicitní vyjádření inverzních hyperbolických funkcí)

$$\operatorname{argsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \qquad \text{pro} \quad x \in \mathbb{R} \tag{6}$$
$$\operatorname{argcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), \qquad \text{pro} \quad x \geq 1 \tag{7}$$
$$\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \qquad \text{pro} \quad x \in (-1, 1) \tag{8}$$
$$\operatorname{argcotgh} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} \qquad \text{pro} \quad x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty). \tag{9}$$

Důkaz. Pro jednotlivé funkce je potřeba odvodit inverzní funkci pomocí techniky explicitního vyjádření $x = f^{-1}(y)$ ze vztahu $y = f(x)$.

1. $y = \sinh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$, kde vynásobením rovnice e^x dostáváme kvadratickou rovnici pro neznámou „e^x“:
$$(\mathrm{e}^x)^2 - 2y\mathrm{e}^x - 1 = 0,$$
kterou řeší
$$\mathrm{e}^x = y \pm \sqrt{y^2+1}.$$
Z těchto řešení vyhovuje pouze $\mathrm{e}^x = y + \sqrt{y^2+1}$, protože $H_{\mathrm{e}^x} = \mathbb{R}^+$. Odtud již plyne tvrzení věty.

2. Funkce cosh není na $\mathbb{R}$ prostá a proto nejprve zúžíme definiční obor např. na $\mathbb{R}_0^+$ tak, abychom dostali prostou funkci. $y = \cosh x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$, kde vynásobením rovnice e^x dostáváme kvadratickou rovnici pro neznámou „e^x“:
$$(\mathrm{e}^x)^2 + 2y\mathrm{e}^x - 1 = 0,$$
kterou řeší
$$\mathrm{e}^x = y \pm \sqrt{y^2-1}.$$
Z těchto řešení vyhovuje pouze $\mathrm{e}^x = y + \sqrt{y^2-1}$, protože pro daný definiční obor funkce cosh $(x \geq 0)$ je funkce $\mathrm{e}^x \geq 1$. Odtud již plyne tvrzení věty.

3. $y = \operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$, kde vynásobením rovnice $e^x(e^x + e^{-x})$ dostáváme kvadratickou rovnici pro neznámou „e^x“:
$$(y-1)(e^x)^2 + y + 1 = 0,$$
kterou řeší
$$e^x = \pm\sqrt{\frac{1+y}{1-y}}.$$
Z těchto řešení vyhovuje pouze to kladné, neb $H_{e^x} = \mathbb{R}^+$. Odtud již plyne tvrzení věty.

4. Inverzní funkce k cotgh – viz 3.

□

Věta 1.22 (Derivace inverzních hyperbolických funkcí)

$$(\operatorname{argsinh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}, \tag{10}$$
$$(\operatorname{argcosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \tag{11}$$
$$(\operatorname{argtgh} x)' = (\operatorname{argcotgh} x)' = \frac{1}{1-x^2} \quad \textit{(pozor na různé definiční obory!)}. \tag{12}$$

Důkaz. Větu snadno dokážeme derivací explicitního vyjádření inverzních funkcí ve větě 1.21.

□

1.9 Pokročilé techniky integrace goniometrických funkcí

Poznámka. Dle lemma **??** lze snížit druhou mocninu funkcí sin a cos:
$$\cos^2(x) = \frac{1 + cos(2x)}{2},$$
$$\sin^2(x) = \frac{1 - cos(2x)}{2},$$
čehož je možné využít při integraci výrazů tvaru $\int \sin^m x \cos^n x \mathrm{d}x$, kde $m, n \in \mathbb{N}_0$:

1. Jsou-li m i n sudé:
Použijeme lemma **??** na $\int (\sin^2 x)^{\frac{m}{2}} (\cos^2 x)^{\frac{n}{2}} \mathrm{d}x$

2. Jsou-li (m sudé a n liché) nebo (m liché a n sudé):
Substituujeme funkci se sudou mocninou (z funkce s lichou mocninou dostaneme diferenciál), např. pro m-sudé, n-liché:
$$\int \sin^m x (\cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cos x \mathrm{d}x = \left| u = \sin x \right| = \int u^m (1-u^2)^{\frac{n-1}{2}} \mathrm{d}u$$

3. Jsou-li m i n liché:
Převedeme integrand pomocí součtových vzorců $2 \sin x \cos x = \sin(2x)$ a lemma **??** na výraz předchozích typů, např. pro $m < n$:
$$\int \sin^m x \cos^n x \mathrm{d}x = \int (\sin x \cos x)^m (\cos^2 x)^{\frac{n-m}{2}} \mathrm{d}x = \int \left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)^m \left(\frac{1+\cos(2x)}{2}\right)^{\frac{n-m}{2}} \mathrm{d}x,$$
kde poznamenejme, že $m - n$ je sudé číslo.

Lemma 1.23 (Vzorce pro součin goniometrických funkcí)

$$\cos(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\Big(\cos[(n+m)x] + \cos[(n-m)x]\Big)$$
$$\sin(mx)\sin(nx) = \frac{1}{2}\Big(\cos[(n-m)x] - \cos[(n+m)x]\Big)$$
$$\sin(mx)\cos(nx) = \frac{1}{2}\Big(\sin[(m-n)x] + \sin[(n+m)x]\Big)$$

Důkaz. Větu dokážeme pomocí součtových vzorců pro funkce cos a sin. □

Poznámka. Pomocí lemma 1.23 se integrály typu $\int \cos(\alpha x)\sin(\beta x)\,\mathrm{d}x$, $\int \cos(\alpha x)\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x$ a $\int \sin(\alpha x)\sin(\beta x)\,\mathrm{d}x$, pro $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ převedou na známé integrály.

1.10 Shrnutí integračních vzorců

Poznámka.

Typ integrálu	Výsledný typ funkce	Substituce
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-(x+b)^2}}$	arcsin nebo $-$ arccos	$x+b = a\sin u$ nebo $x+b = a\cos u$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+(x+b)^2}$	arctg nebo $-$arccotg	$x+b = a\,\mathrm{tg}\,u$ nebo $x+b = a\,\mathrm{cotg}\,u$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+b)^2+a^2}}$	argsinh	$x+b = a\sinh u$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x+b)^2-a^2}}$	argcosh	$x+b = a\cosh u$
$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+b)^2-a^2}$	argtgh nebo argcotgh	$x+b = a\,\mathrm{tgh}\,u$ nebo $x+b = a\,\mathrm{cotgh}\,u$