1 Užití derivace k vyšetřování funkce

1.1 Věty o přírůstku funkce

Lemma 1.1
Pokud $f'(a) > 0$ (nebo též $f'(a) = +\infty$), pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro všechna $h \in (0, \varepsilon)$ platí

$$f(a-h) < f(a) < f(a+h).$$

Pokud $f'(a) < 0$ (nebo též $f'(a) = -\infty$), pak existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro všechna $h \in (0, \varepsilon)$ platí

$$f(a-h) > f(a) > f(a+h).$$

Důkaz. Dokážeme první tvrzení.
Z definice derivace v bodě a víme $f'(a) = \lim\limits_{k\to 0} \frac{1}{k}(f(a+k) - f(a)) > 0$.
V definici této limity pro námi zvolené $\varepsilon = f'(a) > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že $\forall k \in (-\delta, \delta)$, $k \neq 0$,

$$\left| \frac{f(a+k) - f(a)}{k} - f'(a) \right| < \varepsilon = f'(a),$$

tj.

$$-f'(a) < \frac{f(a+k) - f(a)}{k} - f'(a) < f'(a),$$

tj.

$$0 < \frac{f(a+k) - f(a)}{k} < 2f'(a).$$

Pro $k > 0$ dostáváme $f(a+k) - f(a) > 0$ a volíme $h = k$; celkem: $f(a) < f(a+h)$.
Pro $k < 0$ dostáváme $f(a+k) - f(a) < 0$ a volíme $h = -k$; celkem: $f(a-h) < f(a)$. □

Věta 1.2 (Rolle)
Nechť funkce f je spojitá na $[a, b]$, má konečnou derivaci na (a, b) a nechť navíc $f(a) = f(b)$. Potom $\exists c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = 0$.

Důkaz. Podle Weierstrassovy Věty **??** pro f spojitou na $[a, b]$ existuje $f_{\min}$ a $f_{\max}$ a může nastat právě jeden z následujících dvou případů:
1. f je konstantní $\Rightarrow f' = 0$ pro $\forall x$.
2. f není konstantní a $f_{\min}$ nebo $f_{\max}$ se nabývá uvnitř (a, b) v nějakém bodě c, kde nutně $f'(c) = 0$, jinak bychom byli ve sporu s Lemma 1.1. □

Věta 1.3 (Lagrange)
Nechť funkce f je spojitá na $[a, b]$ a diferencovatelná na (a, b). Potom $\exists c \in (a, b)$ tak, že

$$f'(c) = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$$

Důkaz. Definujme pomocnou funkci $g(x) = f(x) - Kx$, kde K je nějaké číslo zvolené tak, abychom mohli na funkci g použít Rolleho Větu 1.2, tj. chceme splnit předpoklad $g(a) = g(b)$:

$$g(a) = f(a) - Ka \stackrel{?}{=} g(b) = f(b) - Kb,$$

odkud

$$K = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}.$$

Pak podle Rolleho Věty 1.2 existuje $c \in (a, b)$ tak, že $g'(c) = 0$ a tudíž

$$g'(c) = f'(c) - \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = 0.$$

□

Důsledek 1.4
Nechť funkce f je spojitá na $[a, b]$ a nechť $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a, b)$. Potom f je konstantní funkce.

Důkaz. Sporem. Předpokládáme, že f je spojitá na $[a, b]$, $\exists f'$ na (a, b) a $\exists c, d \in [a, b]$ tak, že $f(c) \neq f(d)$ (tj. f není konstantní). Pak podle Lagrangeovy Věty 1.3 existuje $e \in (c, d)$ tak, že $f'(e) = \frac{f(d)-f(c)}{d-c}$, což je rovno dle předpokladu 0, tj. $f(d) = f(c)$ a to je spor. □

Věta 1.5
Nechť funkce f a g jsou spojité na intervalu $[a, b]$ a nechť $f'(x) = g'(x)$ na intervalu (a, b). Potom $\exists C \in \mathbb{R}$ tak, že $f(x) = g(x) + C \quad \forall x \in [a, b]$.

Důkaz. Definujme pomocnou funkci $h = f - g$, která je spojitá na $[a, b]$ a pro $\forall x \in (a, b)$ $h'(x) = 0$. Podle Důsledku 1.4 je tato funkce konstantní a proto

$$h(x) = f(x) - g(x) = K.$$

□

1.2 Monotonie

Definice 1.6 (Monotonie funkce)
Řekneme, že funkce f na intervalu J

ostře roste	$\Leftrightarrow$	$(\forall x_1, x_2 \in J)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$
roste (neklesá)	$\Leftrightarrow$	$(\forall x_1, x_2 \in J)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$
ostře klesá	$\Leftrightarrow$	$(\forall x_1, x_2 \in J)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$
klesá (neroste)	$\Leftrightarrow$	$(\forall x_1, x_2 \in J)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2))$

Věta 1.7 (Vztah derivace a monotonie)
Nechť funkce f je diferencovatelná na intervalu J. Potom platí

$f'(x) > 0$	$\forall x \in J$	$\Rightarrow$	f je ostře rostoucí na J.
$f'(x) \geq 0$	$\forall x \in J$	$\Rightarrow$	f je rostoucí (neklesající) na J.
$f'(x) < 0$	$\forall x \in J$	$\Rightarrow$	f je ostře klesající na J.
$f'(x) \leq 0$	$\forall x \in J$	$\Rightarrow$	f je klesající (nerostoucí) na J.

1.3 Lokální a globální extrémy

Definice 1.8 (Lokální extrém funkce)
Řekneme, že f má v bodě $a \in D_f$

ostré lokální minimum	$\Leftrightarrow$	$(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in D_f)(0 < \lvert x - a \rvert < \varepsilon \Rightarrow f(x) > f(a))$
lokální minimum	$\Leftrightarrow$	$(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in D_f)(0 < \lvert x - a \rvert < \varepsilon \Rightarrow f(x) \geq f(a))$
ostré lokální maximum	$\Leftrightarrow$	$(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in D_f)(0 < \lvert x - a \rvert < \varepsilon \Rightarrow f(x) < f(a))$
lokální maximum	$\Leftrightarrow$	$(\exists \varepsilon > 0)(\forall x \in D_f)(0 < \lvert x - a \rvert < \varepsilon \Rightarrow f(x) \leq f(a))$

Věta 1.9 (Nutná podmínka existence extrému)
Má-li funkce f v bodě $a \in D_f$ lokální extrém, pak $f'(a) = 0$ nebo $f'(a)$ neexistuje.

Důkaz. Sporem. Předpokládáme-li, že $\exists f'(a)$ a zároveň $f'(a) \neq 0$, pak:
$f'(a) > 0 \quad \Rightarrow \quad f$ je dle Věty 1.7 v bodě a ostře rostoucí,
$f'(a) < 0 \quad \Rightarrow \quad f$ je dle Věty 1.7 v bodě a ostře klesající,
což je spor s předpokladem existence lokálního extrému v bodě a. □

Poznámka. **Globální extrémy** spojité a diferencovatelné funkce f na intervalu $[a, b]$ vyšetříme tak, že nalezneme všechny lokální extrémy na (a, b) a porovnáme s hraničními hodnotami $f(a)$ a $f(b)$.

Definice 1.10 (Stacionární bod)
Stacionární bod funkce f je takový bod, ve kterém je derivace funkce rovna 0 nebo neexistuje.

1.4 Test extrému dle 1. derivace

Věta 1.11 (Test extrému funkce dle 1. derivace)
Nechť funkce f je spojitá v bodě $a \in D_f$ a nechť bod a je stacionárním bodem funkce f. Pokud existuje $\delta > 0$ tak, že

- $f' > 0$ na $(a-\delta, a)$ a $f' < 0$ na $(a, a+\delta)$, potom f má v bodě a lokální maximum.
- $f' < 0$ na $(a-\delta, a)$ a $f' > 0$ na $(a, a+\delta)$, potom f má v bodě a lokální minimum.
- f' má stejné znamení v $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$, potom f nemá v bodě a lokální extrém.

1.5 Test extrému dle 2. derivace

Věta 1.12 (Test extrému funkce dle 2. derivace)
Nechť funkce f je spojitá v bodě $a \in D_f$ a nechť $f'(a) = 0$.

1. Pokud $f''(a) < 0$, potom f má v bodě a ostré lokální maximum,
2. Pokud $f''(a) > 0$, potom f má v bodě a ostré lokální minimum.

Důkaz. Dokážeme první tvrzení. Pokud $f''(a) < 0$, pak f' je ostře klesající v bodě a. Pak $\exists \delta > 0$ tak, že pro každé x_1, x_2: $a - \delta < x_1 < a < x_2 < a + \delta$ platí

$$f'(x_1) > \underbrace{f'(a)}_{0} > f'(x_2)$$

a tudíž podle Věty 1.11 je v bodě a ostré lokální maximum. □

Příklad. Trhovec potřebuje z kruhového papíru o poloměru R udělat kornout o maximálním objemu. Jakou kruhovou výseč je potřeba vystřihnout?
Řešení: α ... úhel v radiánech, r ... poloměr podstavy kuželu
Obvod podstavy kužele je $2\pi r = 2\pi R - R\alpha$, odkud $r = R\left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)$.
Výška kužele:

$$v = \sqrt{R^2 - r^2} = R\sqrt{1 - \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)^2} = R\sqrt{\frac{\alpha}{\pi} - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}.$$

Hledáme maximum objemu kužele $V(\alpha) = \frac{\pi}{3}R^3\left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)^2\sqrt{\frac{\alpha}{\pi} - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}}$ pro $\alpha \in (0, 2\pi)$:

$$V'(\alpha) = \frac{R^3}{3}\left(\frac{\alpha}{\pi} - \frac{\alpha^2}{4\pi^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)\left(1 - 3\frac{\alpha}{\pi} + 3\frac{\alpha^2}{4\pi^2}\right) \stackrel{!}{=} 0.$$

Řešením této rovnice jsou pro $\alpha \in (-2\pi, 2\pi)$ kořeny $\alpha_{1,2} = 2\pi\left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$. Nyní stačí aplikovat buď Větu 1.11 nebo Větu 1.12 a ukázat, že pro tato $\alpha_{1,2}$ nabývá funkce $V(\alpha)$ maximum.

1.6 Konvexní a konkávní funkce

Definice 1.13 (Konvexní a konkávní funkce)
Nechť je funkce f diferencovatelná na (a, b). Říkáme, že funkce f je

ryze konvexní	$\Leftrightarrow$	f' je ostře rostoucí na (a, b)
konvexní	$\Leftrightarrow$	f' je rostoucí na (a, b)
ryze konkávní	$\Leftrightarrow$	f' je ostře klesající na (a, b)
konkávní	$\Leftrightarrow$	f' je klesající na (a, b)

Poznámka. Konvexní a konkávní funkce jsme zde definovali pomocí pojmu derivace, tedy pouze pro diferencovatelné funkce. Pojem konvexnosti a konkávnosti funkce lze zavést i pro obecné funkce, viz např. Odstavec 4.7 v [**?**].

Definice 1.14 (Inflexní bod)
Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě a. Řekneme, že bod a je **inflexním bodem** funkce f právě tehdy, když se v bodě a mění charakter funkce f z konvexní na konkávní nebo opačně.

Věta 1.15 (Nutná podmínka existence inflexního bodu)
Buď c inflexní bod. Potom $f''(c) = 0$ nebo $f''(c)$ neexistuje.

1.7 l'Hôpitalovo pravidlo

Věta 1.16 (l'Hôpitalovo pravidlo)
Buď $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Nechť f má konečnou derivaci a $g'(x) \neq 0$ na $(a-\delta, a) \cup (a, a+\delta)$ pro nějaké $\delta > 0$. Dále nechť platí jedna ze dvou podmínek:

1. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0 \wedge \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$
2. $\lim\limits_{x \to a} |g(x)| = +\infty$

Potom jestliže existuje limita na levé straně následující rovnice, platí mezi limitami rovnost

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

1.8 Vyšetřování průběhu funkce

Poznámka. Při vyšetřování průběhu funkce f (tj. chceme alespoň zjistit přibližný graf funkce) postupně zkoumáme:

1. definiční obor D_f,
2. limity v krajních bodech D_f,
3. asymtptoty v $\pm\infty$, případně vertikální asymptoty
4. první derivaci funkce f' její definiční obor ($D_{f'} \subseteq D_f$),
5. intervaly monotonie,
6. druhou derivaci funkce f'' a její definiční obor $D_{f''}$,
7. lokální extrémy funkce f,
8. globální extrémy funkce f na D_f,
9. konvexnost/konkávnost funkce,
10. inflexní body,
11. významné body pro kreslení (extrémy, průsečíky s osami a pod.).