1 Spojitost funkce

1.1 Definice

Definice 1.1 (Spojitost funkce v bodě a)
Nechť pro nějaké $p > 0$ je sjednocení $(a-p, a+p)$ částí D_f. Řekneme, že funkce f je spojitá v bodě a, právě když

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Definice 1.2 (Spojitost funkce v bodě a zleva a zprava)
Nechť pro nějaké $p > 0$ je sjednocení $(a-p, a]$, resp. $[a, a+p)$ částí D_f. Řekneme, že funkce f je **spojitá** v bodě a zleva, resp. zprava, právě když

$$\lim_{x \to a-} f(x) = f(a), \quad \text{resp.} \quad \lim_{x \to a+} f(x) = f(a).$$

Definice 1.3 (Spojitost na uzavřeném intervalu)
Řekneme, že funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$, právě když je spojitá v každém bodě $x \in (a, b)$, spojitá zprava v bodě a a zleva v bodě b.

Definice 1.4 (Odstranitelná nespojitost)
Funkce f má v bodě a **odstranitelnou nespojitost** $\Leftrightarrow$ $\lim_{x \to a} f(x)$ existuje, ale $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$

Definice 1.5 (Skoková nespojitost)
Funkce f má v bodě a **skokovou nespojitost** $\Leftrightarrow$ existují obě konečné jednostranné limity, ale nerovnají se.

Definice 1.6 (Podstatná nespojitost)
Funkce f má v bodě a **podstatnou nespojitost** $\Leftrightarrow$ alespoň jedna jednostranná limita je nekonečná nebo neexistuje.

Věta 1.7
Funkce f je spojitá v bodě a $\Leftrightarrow$ Funkce f je spojitá v bodě a zleva i zprava.

Věta 1.8
Nechť jsou funkce f a g spojitá v bodě a a buď $\alpha \in \mathbb{R}$. Potom funkce $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, αf i $\frac{f}{g}$ pro $g(a) \neq 0$ jsou spojité v a.

Věta 1.9
Nechť je funkce g spojitá v bodě a a funkce f spojitá v bodě $g(a)$. Potom funkce $f \circ g$ je spojitá v a.

1.2 Vlastnosti spojitých funkcí

Věta 1.10 (Bolzano – o existenci nulového bodu spojité funkce)
Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$ a $f(a)f(b) < 0$. Potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f(c) = 0$.

Důkaz. Obrázkový – graf spojité funkce nutně musí protnout osu x, pokud $f(a)$ a $f(b)$ mají opačná znamení. □

Věta 1.11 (Darboux – o existenci řešení $f(c) = d$ pro spojitou funkci f)
Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$. Potom pro každé číslo d ležící mezi $f(a)$ a $f(b))$ existuje $c \in (a, b)$, že $f(c) = d$.

Důkaz. Je-li f spojitá funkce, je i $f - d$ je spojitá a pro d ležící mezi $f(a)$ a $f(b)$ platí, že $(f(a) - d)(f(b) - d) \leq 0$. Proto podle Věty 1.10 aplikované na funkci $f - d$ existuje $c \in (a, b)$ tak, že $f(c) - d = 0$. □

Definice 1.12 (Maximum a minumum funkce)
Řekneme, že funkce f má v bodě $a \in D_f$ **maximum**, resp. **minimum** právě tehdy, když $f(a) \geq f(x)$, resp. $f(a) \leq f(x)$ pro všechny $x \in D_f$.

Definice 1.13 (Omezená funkce)
Řekneme, že funkce f je omezená na množině $M \subset D_f \quad \Leftrightarrow \quad (\exists K > 0)(\forall x \in M)(|f(x)| \leq K)$.

Věta 1.14 (Weierstrass – extrémy spojité funkce na uzavřeném intervalu)
Nechť funkce f je spojitá na intervalu $[a, b]$. Potom funkce f je omezená a nabývá na $[a, b]$ svého minima i maxima, tj. $\exists c \in [a, b]$ a $\exists d \in [a, b]$ tak, že funkce f nabývá v bodě c svého maxima a v bodě d svého minima.