1 $\boxed{\text{Limita funkce}}$

1.1 Definice

Definice 1.1 (Limita funkce f v bodě a)
Nechť pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ a $p > 0$ je sjednocení $(a-p, a) \cup (a, a+p)$ částí definičního oboru D_f. Potom řekneme, že limita funkce f v bodě a je ℓ:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a-p, a) \cup (a, a+p)\ )(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon).$$

Definice 1.2 (Limita funkce f v bodě a zprava)
Nechť pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ a $p > 0$ je sjednocení $(a, a+p)$ částí definičního oboru D_f. Potom řekneme, že limita funkce f v bodě a **zprava** je ℓ:

$$\lim_{x\to a+} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a, a+p)\ )(a < x < a+\delta \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon).$$

Definice 1.3 (Limita funkce f v bodě a zleva)
Nechť pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ a $p > 0$ je sjednocení $(a-p, a)$ částí definičního oboru D_f. Potom řekneme, že limita funkce f v bodě a **zleva** je ℓ:

$$\lim_{x\to a-} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a-p, a)\ )(a-\delta < x < a \Rightarrow |f(x)-\ell| < \varepsilon).$$

Věta 1.4 (Vztah existence limity a existence limit zleva a zprava)

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a+} f(x) = \ell \wedge \lim_{x\to a-} f(x) = \ell$$

1.2 Vlastnosti limity

Lemma 1.5

$$\lim_{x\to a} f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x\to a} |f(x)| = 0.$$

Důkaz. Plyne z přímo z definice limity. □

Věta 1.6 (Ekvivalence zápisů limity)
Následující výroky jsou ekvivalentní:

1. $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$,
2. $\lim_{x\to a} f(x) - \ell = 0$,
3. $\lim_{x\to a} |f(x) - \ell| = 0$,
4. $\lim_{h\to 0} f(a+h) = \ell$.

Věta 1.7 (Vlastnosti limity funkce)
Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ a $\lim_{x\to a} g(x) = m$, kde $\ell, m \in \mathbb{R}$. Potom:

(i) $\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \ell + m$,

(ii) $\lim_{x\to a}(f-g)(x) = \ell - m$,

(iii) $\lim_{x\to a}(fg)(x) = \ell m$,

(iiii) pokud navíc $m \neq 0$, pak $\lim\limits_{x \to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{\ell}{m}$,

Důkaz. Plyne přímo z definice limity. $\square$

Důsledek 1.8
Nechť p je polynom. Potom $\forall a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to a} p(x) = p(a).$$

1.3 Jednoznačnost limity

Věta 1.9 (O jednoznačnosti limity funkce)

$$\left(\lim_{x \to a} f(x) = \ell \quad \wedge \quad \lim_{x \to a} f(x) = m\right) \quad \Rightarrow \quad \ell = m.$$

Důkaz. Sporem.
Předpokládejme, že $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell \wedge \lim\limits_{x \to a} f(x) = m \wedge \ell \neq m$.
Zvolme $\varepsilon = \frac{1}{2}|\ell - m| > 0$ a z definic limit existují pro toto ε čísla $\delta_\ell > 0$ a $\delta_m > 0$ tak, že

$$0 < |x - a| < \delta_\ell \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon$$
$$0 < |x - a| < \delta_m \Rightarrow |f(x) - m| < \varepsilon$$

Definujme $\delta = \min\{\delta_\ell, \delta_m\}$, pak totiž pro $0 < |x - a| < \delta$ platí, že

$$\varepsilon = \frac{1}{2}|\ell - m| = \frac{1}{2}\,|f(x) - m - (f(x) - \ell)| \underset{\underset{\triangle\neq}{\uparrow}}{\leq} \frac{1}{2}\underbrace{|f(x) - \ell|}_{<\varepsilon} + \frac{1}{2}\underbrace{|f(x) - m|}_{<\varepsilon} < \varepsilon.$$

Dohromady dostáváme nerovnici $\varepsilon < \varepsilon$, což je spor. $\square$

1.4 Nekonečné limity

Definice 1.10 (Nekonečná limita funkce f v bodě a)
Nechť pro nějaké $a \in \mathbb{R}$ a $p > 0$ je sjednocení $(a - p, a) \cup (a, a + p)$ částí definičního oboru D_f.Potom

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \alpha > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a-p, a) \cup (a, a+p)\ )(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) > \alpha),$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \alpha > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in (a-p, a) \cup (a, a+p)\ )(0 < |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < -\alpha).$$

Poznámka. Analogicky definice jednostranných limit

- $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to a+} f(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = -\infty$.

Věta 1.11 (Vlastnosti nekonečných limit)

- $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty \ \wedge \ \lim\limits_{x \to a} g(x) = \ell \neq -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x \to a}(f + g)(x) = +\infty$

- $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \ \wedge \ \lim_{x \to a} g(x) = \ell \neq +\infty \Rightarrow \lim_{x \to a}(f+g)(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \ \wedge \ \lim_{x \to a} g(x) = \ell \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \to a}(f \cdot g)(x) = (\operatorname{sign} \ell) \cdot \infty$
- $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \ \wedge \ \lim_{x \to a} g(x) = \ell \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \to a}(f \cdot g)(x) = (\operatorname{sign} \ell) \cdot (-\infty)$
- $\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x \to a} \left(\frac{1}{f}\right)(x) = 0$

Poznámka. Výrazy IND: „$\infty - \infty$“, „$0 \cdot \infty$“, „$\frac{\infty}{\infty}$“, „$\frac{1}{0}$“ a „$\frac{0}{0}$“ jsou neurčité, je potřeba provést algebraické manipulace před samotnou limitou.

Definice 1.12 (Limita funkce v nekonečnu)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x > \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon),$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \quad \Leftrightarrow \quad (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x < -\delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon),$$

Poznámka. Analogicky definice

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$

1.5 Věta o limitě sevřené funkce

Věta 1.13 (Sendvičová věta o limitě sevřené funkce)
Buď $p > 0$ a nechť pro funkce d, f a h platí, že $(a-p, a) \cup (a, a+p) \subset D_f \cap D_d \cap D_h$ a pro všechna $x \in (a-p, a) \cup (a, a+p)$ je $d(x) \leq f(x) \leq h(x)$. Potom když $\lim_{x \to a} d(x) = \lim_{x \to a} h(x) = \ell$, pak existuje limita funkce f v bodě a a je rovna ℓ

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell.$$

Důkaz. Pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje z definic limit δ_d a δ_h tak, že pro všechna x taková, že

- $0 < |x - a| < \delta_d \Rightarrow \ell - \varepsilon < d(x) < \ell + \varepsilon$
- $0 < |x - a| < \delta_h \Rightarrow \ell - \varepsilon < h(x) < \ell + \varepsilon$

Zvolíme-li $\delta = \min\{p, \delta_d, \delta_h\}$, platí pro všechna x taková, že $0 < |x - a| < \delta$, nerovnosti

$$\ell - \varepsilon < d(x) < f(x) < h(x) < \ell + \varepsilon,$$

čímž je věta dokázána. □

Poznámka. Věta 1.13 platí i pro jednostranné limity a limity v nekonečnu.

1.6 Goniometrické limity

Poznámka. Základní vztahy mezi goniometrickými funkcemi:

- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$
- $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

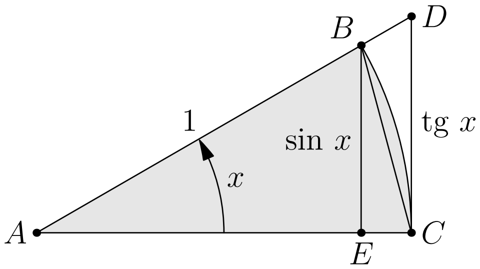
Lemma 1.14 (Snížení mocniny u goniometrických funkcí)

$$\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$$
$$\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$$

Důkaz. Větu dokážeme pomocí součtových vzorců pro funkci $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$. □

Věta 1.15

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$



Obrázek 1: Ilustrace k důkazu Věty 1.15.

Důkaz. Nechť $x > 0$ je úhel v radiánech. Z obrázku 1 je patrná následující nerovnost mezi plochami AEB, ACB a ACD:

$$\frac{1}{2}\sin x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\operatorname{tg} x,$$

odkud

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Z věty o limitě sevřené funkce snadno dostáváme tvrzení, které platí i o pro $x < 0$ neb funkce $\frac{\sin x}{x}$ je sudá. □

1.7 Asymptota funkce

Definice 1.16 (Asymptota)
Přímku $y = kx + q$ nazveme asymptotou funkce f v $+\infty$, resp. $-\infty$, platí-li, že

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - kx - q = 0,$$

resp.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - kx - q = 0.$$

Definice 1.17 (Vertikální asymptota)
Přímku $x = a$ nazveme vertikální asymptotou funkce f, má-li funkce f v bodě a nekonečnou limitu zleva nebo zprava.

Věta 1.18 (Nalezení asymptoty)
$y = kx + q$ je asymptotou funkce f v $\pm\infty$ právě tehdy, když

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \tag{1a}$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - kx. \tag{1b}$$

Důkaz. Důkaz ekvivalence provedeme ve dvou krocích.
1. „$\Rightarrow$“: Z definice asymptoty platí $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - kx - q = 0$, odkud přímo plyne (1b). Tvrzení (1a) dostaneme tak, že zkoumáme limitu

$$0 = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x) - kx - q}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} - k - \frac{q}{x} = \left(\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}\right) - k - 0.$$

2. „$\Leftarrow$“: Z (1b) rovnou plyne definice asymptoty $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - kx - q = 0$. $\square$