1 Taylorův polynom a mocninné řady

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

nazýváme n-tým Taylorovým polynomem funkce f v bodě a.

Taylorovy polynomy důležitých funkcí v bodě $a = 0$:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x)$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + R_{2n+1}(x)$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + R_{2n}(x)$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + R_n(x)$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + R_n(x)$$

Poznamenejme, že výraz $\binom{\alpha}{k}$ definujeme pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ jako $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$ pro $k \in \mathbb{N}$ a $\binom{\alpha}{k} = 1$ pro $k = 0$.

Řešený příklad: Nalezněte n-tý Taylorův polynom funkce $f(x) = \frac{1}{e^{2-3x}}$.

$$\frac{1}{e^{2-3x}} = e^{3x-2} = \frac{1}{e^2} e^{3x} = \frac{1}{e^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{(3x)^k}{k!} + (3x)^n \omega(3x) = \frac{1}{e^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k x^k}{k!} + x^n \omega(x)$$

n-tý Taylorův polynom má tedy tvar

$$T_n(x) = \frac{1}{e^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k x^k}{k!}.$$

Řešený příklad: Nalezněte n-tý Taylorův polynom funkce $f(x) = \arccos(x)$. Využijeme věty dávající do souvislosti Taylorův polynom funkce a Taylorův polynom její derivace

$$(T_{n,f,a}(x))' = T_{n-1,f',a}(x).$$

Derivace funkce $f(x) = \arccos(x)$ je $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, k této funkci tedy najdeme Taylorův polynom.

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k x^{2k} + x^{2n}\omega(x)$$

Pro původní funkci tedy bude platit,

$$\arccos(x) = c - \sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + x^{2n+1}\omega(x).$$

Konstantu c dopočítáme dosazením nuly do obou stran rovnice: $\arccos(0) = \frac{\pi}{2} = c$. Zatím jsme však nenašli n-tý Taylorův polynom, ale T_{2n+1}, n-tý Taylorův polynom bude mít tvar

$$T_n(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}.$$

Poznamenejme, že pro $k \neq 0$ platí rovnost $\binom{-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2k!!}$, pro $k = 0$ platí $\binom{-\frac{1}{2}}{k} = 1$ výsledek tedy lze ještě upravit do tvaru

$$T_n(x) = \frac{\pi}{2} - x - \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(2k-1)!!}{2k!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Řešený příklad: Nalezněte 4. Taylorův polynom funkce $f(x) = \sin(2\ln(1+x))$.
Zajisté bychom mohli spočítat Taylorův polynom přímo z definice, je však vidět, že se v příkladu vyskytují funkce, jejichž rozvoj dobře známe ($\sin(x)$, $\ln(1+x)$). Využijeme tedy těchto rozvojů - rozvíjíme do čtvrtého stupně:

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + x^4\omega_1(x) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\omega_2(x) \\
2\ln(1+x) &= 2x - x^2 + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + x^4\omega_3(x)
\end{aligned}$$

Poznamenejme, že na posledním řádku jsme nezapomněli vynásobit zbytek v Peanově tvaru dvojkou, ale dvojku jsme "vtáhli"do zbytku. Nyní tedy stačí složit první a třetí polynom, hledáme 4. Taylorův polynom, takže nás budou zajímat pouze členy s maximálně čtvrtou mocninou x, ostatní členy se "schovají"do zbytku.

$$\begin{aligned}
\sin(2\ln(1+x)) &= \left(2x - x^2 + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + x^4\omega_3(x)\right) - \frac{1}{3!}\left(2x - x^2 + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + x^4\omega_3(x)\right)^3 \\
&+ \left(2x - x^2 + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + x^4\omega_3(x)\right)^4 \omega_1\left(2x - x^2 + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + x^4\omega_3(x)\right) \\
&= 2x - x^2 + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2} - \frac{1}{3!}\left((2x)^3 + 3(2x)^2(-x^2) + \ldots\right) + x^4\omega_5(x) \\
&= 2x - x^2 + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2} - \frac{4}{3}x^3 + 2x^4 + x^4\omega_6(x) = 2x - x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^4 + x^4\omega_5(x)
\end{aligned}$$

Hledaný polynom je tedy $2x - x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^4$.

1.1 Příklady k procvičení

Poznámka: Některé funkce je třeba spojitě dodefinovat v bodě a.

1. Určete 3. Taylorův polynom v bodě $a = 2$ funkce
$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$
2. Určete 3. Taylorův polynom v bodě $a = 1$ funkce
$$f(x) = x^x - 1$$
3. Určete 3. Taylorův polynom v bodě $a = 1$ funkce
$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$
4. Určete 2. Taylorův polynom v bodě $a = 0$ funkce
$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$
5. Určete 6. Taylorův polynom v bodě $a = 0$ funkce
$$f(x) = \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$$
6. Určete 7. Taylorův polynom v bodě $a = 0$ funkce
$$f(x) = \sin(x)\cos(2x)$$
7. Určete 4. Taylorův polynom v bodě $a = 0$ funkce
$$f(x) = \frac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2}$$
8. Určete 2. Taylorův polynom v bodě $a = 0$ funkce
$$f(x) = \cosh(x)$$
9. Určete 5. Taylorův polynom v bodě $a = 0$ funkce
$$f(x) = e^{2x - x^2}$$
10. Určete 4. Taylorův polynom v bodě $a = 0$ funkce
$$f(x) = e^{\sin(x)}$$
11. Určete 6. Taylorův polynom v bodě $a = 0$ funkce
$$f(x) = \ln(\cos(x))$$
12. Určete 4. Taylorův polynom v bodě $a = 0$ funkce
$$f(x) = \ln(1 + e^x)$$

13. Určete 13. Taylorův polynom v bodě $a = 0$ funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{\sin(x^3)}$$

14. Určete n-tý Taylorův polynom v bodě $a = 0$ funkce

$$f(x) = \ln\left(2 + \frac{3}{5}x\right)$$

15. Určete n-tý Taylorův polynom v bodě $a = 0$ funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x)$$

16. Určete n-tý Taylorův polynom v bodě $a = 0$ funkce

$$f(x) = \operatorname{arccotg}(x)$$

17. Určete n-tý Taylorův polynom v bodě $a = 0$ funkce

$$f(x) = 1 + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

1.2 Výpočet limit pomocí Taylorova polynomu

Řešený příklad: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x) - x}{x\sin(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x - \frac{x^3}{3!} + x^3\omega(x) - x}{x\sin(x)}\right) =$$
$$\lim_{x\to 0} -\frac{x^2}{6\sin(x)} + \frac{x^2\omega(x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} -\frac{x}{\sin(x)}\frac{x}{6} + x\omega(x)\frac{x}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} -\frac{x}{6}.1 + x\omega(x).1 = 0$$

18. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - \sin(x)}{x^3 + x^4}$

19. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

20. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x\sin(x) - x(1+x)}{x^3}$

21. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg}(x)\right)$

22. $\lim_{x\to +\infty}\left(x - x^2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$

23. $\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(\operatorname{tg}(x)) - x}{x^3}$

24. $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}\right)$

25. $\lim_{x\to 0} \frac{1 - (\cos(x))^{\sin(x)}}{x^3}$

1.3 Přibližný výpočet funkční hodnoty

Řešený příklad: Vypočítejte přibližnou hodnotu výrazu $\sin(36^\circ)$
Nejprve převedeme stupně na radiány $36^\circ = \frac{\pi}{5}$, zajímá nás tedy výraz $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Využijeme známý rozvoj funkce sinus a Lagrangeův tvar zbytku:

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \frac{(-1)^{n+1}\cos(\xi)}{(2n+3)!} x^{2n+3}.$$

Hledáme tedy takové n, pro které bude absolutní hodnota zbytku menší než námi zadaná tolerovaná chyba - pro tento příklad zvolme přesnost 10^{-4}. Hodnota x je v našem případě rovna $\frac{\pi}{5}$ a číslo ξ je tedy z intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{5}\right\rangle$. Nejprve učiníme horní odhad.

$$\left|\frac{(-1)^{n+1}\cos(\xi)}{(2n+3)!} x^{2n+3}\right| = \frac{|\cos(\xi)|}{(2n+3)!}\left(\frac{\pi}{5}\right)^{2n+3} \leq \frac{1}{(2n+3)!}\left(\frac{\pi}{5}\right)^{2n+3} \leq \frac{1}{(2n+3)!}$$

V první nerovnosti jsme odhadli absolutní hodnotu funkce kosinus jedničkou a v druhé nerovnosti jsme trochu hrubě odhadli shora číslo π hodnotou 5. Z tohoto odhadu už bude možné vyřešit od které hodnoty n platí nerovnost

$$\frac{1}{(2n+3)!} < 10^{-4},$$

tedy

$$10^4 = 10000 < (2n+3)!$$

Tato nerovnost je splněna už pro $n = 3$ (pro $n = 2$ dostáváme $7! = 5040$). Poznamenejme ještě, že funkci $\sin(x)$ jsme si na začátku vyjádřili jako součet $(2n+1)$-tého Taylorova polynomu plus zbytku, k dosažení dané přesnosti stačí tedy aproximace sedmým Taylorovým polynomem:

$$\sin(x) \doteq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

Za x teď stačí dosadit požadovanou hodnotu $\frac{\pi}{5}$. Pokud bychom chtěli znát desetinný rozvoj tohoto čísla, narazíme na problém, že číslo π je iracionální a ve výpočtech vždy můžeme pracovat pouze s jeho aproximací. Budeme-li předpokládat, že pracujeme s "dostatečně přesnou" aproximací čísla π, dostaneme desetinný rozvoj $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \doteq 0,5877$.

S přesností 10^{-4} (nebo vyšší dle vlastního uvážení) spočítejte hodnotu následujících výrazů:

26. e
27. $\sqrt{5}$
28. $\sqrt[3]{30}$
29. $\sqrt[5]{250}$
30. $\sqrt{e}$
31. $\ln(1,05)$
32. $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
33. $\cos(18^\circ)$

34. $(1,1)^{1,2}$

Odhadněte absolutní chybu v následujících přibližných vztazích:

35. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \quad 0 \leq x \leq 1$

36. $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} \quad |x| \leq \frac{1}{2}$

37. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad 0 \leq x \leq 1$

38. $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} \quad 0 \leq x \leq 1$

Pro jaká x je absolutní hodnota chyby přibližného vyjádření následujících funkcí menší než 10^{-4}

39. $\sin(x) \doteq x - \frac{x^3}{6}$

40. $\ln(1+x) \doteq x - \frac{x^2}{2}$

1.4 Mocninné řady

K mocninné řadě $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ existuje $\rho \in \overline{\mathbb{R}}$, $\rho \geq 0$ takové, že pokud $|x-a| < \rho$, pak řada konverguje absolutně, naopak je-li $|x-a| > \rho$, pak řada diverguje. Číslo ρ nazýváme poloměrem konvergence mocninné řady a platí vztah

$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}},$$

přičemž klademe $\rho = 0$, pokud limes superior je rovno $+\infty$ a $\rho = +\infty$, pokud limes superior je rovno 0.

Při výpočtu se může hodit Cauchyho vzoreček pro limitu kladných posloupností

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

pokud limita na pravé straně existuje.

Poznamenejme ještě, že při zkoumání konvergence mocninné řady v krajních bodech oboru konvergence nepomůže Cauchyho ani d'Alambertovo kritérium v limitním tvaru.

Řešený příklad: Vyšetřete obor konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x+1)^n}{n^2 2^n}$.
Nejprve řadu upravíme do tvaru

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x+1)^n}{n^2 2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n \left(x+\frac{1}{3}\right)^n}{n^2 2^n},$$

odtud vidíme, že střed je v bodě $a = -\frac{1}{3}$, dále spočítáme poloměr konvergence ρ.

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{\frac{3^n}{n^2 2^n}} = \frac{3}{2}$$

Poloměr konvergence je $\rho = \frac{2}{3}$, víme tedy, že řada konverguje pro $x \in \left(-1, \frac{1}{3}\right)$, zbývá vyšetřit krajní body. Pro $x = -1$ dostáváme řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, tato řada konverguje podle Leibnizova kritéria. Pro $x = \frac{1}{3}$ máme řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, která rovněž konverguje, výsledný obor konvergence je tedy $\left\langle -1, \frac{1}{3} \right\rangle$.
Vyšetřete obor konvergence mocninné řady:

41. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n} x^n$

42. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n5^n} (x-3)^n$

43. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n^n}$

44. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n5^n} (x+1)^n$

45. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x+4)^n}{4^n n}$

46. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$

47. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{\sin(n)}\right)^n$

48. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

49. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$

50. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$

1.5 Rozvoj funkce do mocninné řady

Vyjádření reálné funkce reálné proměnné jako řady

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n \qquad \forall x \in \mathcal{J}$$

nazýváme rozvojem funkce do mocninné řady se středem v bodě $a \in D_f$, kde interval $\mathcal{J}$ je takový, že $a \in \mathcal{J}^o$ (je z vnitřku intervalu) a $\mathcal{J} \subset D_f$. Jako $\mathcal{J}$ zpravidla uvažujeme největší interval s touto vlastností.

Rozvoje známých funkcí

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \quad \forall x \in (-1, 1\rangle$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \forall x \in (-1, 1)$$

Řešený příklad: Rozviňte do mocninné řady v bodě $a = 0$ funkci $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2-2x}{1+4x}\right)$.
Začneme určením definičního oboru, $x \neq -\frac{1}{4}$. Dle zavedení rozvoje funkce do mocninné řady,

hledáme tento rozvoj vždy na intervalu, který je podmnožinou definičního oboru, takového, že $a \in \mathcal{J}^o$. V našem případě budeme tedy hledat rozvoj nejvýše na intervalu $\left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$ (tedy nikoliv na $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{4}\}$). Dále budeme pokračovat pomocí derivace funkce.

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{2-2x}{1+4x}\right)^2} \frac{-2(1+4x)-4(2-2x)}{(1+4x)^2} = \frac{-10}{5+20x^2} = \frac{-2}{1+4x^2}$$
$$= -2\left(1+4x^2\right)^{-1} = -2\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{-1}{n}4^n x^{2n} = -2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n 4^n x^{2n}$$

Tento rozvoj by platil na $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ - tento interval bychom dostali řešením nerovnosti $-1 < 4x^2 < 1$, nesmíme však zapomenout na nedefinovanost původní funkce, a tedy i nedefinovanost její derivace v bode $x = -\frac{1}{4}$, rozvoj tedy platí na intervalu $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$. Rozvoj původní funkce dostaneme zintegrováním.

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2-2x}{1+4x}\right) = -2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-4)^n}{2n+1}x^{2n+1} + c$$

Dosazením nuly do obou stran rovnice dopočítáme konstantu $c = \operatorname{arctg}(2)$. Víme, že integrováním nezměním poloměr konvergence řady, jediné co je třeba vyšetřit je konvergence v krajních bodech intervalu. V bode $x = -\frac{1}{4}$ není funkce definována, má tedy smysl zkoumat chování řady pouze v bodě $x = \frac{1}{2}$. Dosazením dostaneme řadu

$$\operatorname{arctg}(2) - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1},$$

která zjevně konverguje podle Leibnizova kritéria. Výsledný obor konvergence je tedy $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\rangle$.

Rozviňte do mocninné řady v bodě $a = -1$

51. $f(x) = \ln(5+2x)$
52. $f(x) = x^3$
53. $f(x) = \sin(x)$

Rozviňte do mocninné řady v bodě $a = 0$

54. $f(x) = e^{-x^2}$
55. $f(x) = \frac{x^{10}}{1-x}$
56. $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$
57. $f(x) = \frac{2+x}{(1+2x)(1-x)}$
58. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-2x}}$
59. $f(x) = \sinh(x)$
60. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-2x}}$

61. $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
62. $f(x) = \arcsin(x)$
63. $f(x) = \mathrm{arccotg}(x)$
64. $f(x) = \mathrm{arctg}\left(\frac{2x}{2-x^2}\right)$
65. $f(x) = \arccos\left(1 - 2x^2\right)$
66. $f(x) = \ln^2(1-x)$
67. $f(x) = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
68. $f(x) = x\,\mathrm{arctg}(x) + \sqrt{1+x^2}$
69. $f(x) = e^x \cos(x)$
70. $f(x) = \sin(x)\cos(x)$