1 Konvergence řad

1.1 Řady s kladnými členy

Řešený příklad: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$

Nutná podmínka konvergence je zjevně splněna (exponenciála ve jmenovateli roste rychleji než libovolný polynom), vzhledem k n-té mocnině ve jmenovateli se nabízí Cauchyho kritérium - zkusíme tedy jeho limitní tvar.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{2\ln(n)}{n}}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Podle Cauchyho kritéria tedy řada konverguje.

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$
5. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$
6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$
7. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+3}\right)^{n^3}$
8. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2^n}$
9. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$
10. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Řešený příklad: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$

Pokud by v čitateli chyběl člen $(-1)^n$, příklad by byl velice jednoduchý (jedná se o geometrickou řadu, kterou dokonce umíme sečíst). Této skutečnosti se pokusíme využít - aplikujeme srovnávací kritérium:

$$\frac{2+(-1)^n}{2^n} \leq \frac{3}{2^n},$$

přičemž řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2^n}$ konverguje (a to k číslu $3(\frac{1}{1-0{,}5}-1)=3$). Řadu jsme tedy shora odhadli konvergentní řadou $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2^n}$, původní řada tedy rovněž konverguje.

Řešený příklad: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n-n^3}$

Opět tušíme, že řada bude konvergovat (člen n^3 ve jmenovateli roste oproti 3^n pomalu), nemůžeme však použít odhad řadou $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ - to je spodní odhad, pro důkaz konvergence bychom potřebovali odhad horní. Použijeme tedy limitní srovnávací kritérium a ke srovnání použijeme zmíněnou řadu.

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^n}{3^n-n^3}}{\frac{2^n}{3^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{3^n-n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{n^3}{3^n}} = 1$$

Podle limitního srovnávacího kritéria mají tyto dvě řady stejný charakter, jelikož řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n}$ konverguje (geometrická řada), konverguje i řada původní.

11. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1+\cos(n)}{2+\cos(n)}\right)^{2n-\ln(n)}$

12. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[n]{n^{10}}}{2^n+4^n}$

14. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{2^n+n^2}$

15. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n\sin^2(n)}{n^3+2}$

16. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\ln(n)}$

17. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

18. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^\alpha}$

Řešený příklad: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{e}-1)$

Nutná podmínka konvergence je splněna, limita sumandu je rovna nule. Nedává smysl sumu rozdělit na dvě - dostaneme dvě divergentní řady, jejichž rozdíl nám nic neřekne. Využijeme limitní srovnávací kritérium, výraz se chová jako výraz $\frac{1}{n}$, což vyplývá z referenční limity

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$. Referenční limity obecně budou mocným nástrojem při vyšetřování konvergence řad.

$$L=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt[n]{e}-1\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(e^{\frac{\ln(e)}{n}}-1\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}{\frac{1}{n}}=1$$

Původní řada má tedy z limitního srovnávacího kritéria stejný charakter jako řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, o které víme, že diverguje, původní řada tedy rovněž diverguje.

19. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[n]{e}-1\right)^2$

20. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[n]{2}-1\right)$

21. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[n]{2}-1\right)^n$

22. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

23. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

24. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

25. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

26. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$

27. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}}$

28. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{4.7\ldots(3n+1)}{2.6\ldots(4n-2)}$

29. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right)\left(\sqrt[n]{n}-1\right)$

30. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$

31. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$

32. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(n^{\frac{1}{n^2-1}}-1\right)$

33. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}$

34. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin\left(\frac{1}{3^n}\right)$

35. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}$

36. $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$

37. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (p \in \mathbb{R})$

38. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p \ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right) \quad (p \in \mathbb{R})$

39. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sin^\alpha\left(\frac{1}{n}\right)} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

40. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{e}-1\right)^\alpha n^\beta \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

1.2 Řady s obecnými členy

Řešený příklad: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n+1} \frac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}}$

Nejdříve ze všeho se zaměříme na absolutní konvergenci, tedy na zkoumání řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$. Je vidět, že řada má stejný charakter jako řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$, což by se formálně ukázalo limitním srovnávacím kritériem. Řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[100]{n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{100}}}$ diverguje, tudíž původní řada nekonverguje absolutně. Vyšetříme tedy neabsolutní konvergenci, jedná se o řadu se střídavými znaménky, takže by bylo lákavé použít Leibnizovo kritérium, výraz $\frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ má za limitu nulu, ale nezapomínejme na důležitý předpoklad Leibnizova kritéria a to, že tato posloupnost má být (alespoň od nějakého n_0) klesající. Ověření tohoto kritéria by bylo značně technické, proto zkusíme jiné kritérium, a to konkrétně Abelovo. Označíme $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ a $b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$. Podle předpokladů Abelova kritéria musí být řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergentní. Tato řada skutečně konvergentní je, a to podle Leibnizova kritéria - řada se střídavými znaménky a posloupnost $\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ je zjevně monotonní s limitou v nule. Dále musí být splněno, že $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ je monotonní a konvergentní posloupnost. Konvergentní zjevně je s limitou rovnou jedné a monotonii snadno ukážeme, konkrétně ukážeme, že posloupnost je ostře rostoucí:

$$\frac{n-1}{n+1} < \frac{n}{n+2} \Leftrightarrow n^2+n-2 < n^2+n \Leftrightarrow -2 < 0.$$

Původní řada tedy konverguje neabsolutně podle Abelova kritéria.

Řešený příklad: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ Nejprve vyřešíme absolutní konvergenci, řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ je řada s kladnými členy, ze znalosti referenční limity tušíme, že řada se chová jako řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, formálně z limitního srovnávacího kritéria,

$$L=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=1.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ diverguje a tedy původní řada nekonverguje absolutně. Udělejme si nyní představu, jak se chová člen $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, postupným dosazováním zjistíme, že znaménka se zde střídají takto $(+,-,-,+,+,-,-,+,+,-,-,\ldots)$, tedy vždy dvě kladná a následně dvě záporná. Neabsolutní konvergenci zkusíme dokázat pomocí Dirichletova kritéria. O posloupnosti $b_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ukážeme, že má omezenou posloupnost částečných součtů, tj.

$$(\exists K\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N})\left(\left|\sum_{k=1}^{n}b_k\right|\leq K\right).$$

Řekli jsme, že se jedná o posloupnost jedniček a minus jedniček, přičemž znaménko se mění vždy po dvou členech, součet libovolných n členů tedy nepřesáhne hodnotu 2. Stačí tedy ukázat, že posloupnost $a_n=\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ je monotonní s limitou v nule. Konvergence k nule jistě platí a ze znalosti průběhu funkce $\sin(x)$ (ta je na intervalu $(0,1\rangle$ ostře rostoucí, tedy $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ je ostře klesající na $\langle 1,+\infty)$) je zaručena i monotonie. Původní řada tedy konverguje neabsolutně podle Dirichletova kritéria.

41. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n)}$

42. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt[2]{n}}$

43. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$

44. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\binom{n}{2}}}{\ln(n+1)}$

45. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sqrt[n]{n}}{\ln(n)}$

46. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}e^{-n}\sin(n)$

47. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}\sin\frac{1}{n}$

48. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+1}\cos\frac{1}{n}$

49. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$

50. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin(n^2)$

51. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$

52. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n^2+n+1}$

53. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin^2(n)}{n}$

54. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

55. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

56. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{\ln(n)}$

57. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n^p} \quad (p \in \mathbb{R})$

58. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}-1}{n^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

59. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+n^\alpha)}{n^\beta} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

60. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(-1)^{n+1}n+1}$ (Uzávorkování)