Matematická analýza 2 - Sbírka příkladů

28. března 2024

Obsah

Předmluva

Drahý studente, držíš v rukou sbírku příkladů pro letní semestr prvácké jaderňácké analýzy, kterou jsem dostal za úkol vytvořit v letním semestru 2020. V tomto semestru se probíraly nejprve integrály následované řadami a Taylorovým polynomem. Na rozdíl od tradiční literatury [1, 2] jsem si kladl za úkol, aby příklady měly vzestupnou obtížnost a současně jsem se snažil obsáhnout co nejvíce řešených příkladů. Achillovou patou sbírky je absence správných řešení. Autor bude potěšen, pokud by se našel někdo, kdo by tuto nedokonalost odstranil, na druhou stranu výpočet primitivních funkcí se dá zkontrolovat zpětným zderivováním či pomocí softwaru stejně jako Taylorův polynom a u konvergence řad jde především o zdůvodnění a až v druhé řadě o to, zdali řada konverguje či diverguje. Stejně tak bude autor rád, pokud bude příkladů ve sbírce přibývat - ať už těch řešených nebo neřešených. Pevně věřím, že tato sbírka nadcházejícím generacím matematických analytiků alespoň částečně pomůže, když už k ničemu jinému, tak aspoň ke zdolání předmětu matematická analýza 2. A nezapomeň - u primitivní funkce je vždy třeba udat i interval!

1. září 2022 Jakub Kořenek

1 Primitivní funkce

Základní příklady

Řešený příklad: $\int \left(3-x^2\right)^3 \mathrm{d}x$

$$\int \left(3-x^2\right)^3 \mathrm{d}x = \int \left(27-27x^2+9x^4-x^6\right) \mathrm{d}x = 27x-9x^3+\frac{9}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7$$

Integrand je funkce spojitá na celém $\mathbb{R}$, primitivní funkci jsme tedy našli na tomto intervalu.

1. $\int (1-x)(1-2x)(1-3x)\mathrm{d}x$
2. $\int \left(1-x+x^2\right)^2 \mathrm{d}x$
3. $\int x^2(5-x)^4\mathrm{d}x$
4. $\int \frac{x^3+1}{x+1}\mathrm{d}x$

Řešený příklad: $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$

$$\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \int \left(\frac{1-2x+x^2}{x^2}\right) \mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x + \int 1\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} - 2\ln|x| + x$$

Integrand je funkce spojitá na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, primitivní funkci jsme tedy našli na intervalu $(-\infty, 0)$ a na intervalu $(0, +\infty)$ - nikoliv na sjednocení těchto intervalů.

5. $\int \frac{x^2+3}{x^2+1}\mathrm{d}x$
6. $\int \frac{(1-x)^3}{x\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$
7. $\int \frac{\left(\sqrt{2x}-\sqrt[3]{3x}\right)^2}{x}\mathrm{d}x$
8. $\int \left(2^x+3^x\right)^2 \mathrm{d}x$
9. $\int \sinh x\mathrm{d}x$
10. $\int \frac{1}{\sqrt{4-x}}\mathrm{d}x$
11. $\int \sqrt[3]{1+2x}\mathrm{d}x$
12. $\int e^{-3x}+\frac{1}{2-x}\mathrm{d}x$
13. $\int \sin(3x)+\cos(2x)+68\mathrm{d}x$
14. $\int \mathrm{cotg}^2 x\mathrm{d}x$
15. $\int \frac{1}{\cos^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}\mathrm{d}x$

1.1 Příklady na zespojitění

Řešený příklad: Vypočtěte $\int \sqrt{x^2 - 2x + 1}\mathrm{d}x$

$$\int \sqrt{x^2 - 2x + 1}\mathrm{d}x = \int \sqrt{(x-1)^2}\mathrm{d}x = \int |x-1|\mathrm{d}x$$

Primitivní funkci určíme zvlášť na intervalech $(-\infty, 1)$ a $(1, +\infty)$.

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + x + c_1 & x \in (-\infty, 1) \\ \frac{x^2}{2} - x + c_2 & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Integrand je funkce spojitá na celém $\mathbb{R}$, primitivní funkci tedy hledáme na tomto intervalu. Primitivní funkce je z definice spojitá na celém definičním oboru, funkci $F(x)$ je tedy třeba zespojitit vhodnou volbou konstant c_1 a c_2. Limitním přechodem x jdoucí k 1 zleva a zprava dostáváme rovnici,

$$\frac{1}{2} + c_1 = -\frac{1}{2} + c_2.$$

Primitivní funkce má tedy na $\mathbb{R}$ tvar

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} & x \in (-\infty, 1\rangle \\ \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{2} & x \in \langle 1, +\infty). \end{cases}$$

16. $\int \sqrt{x^2 + 4x + 4}\mathrm{d}x$
17. $\int (x^2 - |2x - 1|)\mathrm{d}x$
18. $\int f(x)\mathrm{d}x; \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x \geq 1 \\ \frac{1}{\sqrt{1+x}} & x \in \langle 0, 1) \\ \frac{1}{1+x^2} & x < 0 \end{cases}$
19. $\int \max\{-x, \operatorname{arctg}(x)\}\mathrm{d}x$
20. $\int \sqrt{1 - \sin(2x)}\mathrm{d}x$ (na $\mathbb{R}$)

1.2 Metoda substituce

Řešený příklad: $\int \frac{x}{3-2x^2}\mathrm{d}x$

Nejprve určíme obor spojitosti integrandu, $3 - 2x^2 \neq 0$, tedy $x \neq \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$. Primitivní funkci hledáme na intervalech $\left(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$, $\left(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\right)$ a $\left(\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty\right)$.

$$\int \frac{x}{3-2x^2}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} 3 - 2x^2 = y \\ -4x\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{array} \right| = -\frac{1}{4}\int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = -\frac{1}{4}\ln|y| = -\frac{1}{4}\ln|3 - 2x^2|$$

21. $\int \frac{x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$
22. $\int \frac{x}{4+x^4}\mathrm{d}x$

23. $\int \frac{x^3}{x^8-1}\mathrm{d}x$

24. $\int \frac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}\mathrm{d}x$

25. $\int \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$

26. $\int \frac{1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}\mathrm{d}x$

27. $\int \frac{e^x}{2+e^x}\mathrm{d}x$

28. $\int \frac{1}{x\ln(x)\ln(\ln(x))}\mathrm{d}x$

29. $\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\mathrm{d}x$

30. $\int \frac{1}{\mathrm{sinh} x}\mathrm{d}x$

31. $\int \frac{1}{\sqrt{e^{2x}+1}}\mathrm{d}x$

Řešený příklad: $\int \sin(x)\cos^3(x)\mathrm{d}x$

$$\int \sin(x)\cos^3(x)\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} \cos^2(x) = y \\ -2\cos(x)\sin(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{array} \right| = -\frac{1}{2}\int y\mathrm{d}y = -\frac{1}{4}y^2 = -\frac{1}{4}\cos^4(x)$$

Integrand je funkce spojitá na celém $\mathbb{R}$, primitivní funkci jsme tedy našli na tomto intervalu.

32. $\int \cos(x)\sin^5(x)\mathrm{d}x$

33. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^3(x)}}\mathrm{d}x$

34. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos(2x)}}\mathrm{d}x$

35. $\int \frac{\sin(x)\cos^3(x)}{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x$

1.3 Metoda per partes

Řešený příklad: $\int x^2\cos(x)\mathrm{d}x$

Primitivní funkci hledáme na celém $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}\int x^2\cos(x)\mathrm{d}x &= x^2\sin(x) - 2\int x\sin(x)\mathrm{d}x = x^2\sin(x) - 2\left(-x\cos(x) + \int \cos(x)\mathrm{d}x\right) \\ &= (x^2-2)\sin(x) + 2x\cos(x)\end{aligned}$$

36. $\int x^3\sin(x)\mathrm{d}x$

37. $\int x\ln^2(x)\mathrm{d}x$

38. $\int \mathrm{arctg}(x)\mathrm{d}x$

39. $\int x\mathrm{sinh}(x)\mathrm{d}x$

40. $\int x\operatorname{arctg}(x)\mathrm{d}x$

41. $\int x\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\mathrm{d}x$

42. $\int \frac{\arcsin(x)}{x^2}\mathrm{d}x$

Řešený příklad: $\int \frac{\cos(x)}{e^x}\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos x}{e^x}\mathrm{d}x &= \int e^{-x}\cos(x)\mathrm{d}x = e^{-x}\sin(x) + \int e^{-x}\sin(x)\mathrm{d}x \\ &= e^{-x}\sin(x) - e^{-x}\cos(x) - \int e^{-x}\cos(x)\mathrm{d}x \\ &= e^{-x}\sin(x) - e^{-x}\cos(x) - \int \frac{\cos x}{e^x}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Převedením posledního členu na levou stranu rovnice dostáváme rovnost

$$2\int \frac{\cos x}{e^x}\mathrm{d}x = e^{-x}\sin(x) - e^{-x}\cos(x),$$

na celém $\mathbb{R}$ jsme tedy našli primitivní funkci

$$\int \frac{\cos x}{e^x}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(e^{-x}\sin(x) - e^{-x}\cos(x)\right).$$

43. $\int \sin(x)\sinh(x)\mathrm{d}x$

44. $\int \sin(\ln(x))\mathrm{d}x$

45. $\int e^{2x}\sin^2(x)\mathrm{d}x$

1.4 Racionální funkce

Řešený příklad: $\int \frac{x^4+2x^3+3x^2+x+1}{(x^2+1)(x+1)x^2}\mathrm{d}x$ Integrand je funkce spojitá na $\mathbb{R}\setminus\{-1,0\}$, primitivní funkci budeme hledat na dílčích intervalech. V čitateli máme polynom stupně 4, ve jmenovateli polynom stupně 5, postupujeme tedy rozkladem na parciální zlomky ve tvaru

$$\frac{x^4+2x^3+3x^2+x+1}{(x^2+1)(x+1)x^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{x} + \frac{E}{x^2}.$$

Sečtením pravé strany a porovnání koeficientů u jednotlivých mocnin x na levé a pravé straně rovnice dostaneme soustavu pěti rovnic o pěti neznámých s řešením $A = 0, B = 1, C = 1, D = 0, E = 1$.

$$\int \frac{x^4+2x^3+3x^2+x+1}{(x^2+1)(x+1)x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = \operatorname{arctg}(x) + \ln(|x+1|) - \frac{1}{x}$$

Výsledný tvar je primitivní funkcí k funkci původní na intervalech $(-\infty,-1)$, $(-1,0)$ a $(0,+\infty)$.

46. $\int \frac{2x+3}{(x-2)(x+5)} \mathrm{d}x$

47. $\int \frac{x^3+1}{(x^3-5x^2+6x)} \mathrm{d}x$

48. $\int \frac{x^4}{x^2+x-2} \mathrm{d}x$

49. $\int \frac{1}{(x-1)^2(x-2)^2(x-3)} \mathrm{d}x$

50. $\int \frac{x}{x^8-1} \mathrm{d}x$

51. $\int \frac{1}{(x^2+2x+3)^2} \mathrm{d}x$

52. $\int \left(\frac{x^2}{x^2+4x+5}\right)^2 \mathrm{d}x$

53. $\int \frac{x^3}{x^8+3} \mathrm{d}x$

54. $\int \frac{x^3+7x^2+4x+10}{(x^4+5x^2+4)} \mathrm{d}x$

Řešený příklad: $\int \frac{x+1}{x^2+x+1} \mathrm{d}x$

$$\int \frac{x+1}{x^2+x+1} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+x+1} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{x^2+x+1} \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2+x+1} \mathrm{d}x$$

V prvním kroku potřebujeme do čitatele dostat derivaci jmenovatele, toho jsme dosáhli vynásobením chytrou jedničkou $\frac{2}{2}$ a rozdělením na dva integrály. Výpočet prvního integrálu je již snadný, zaměřme se tedy na výpočet druhého integrálu.

$$\int \frac{1}{x^2+x+1} \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} \mathrm{d}x = \frac{4}{3} \int \frac{1}{\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1} \mathrm{d}x = \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} \mathrm{d}x$$

Doplněním jmenovatele na čtverec a následným vytknutím konstanty jsme dostali integrál do povědomého tvaru vedoucího na arctg. Dále postupujeme substitucí $y = \frac{2x+1}{\sqrt{3}}$, $\mathrm{d}y = \frac{2}{\sqrt{3}} \mathrm{d}x$.

$$\frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} \mathrm{d}x = \frac{4}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{1}{y^2+1} \mathrm{d}y = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}(y)$$

Řešení původního integrálu na celém $\mathbb{R}$ je tedy

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^2+x+1} \mathrm{d}x &= \frac{4}{3} \int \frac{1}{\frac{4}{3}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1} \mathrm{d}x = \frac{4}{3} \int \frac{1}{\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2} \ln |x^2+x+1| + \frac{\sqrt{3}}{3} \operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

55. $\int \frac{1}{x^2-x+1} \mathrm{d}x$

56. $\int \frac{2x+2}{x^2+x+4}\mathrm{d}x$

57. $\int \frac{4x+3}{x^2+x+3}\mathrm{d}x$

Řešený příklad: $\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$

K výpočtu použijeme následující trik (který je vhodné si zapamatovat), vyjdeme se znalosti primitivní funkce k $\mathrm{arctg}x$ a následně použijeme metodu per partes.

$$\begin{aligned}\mathrm{arctg}(x) &= \int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int 1.\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{x^2+1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x - 2\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2\mathrm{arctg}(x) - 2\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Z rovnice vyjádříme požadovaný integrál

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{1+x^2} + \mathrm{arctg}(x)\right).$$

58. $\int \frac{1}{(x^2-x+1)^2}\mathrm{d}x$

59. $\int \frac{1}{(x^2+2x+3)^2}\mathrm{d}x$

60. $\int \frac{x^2}{(x^2+2x+2)^2}\mathrm{d}x$

1.5 Integrály typu $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$

V integrálech tohoto typu pomůže substituce $y = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Řešený příklad: $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[2]{x}}\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}+\sqrt{x}}\mathrm{d}x &= \left|\begin{array}{c}\sqrt[4]{x} = y \\ x = y^4 \\ \mathrm{d}x = 4y^3\mathrm{d}y\end{array}\right| = 4\int \frac{y^3}{y+y^2}\mathrm{d}y = 4\int \frac{y^2}{1+y}\mathrm{d}y = \left|\begin{array}{r} y+1 = z \\ \mathrm{d}y = \mathrm{d}z\end{array}\right| \\ &= 4\int \frac{(z-1)^2}{z}\mathrm{d}z = 4\int z - 2 + \frac{1}{z}\mathrm{d}z = 2z^2 - 8z + 4\ln|z| \\ &= 2\sqrt{x} - 4\sqrt[4]{x} + 4\ln|\sqrt[4]{x}+1| + 6\end{aligned}$$

Primitivní funkci jsme našli na intervalu $(0, +\infty)$.

61. $\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

62. $\int \frac{\sqrt{x}+1}{x^2-\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

63. $\int \frac{1}{(1+\sqrt[4]{x})^3\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

64. $\int \frac{1}{\sqrt[6]{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}\mathrm{d}x$

65. $\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$

66. $\int \frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}\mathrm{d}x$

67. $\int \frac{1+\sqrt[6]{x}}{\sqrt[3]{x}-\sqrt[4]{x}\sqrt[4]{x^3}}\mathrm{d}x$

68. $\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\mathrm{d}x$

69. $\int x\sqrt{\frac{x+2}{x-3}}\mathrm{d}x$

70. $\int \frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}\mathrm{d}x$

1.6 Integrály typu $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx$

Pro tento typ úlohy pomohou Eulerovy substituce

- $a > 0$: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \pm\sqrt{a}x + t$
- $c > 0$: $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$
- Má-li výraz pod odmocninou reálné kořeny, tj. existují α a $\beta \in \mathbb{R}$ tak, že $ax^2+bx+c = a(x-\alpha)(x-\beta)$: $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-\alpha)(x-\beta)} = t(x-\alpha)$.

Výrazným zjednodušením však může být převod na "známé"integrály

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x = \arcsin(x) \text{ na } (-1,1),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{d}x = \ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| = \operatorname{argsinh}(x) \text{ na } \mathbb{R},$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\mathrm{d}x = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| = \operatorname{sgn}(x)\operatorname{argcosh}(|x|) \text{ na } (-\infty,-1) \text{ a } (1,+\infty).$$

Řešený příklad: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+3}}\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x+3}}\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(x-1)^2+1}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2+1}}\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c}\frac{x-1}{\sqrt{2}} = y \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}y\end{array}\right| = \int \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}\mathrm{d}y \\ &= \operatorname{argsinh}(y) = \operatorname{argsinh}\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

Integrand je funkce spojitá na celém $\mathbb{R}$, primitivní funkci jsme tedy našli na $\mathbb{R}$.

71. $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}\mathrm{d}x$

72. $\int \frac{1}{\sqrt{2x^2-x+2}}\mathrm{d}x$

73. $\int \frac{x}{\sqrt{1-3x^2-2x^4}}\mathrm{d}x$

74. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x$

75. $\int \sqrt{2+x-x^2}\mathrm{d}x$

76. $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x+x^2}}\mathrm{d}x$

77. $\int \frac{x+x^3}{\sqrt{1+x^2-x^4}}\mathrm{d}x$

Řešený příklad: $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\mathrm{d}x$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}-x}\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{rl} \sqrt{x^2+1} &= x+t \\ x^2+1 &= x^2+2tx+t^2 \\ x &= \frac{1-t^2}{2t} \\ \mathrm{d}x &= \frac{-t^2-1}{2t^2}\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{1}{t}\frac{(-t^2-1)}{2t^2}\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{t}\mathrm{d}t - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t^3}\mathrm{d}t$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|t| + \frac{1}{4}t^{-2} = -\frac{1}{2}\ln|\sqrt{x^2+1}-x| + \frac{1}{4}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)^{-2}$$

Primitivní funkci jsme našli na celém $\mathbb{R}$.

78. $\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x$

79. $\int \frac{1}{1+\sqrt{1-2x-x^2}}\mathrm{d}x$

80. $\int x\sqrt{x^2-2x+2}\mathrm{d}x$

1.7 Integrály typu $\int R(\sin x, \cos x)dx$

Připomeňme, že v tomto typu integrálů, tj. z racionální funkce dvou proměnných $\sin(x)$ a $\cos(x)$, vždy pomůže substituce $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = y$, pro $x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$ $k \in \mathbb{Z}$.

Omezíme se na základní interval $x \in (-\pi, \pi)$ a položíme $y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$,

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \Rightarrow y^2 = \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)},$$

odtud

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{y^2}{1+y^2}, \quad \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1+y^2}.$$

Jelikož $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ je na intervalu $(-\pi, \pi)$ kladný, platí vztah

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}},$$

$\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ má na tomto intervalu stejné znaménko jako $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, platí tedy

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}.$$

Poznamenejme, že kdybychom se omezili například na interval $(\pi, 3\pi)$, dostali bychom pro $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ i $\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ obdobné vztahy, ale se znaménkem minus. Výrazy $\sin(x)$ a $\cos(x)$ jsou však už v jednotném tvaru pro všechna $x \in (-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$, jak se pozorný čtenář sám jistě přesvědčí. Pro vyjádření $\sin(x)$ a $\cos(x)$ použijeme vzorečky pro dvojnásobný úhel,

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\frac{1}{\sqrt{1+y^2}} = \frac{2y}{1+y^2} \\
\cos(x) &= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{1+y^2} - \frac{y^2}{1+y^2} = \frac{1-y^2}{1+y^2}.
\end{aligned}$$

Zbývá dopočítat $\mathrm{d}x$,

$$\mathrm{d}y = \frac{1}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\frac{1}{2}\mathrm{d}x = \frac{y^2+1}{2}\mathrm{d}x,$$

tedy

$$\mathrm{d}x = \frac{2}{y^2+1}\mathrm{d}y.$$

Řešený příklad: $\int \frac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}\mathrm{d}x$

Využijeme připravenou substituci,

$$\begin{aligned}
1+\sin(x) &= 1 + \frac{2y}{1+y^2} = \frac{y^2+2y+1}{1+y^2} \\
1+\cos(x) &= 1 + \frac{1-y^2}{1+y^2} = \frac{2}{1+y^2} \\
\mathrm{d}x &= \frac{2}{1+y^2}\mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

odtud

$$\begin{aligned}
\int \frac{1+\sin(x)}{1+\cos(x)}\mathrm{d}x &= \int \frac{y^2+2y+1}{1+y^2}\mathrm{d}y = \int 1\mathrm{d}y + \int \frac{2y}{1+y^2}\mathrm{d}y = y + \ln|1+y^2| \\
&= \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) + \ln|1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)|.
\end{aligned}$$

Integrand je funkce spojitá na každém intervalu $(-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi)$ $k \in \mathbb{Z}$, primitivní funkci jsme tedy našli na těchto intervalech.

Substituci $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = y$ lze využít vždy, v závislosti na konkrétní podobě integrandu lze využít následující substituce, při jejichž použití přejde integrand na racionální funkci s nižšími mocninami y, než v případě univerzální substituce $\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)=y$.

$$\begin{aligned} R(-\sin(x),\cos(x)) &= -R(\sin(x),\cos(x)) \Rightarrow \cos(x)=y\\ R(\sin(x),-\cos(x)) &= -R(\sin(x),\cos(x)) \Rightarrow \sin(x)=y\\ R(-\sin(x),-\cos(x)) &= R(\sin(x),\cos(x)) \Rightarrow \mathrm{tg}(x)=y \end{aligned}$$

V poslední substituci $\mathrm{tg}(x)=y$ by se podobným způsobem jako v případě substituce $\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)=y$ odvodily následující vztahy (pro $x\in\left(-\frac{\pi}{2}+k\pi,\frac{\pi}{2}+k\pi\right)$), $\sin^2(x)=\frac{y^2}{1+y^2}$, $\cos^2(x)=\frac{1}{1+y^2}$, $\mathrm{d}x=\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y$.

Řešený příklad:$\int\cos^2(x)\sin^3(x)\mathrm{d}x$

$$\int\cos^2(x)\sin^3(x)\mathrm{d}x=\left|\begin{array}{c} y=\cos(x)\\ \mathrm{d}y=-\sin(x)\mathrm{d}x\end{array}\right|=-\int y^2(1-y^2)\mathrm{d}x=\frac{y^5}{5}-\frac{y^3}{3}=\frac{\cos^5(x)}{5}-\frac{\cos^3(x)}{3}$$

Primitivní funkci jsme našli na $\mathbb{R}$.

81. $\int\frac{1}{\sin(x)}\mathrm{d}x$
82. $\int\frac{1}{\cos(x)}\mathrm{d}x$
83. $\int\cos^5(x)\mathrm{d}x$
84. $\int\frac{1}{\sin^3(x)}\mathrm{d}x$
85. $\int\sin^2(x)\cos^3(x)\mathrm{d}x$
86. $\int\frac{\sin^3(x)}{\cos^4(x)}\mathrm{d}x$
87. $\int\frac{1}{\sin(x)\cos^4(x)}\mathrm{d}x$
88. $\int\sin^6(x)\mathrm{d}x$
89. $\int\frac{\sin(x)}{3+\cos(x)}\mathrm{d}x$
90. $\int\frac{1}{\sin(x)+\cos^2(x)}\mathrm{d}x$
91. $\int\frac{1}{(2+\cos(x))\sin(x)}\mathrm{d}x$
92. $\int\frac{\sin^2(x)}{1+\sin^2(x)}\mathrm{d}x$
93. $\int\frac{1}{1+\mathrm{tg}(x)}\mathrm{d}x$
94. $\int\frac{1+\mathrm{tg}(x)}{\sin(2x)}\mathrm{d}x$
95. $\int\frac{1}{2+3\cos^2(x)}\mathrm{d}x$

1.8 Další příklady k procvičení

96. $\int \frac{(x^2+1)^2}{x^2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

97. $\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

98. $\int \frac{x}{x^6-1}\mathrm{d}x$

99. $\int \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sqrt[3]{\sin(x)-\cos(x)}}\mathrm{d}x$

100. $\int \frac{1}{\sin^2(x)+\cos(x)}\mathrm{d}x$

101. $\int \frac{e^x+1}{(e^x-1)(e^{2x}-e^2)}\mathrm{d}x$

102. $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\mathrm{d}x$

103. $\int \cos^5(x)\mathrm{d}x$

104. $\int \sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x$

105. $\int \frac{1}{\sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}\mathrm{d}x$

106. $\int \frac{1+\mathrm{tg}(x)}{\sin(2x)}\mathrm{d}x$

107. $\int \frac{\cos^3(x)}{\sqrt[3]{\sin(x)}}\mathrm{d}x$

108. $\int \frac{x}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$

109. $\int \frac{1}{\sqrt{3-5x^2}}\mathrm{d}x$

110. $\int \frac{1}{1+e^x}\mathrm{d}x$

111. $\int \frac{e^x}{(e^x+2)(e^{2x}-1)}\mathrm{d}x$

112. $\int \frac{1}{a^2+x^2}\mathrm{d}x$

113. $\int \sin^2(x)\mathrm{d}x$

114. $\int \frac{1}{(5x-2)^{\frac{5}{2}}}\mathrm{d}x$

115. $\int \frac{(2-x)^2}{2-x^2}\mathrm{d}x$

116. $\int \frac{3x+1}{x^2+x-2}\mathrm{d}x$

117. $\int x^3(1-5x^2)^{10}\mathrm{d}x$

118. $\int x^3e^{-x^2}\mathrm{d}x$

119. $\int \ln(x+\sqrt{x^2-1})\mathrm{d}x$

120. $\int x^2\sin(2x)\mathrm{d}x$

121. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x$

122. $\int \mathrm{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$

123. $\int \frac{1}{\cos^3(x)}\mathrm{d}x$

124. $\int \sin^4(x)\mathrm{d}x$

125. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}}\mathrm{d}x$

126. $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\mathrm{d}x$

127. $\int \frac{\sqrt{x^4+x^{-4}+2}}{x^3}\mathrm{d}x$

128. $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\mathrm{d}x$

129. $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}\mathrm{d}x$

130. $\int \frac{\sqrt[5]{1-2x+x^2}}{1-x}\mathrm{d}x$

131. $\int \frac{1}{\cosh x}\mathrm{d}x$

132. $\int \frac{\sin(x)-\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\mathrm{d}x$

133. $\int \frac{x^2}{x^2+x+1}\mathrm{d}x$

134. $\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x})}\mathrm{d}x$

135. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+2x+1}}\mathrm{d}x$

136. $\int \sqrt{x^2-x+\frac{1}{4}}\mathrm{d}x$

137. $\int \cos^3(x)\mathrm{d}x$

138. $\int \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}\mathrm{d}x$

139. $\int \sqrt{x^4+x^3}\mathrm{d}x$

140. $\int \left(\frac{\ln(x)}{x}\right)^2\mathrm{d}x$

2 Určitý integrál a jeho aplikace

2.1 Základní příklady

Řešený příklad: $\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos(x)}\,\mathrm{d}x$

Z přednášky víme, že na tento typ integrálu zabere substituce $y = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$, tato substituce lze použít na intervalech $(-\pi + k\pi, \pi + k\pi)$, integrál si tedy rozdělíme na intervaly, kde lze tato substituce použít. Již víme, že při této substituci platí vztahy $\cos(x) = \frac{1-y^2}{1+y^2}$ a $\mathrm{d}x = \frac{2}{y^2+1}\mathrm{d}y$.

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{1}{2+\cos(x)}\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} \frac{1}{2+\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{r} y = \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right) \\ \mathrm{tg}\left(\frac{2\pi}{2}\right) = \mathrm{tg}(0) = 0 \\ \lim_{x\to\pi^-} \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = +\infty \\ \lim_{x\to\pi^+} \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = -\infty \end{array} \right| =$$

$$2\int_0^{+\infty} \frac{1}{3+y^2}\,\mathrm{d}y + 2\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{3+y^2}\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+\left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{d}y = \left| \begin{array}{c} \frac{y}{\sqrt{3}} = z \\ \mathrm{d}y = \sqrt{3}\mathrm{d}z \end{array} \right| =$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}z = \frac{2}{\sqrt{3}}\left[\mathrm{arctg}(z)\right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\pi$$

Řešený příklad:$\int_1^3 \frac{x}{\lfloor x \rfloor}\,\mathrm{d}x$

Problematickým prvkem je v tomto příkladu dolní celá část, s tímto problémem se vypořádáme vyjádřením této funkce na dílčích intervalech.

$$\int_1^3 \frac{x}{\lfloor x\rfloor}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 \frac{x}{\lfloor x\rfloor}\,\mathrm{d}x + \int_2^3 \frac{x}{\lfloor x\rfloor}\,\mathrm{d}x = \int_1^2 x\,\mathrm{d}x + \int_2^3 \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_2^3 = \frac{3}{2} + \frac{5}{4} = \frac{11}{4}$$

1. $\int_{-1}^{8} \sqrt[3]{x}\,\mathrm{d}x$
2. $\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\sin(x)}\,\mathrm{d}x$
4. $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
5. $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$
6. $\int_0^4 |2-x|\,\mathrm{d}x$
7. $\int_0^{\ln 2} xe^{-x}\,\mathrm{d}x$
8. $\int_0^{\pi} x\sin(x)\,\mathrm{d}x$
9. $\int_0^{2\pi} x^2\cos(x)\,\mathrm{d}x$

10. $\int_0^1 \arccos(x)\,\mathrm{d}x$
11. $\int_0^{\sqrt{3}} x\mathrm{arctg}(x)\,\mathrm{d}x$
12. $\int_{e^{-1}}^{e} |\ln(x)|\,\mathrm{d}x$
13. $\int_{-1}^{1} \frac{x}{\sqrt{5-4x}}\,\mathrm{d}x$
14. $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$
15. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,\mathrm{d}x$
16. $\int_0^1 \frac{\arcsin(\sqrt{x})}{\sqrt{x(1-x)}}\,\mathrm{d}x$
17. $\int_0^1 x(2-x^2)^{12}\,\mathrm{d}x$
18. $\int_{-1}^{1} \frac{x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$
19. $\int_0^1 \ln(x)\,\mathrm{d}x$
20. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
21. $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$
22. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x$
23. $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{arctg(x)}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$
24. $\int_0^3 \mathrm{sgn}(x-x^3)\,\mathrm{d}x$
25. $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x$

2.2 Výpočet obsahu rovinných ploch

Vypočtěte obsahy následujících rovinných ploch vymezených následujícími křivkami

26. $y = 2x - x^2,\ x + y = 0$
27. $y = |\log(x)|,\ y = 0,\ x = 10,\ x = 0,1$
28. $y = 2^x,\ y = 2,\ x = 0$
29. $y = \frac{1}{x},\ y = \frac{1}{x^2},\ x = 2$
30. $y^2 = 2x + 1,\ x - y - 1 = 0$
31. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
32. $y^2 = x^2(1 - x^2)$
33. $y = \frac{1}{1+x^2},\ y = 0$
34. $y = x,\ y = x + \sin^2(x)\ \ (0 \le x \le \pi)$
35. $y^2 = \frac{x^3}{2-x}\ (0 \le x \le 2)$ (Náhrada za původní $y = e^{-x}|\sin(x)|,\ y = 0\ \ (x \ge 0)$ - moc těžké)

2.3 Integrál jako limita posloupnosti

Řešený příklad: $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)$.

V prvním kroku součet zapíšeme pomocí sumy.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n\left(1+\frac{k}{n}\right)}=$$
$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\frac{1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\Delta_k$$

Při posloupnosti rozdělení $\sigma_n=\{\frac{0}{n},\frac{1}{n},\ldots,\frac{n}{n}\}$ a volbě $\xi_k=x_k=\frac{k}{n}$ se jedná o integrální součet funkce $f(x)=\frac{1}{1+x}$. Limitním přechodem dostáváme integrál

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{n+n}\right)=\int\limits_0^1\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x=[\ln(1+x)]_0^2=\ln(2).$$

36. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\ldots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)$

37. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\sqrt{\frac{n+1}{n}}+\sqrt{\frac{n+2}{n}}+\ldots+\sqrt{\frac{n+n}{n}}\right)$

38. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1^p+2^p+\ldots+n^p}{n^{p+1}}\quad(p>0)$

39. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1^3}{n^4}+\frac{2^3}{n^4}+\frac{3^3}{n^4}+\ldots+\frac{(4n)^3}{n^4}\right)$ $\left(\text{modifikace: }\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1^3}{n^4}+\frac{2^3}{n^4}+\frac{3^3}{n^4}+\ldots+\frac{(4n-1)^3}{n^4}\right)\right)$

40. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\ldots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$

41. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\ldots(2n)}}{n}$

42. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2^{\frac{1}{n}}}{n+1}+\frac{2^{\frac{2}{n}}}{n+\frac{1}{2}}+\ldots+\frac{2^{\frac{n}{n}}}{n+\frac{1}{n}}\right)$ (nápověda: limita sevřené posloupnosti)

2.4 Integrál jako funkce horní meze

Nechť f je integrovatelná na intervalu $\langle a,b\rangle$. Funkce $F:\langle a,b\rangle\to\mathbb{R}$ definovaná předpisem $F(x)=\int_a^x f$ je spojitá na $\langle a,b\rangle$. Je-li funkce f spojitá v bodě $x_0\in\langle a,b\rangle$, je funkce F diferencovatelná v bodě x_0 a platí $F'(x_0)=f(x_0)$.

Příklad: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x\sin(t)\,\mathrm{d}t=\sin(x)$

Modifikujme nyní příklad do podoby $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\sin(t)\,\mathrm{d}t=?$

Výraz $\int_0^{x^2}\sin(t)\,\mathrm{d}t$ odpovídá výrazu $F(x^2)$. Obecně (pokud existuje derivace g):

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(g(x))=(F(g(x)))'=F'(g(x))g'(x)=f(g(x))g'(x),$$

v našem případě tedy

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int\limits_0^{x^2} \sin(t)\,\mathrm{d}t = \sin(x^2)2x.$$

43. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \operatorname{arctg}(t)\,\mathrm{d}t$

44. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^3} (1-t)\,\mathrm{d}t$

45. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{-\sin(x)}^0 (1+t^2)\,\mathrm{d}t$

46. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_2^{\operatorname{tg}(x)} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

47. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\sin(x)}^{\cos(x)} \cos(\pi t^2)\,\mathrm{d}t$

48. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x \cos(t^2)\,\mathrm{d}t}{x}$

49. $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\int_0^x \operatorname{arctg}^2(t)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x^2+1}}$

50. $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\int_0^{\sin(x)} \sqrt{\operatorname{tg}(t)}\,\mathrm{d}t}{\int_0^{\operatorname{tg}(x)} \sqrt{\sin(t)}\,\mathrm{d}t}$

2.5 Délka grafu funkce

Nechť funkce f má spojitou derivaci na intervalu $\langle a,b\rangle$, pak délka L grafu funkce $y = f(x)$, $x \in \langle a,b\rangle$, je rovna

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Vypočtěte délku grafu následujících křivek v $\mathbb{R}^2$

51. $y = \sqrt{x}$ $(0 \le x \le 1)$

52. $y = x^2 + 2x + 3$ $(0 \le x \le 1)$

53. $y = \ln(x)$ $(\sqrt{3} \le x \le \sqrt{8})$

54. $y^2 = 2x$ $(0 \le x \le x_0)$

55. $y = \cosh(x)$ $(0 \le x \le x_0)$

56. $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1$ (asteroida)

57. $x^2 + y^2 = R^2$ (kružnice s poloměrem R)

2.6 Výpočet objemu těles

Nechť f je funkce spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak objem rotačního tělesa, které vznikne rotací grafu funkce f kolem osy x, je

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vypočtěte objemy těles ohraničených plochami, které vzniknou rotací následujících křivek kolem osy x.

58. $y = \sqrt{x} \quad (0 \leq x \leq 1)$
59. $y = \frac{1}{1+x^2},\ y = 0 \quad (-1 \leq x \leq 1)$
60. $y = e^{-x},\ y = 0 \quad (0 \leq x \leq +\infty)$
61. $y = \cos(x),\ y = 2\cos(x) \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$
62. $x^2 - xy + y^2 = 1$
63. $y = e^x - 1,\ y = 2,\ x = 0$
64. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

2.7 Výpočet povrchu rotačních ploch

Nechť funkce f má spojitou derivace f' na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak plášť tělesa vzniklého rotací grafu funkce je

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

Vypočtěte povrchy ploch vzniklých rotací následujících křivek podle osy x.

65. $y = \mathrm{tg}(x) \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}\right)$
66. $y = \frac{1}{x} \quad (1 \leq x \leq 2)$
67. $y = \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right) \quad (-1 \leq x \leq 1)$
68. $y^2 = 2x \quad (0 \leq x \leq x_0)$
69. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
70. $y = \cosh(x) \quad (-1 \leq x \leq 1)$

3 Konvergence řad

3.1 Řady s kladnými členy

Řešený příklad: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$

Nutná podmínka konvergence je zjevně splněna (exponenciála ve jmenovateli roste rychleji než libovolný polynom), vzhledem k n-té mocnině ve jmenovateli se nabízí Cauchyho kritérium - zkusíme tedy jeho limitní tvar.

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{2+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{2\ln(n)}{n}}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Podle Cauchyho kritéria tedy řada konverguje.

1. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{n!}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$
3. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$
4. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n!}{n^n}$
5. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n n!}{n^n}$
6. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$
7. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+3}\right)^{n^3}$
8. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right)}{2^n}$
9. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$
10. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}$

Řešený příklad: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$

Pokud by v čitateli chyběl člen $(-1)^n$, příklad by byl velice jednoduchý (jedná se o geometrickou řadu, kterou dokonce umíme sečíst). Této skutečnosti se pokusíme využít - aplikujeme srovnávací kritérium:

$$\frac{2+(-1)^n}{2^n} \leq \frac{3}{2^n},$$

přičemž řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2^n}$ konverguje (a to k číslu $3(\frac{1}{1-0{,}5}-1)=3$). Řadu jsme tedy shora odhadli konvergentní řadou $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2^n}$, původní řada tedy rovněž konverguje.

Řešený příklad: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n-n^3}$
Opět tušíme, že řada bude konvergovat (člen n^3 ve jmenovateli roste oproti 3^n pomalu), nemůžeme však použít odhad řadou $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ - to je spodní odhad, pro důkaz konvergence bychom potřebovali odhad horní. Použijeme tedy limitní srovnávací kritérium a ke srovnání použijeme zmíněnou řadu.

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^n}{3^n-n^3}}{\frac{2^n}{3^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n}{3^n-n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{n^3}{3^n}} = 1$$

Podle limitního srovnávacího kritéria mají tyto dvě řady stejný charakter, jelikož řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n}$ konverguje (geometrická řada), konverguje i řada původní.

11. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1+\cos(n)}{2+\cos(n)}\right)^{2n-\ln(n)}$

12. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$

13. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[n]{n^{10}}}{2^n+4^n}$

14. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{2^n+n^2}$

15. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n\sin^2(n)}{n^3+2}$

16. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\ln(n)}$

17. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

18. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^\alpha}$

Řešený příklad: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{e}-1)$
Nutná podmínka konvergence je splněna, limita sumandu je rovna nule. Nedává smysl sumu rozdělit na dvě - dostaneme dvě divergentní řady, jejichž rozdíl nám nic neřekne. Využijeme limitní srovnávací kritérium, výraz se chová jako výraz $\frac{1}{n}$, což vyplývá z referenční limity

$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$. Referenční limity obecně budou mocným nástrojem při vyšetřování konvergence řad.

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{(\sqrt[n]{e}-1)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(e^{\frac{\ln(e)}{n}}-1\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}{\frac{1}{n}} = 1$$

Původní řada má tedy z limitního srovnávacího kritéria stejný charakter jako řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, o které víme, že diverguje, původní řada tedy rovněž diverguje.

19. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{e}-1)^2$

20. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{2}-1\right)$

21. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{2}-1\right)^n$

22. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

23. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)$

24. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$

25. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n^2}\right)$

26. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$

27. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}}$

28. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{4.7...(3n+1)}{2.6...(4n-2)}$

29. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{n}\right)(\sqrt[n]{n}-1)$

30. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$

31. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2+n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$

32. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(n^{\frac{1}{n^2-1}}-1\right)$

33. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2 e^{-\sqrt{n}}$

34. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin\left(\frac{1}{3^n}\right)$

35. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n}}$

36. $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(\ln(n))^{\ln(n)}}$

37. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (p \in \mathbb{R})$

38. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^p \ln\left(\frac{n-1}{n+1}\right) \quad (p \in \mathbb{R})$

39. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\sin^{\alpha}\left(\frac{1}{n}\right)} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

40. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{e}-1)^{\alpha} n^{\beta} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

3.2 Řady s obecnými členy

Řešený příklad: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n+1} \frac{(-1)^n}{\sqrt[100]{n}}$

Nejdříve ze všeho se zaměříme na absolutní konvergenci, tedy na zkoumání řady $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$. Je vidět, že řada má stejný charakter jako řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$, což by se formálně ukázalo limitním srovnávacím kritériem. Řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[100]{n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{100}}}$ diverguje, tudíž původní řada nekonverguje absolutně. Vyšetříme tedy neabsolutní konvergenci, jedná se o řadu se střídavými znaménky, takže by bylo lákavé použít Leibnizovo kritérium, výraz $\frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ má za limitu nulu, ale nezapomínejme na důležitý předpoklad Leibnizova kritéria a to, že tato posloupnost má být (alespoň od nějakého n_0) klesající. Ověření tohoto kritéria by bylo značně technické, proto zkusíme jiné kritérium, a to konkrétně Abelovo. Označíme $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ a $b_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt[100]{n}}$. Podle předpokladů Abelova kritéria musí být řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergentní. Tato řada skutečně konvergentní je, a to podle Leibnizova kritéria - řada se střídavými znaménky a posloupnost $\frac{1}{\sqrt[100]{n}}$ je zjevně monotonní s limitou v nule. Dále musí být splněno, že $a_n = \frac{n-1}{n+1}$ je monotonní a konvergentní posloupnost. Konvergentní zjevně je s limitou rovnou jedné a monotonii snadno ukážeme, konkrétně ukážeme, že posloupnost je ostře rostoucí:

$$\frac{n-1}{n+1} < \frac{n}{n+2} \Leftrightarrow n^2+n-2 < n^2+n \Leftrightarrow -2 < 0.$$

Původní řada tedy konverguje neabsolutně podle Abelova kritéria.

Řešený příklad: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ Nejprve vyřešíme absolutní konvergenci, řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ je řada s kladnými členy, ze znalosti referenční limity tušíme, že řada se chová jako řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, formálně z limitního srovnávacího kritéria,

$$L=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=1.$$

Řada $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ diverguje a tedy původní řada nekonverguje absolutně. Udělejme si nyní představu, jak se chová člen $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, postupným dosazováním zjistíme, že znaménka se zde střídají takto $(+,-,-,+,+,-,-,+,+,-,-,\ldots)$, tedy vždy dvě kladná a následně dvě záporná. Neabsolutní konvergenci zkusíme dokázat pomocí Dirichletova kritéria. O posloupnosti $b_n=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ukážeme, že má omezenou posloupnost částečných součtů, tj.

$$(\exists K\in\mathbb{R})(\forall n\in\mathbb{N})\left(\left|\sum_{k=1}^{n}b_k\right|\leq K\right).$$

Řekli jsme, že se jedná o posloupnost jedniček a minus jedniček, přičemž znaménko se mění vždy po dvou členech, součet libovolných n členů tedy nepřesáhne hodnotu 2. Stačí tedy ukázat, že posloupnost $a_n=\sin\left(\frac{1}{n}\right)$ je monotonní s limitou v nule. Konvergence k nule jistě platí a ze znalosti průběhu funkce $\sin(x)$ (ta je na intervalu $(0,1\rangle$ ostře rostoucí, tedy $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ je ostře klesající na $\langle 1,+\infty)$) je zaručena i monotonie. Původní řada tedy konverguje neabsolutně podle Dirichletova kritéria.

41. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\ln(n)}$

42. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt[2]{n}}$

43. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}}{2^n}$

44. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\binom{n}{2}}}{\ln(n+1)}$

45. $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n\sqrt[n]{n}}{\ln(n)}$

46. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}e^{-n}\sin(n)$

47. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}\sin\frac{1}{n}$

48. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n}{n^2+1}\cos\frac{1}{n}$

49. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+100}{3n+1}\right)^n$

50. $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin(n^2)$

51. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n+100}$

52. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n(2n+1)}{n^2+n+1}$

53. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \sin^2(n)}{n}$

54. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right) \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

55. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

56. $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(n)}{\ln(n)}$

57. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n^p} \quad (p \in \mathbb{R})$

58. $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{n}-1}{n^\alpha} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$

59. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(1+n^\alpha)}{n^\beta} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

60. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(-1)^{n+1}n+1}$ (Uzávorkování)

4 Taylorův polynom a mocninné řady

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

nazýváme n-tým Taylorovým polynomem funkce f v bodě a.

Taylorovy polynomy důležitých funkcí v bodě $a = 0$:

$$\begin{aligned}
e^x &= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x) \\
\sin(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + R_{2n+1}(x) \\
\cos(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} + R_{2n}(x) \\
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + R_n(x) \\
(1+x)^\alpha &= \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + R_n(x)
\end{aligned}$$

Poznamenejme, že výraz $\binom{\alpha}{k}$ definujeme pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$ jako $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-k+1)}{k!}$ pro $k \in \mathbb{N}$ a $\binom{\alpha}{k} = 1$ pro $k = 0$.

Řešený příklad: Nalezněte n-tý Taylorův polynom funkce $f(x) = \frac{1}{e^{2-3x}}$.

$$\frac{1}{e^{2-3x}} = e^{3x-2} = \frac{1}{e^2} e^{3x} = \frac{1}{e^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{(3x)^k}{k!} + (3x)^n \omega(3x) = \frac{1}{e^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k x^k}{k!} + x^n \omega(x)$$

n-tý Taylorův polynom má tedy tvar

$$T_n(x) = \frac{1}{e^2} \sum_{k=0}^{n} \frac{3^k x^k}{k!}.$$

Řešený příklad: Nalezněte n-tý Taylorův polynom funkce $f(x) = \arccos(x)$. Využijeme věty dávající do souvislosti Taylorův polynom funkce a Taylorův polynom její derivace

$$(T_{n,f,a}(x))' = T_{n-1,f',a}(x).$$

Derivace funkce $f(x) = \arccos(x)$ je $f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, k této funkci tedy najdeme Taylorův polynom.

$$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = -\sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{k} (-1)^k x^{2k} + x^{2n}\omega(x)$$

Pro původní funkci tedy bude platit,

$$\arccos(x) = c - \sum_{k=0}^{n} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} + x^{2n+1}\omega(x).$$

Konstantu c dopočítáme dosazením nuly do obou stran rovnice: $\arccos(0) = \frac{\pi}{2} = c$. Zatím jsme však nenašli n-tý Taylorův polynom, ale T_{2n+1}, n-tý Taylorův polynom bude mít tvar

$$T_n(x) = \frac{\pi}{2} - \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{-\frac{1}{2}}{k} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1}.$$

Poznamenejme, že pro $k \neq 0$ platí rovnost $\binom{-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{2k!!}$, pro $k = 0$ platí $\binom{-\frac{1}{2}}{k} = 1$ výsledek tedy lze ještě upravit do tvaru

$$T_n(x) = \frac{\pi}{2} - x - \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{(2k-1)!!}{2k!!} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}.$$

Řešený příklad: Nalezněte 4. Taylorův polynom funkce $f(x) = \sin(2\ln(1+x))$.
Zajisté bychom mohli spočítat Taylorův polynom přímo z definice, je však vidět, že se v příkladu vyskytují funkce, jejichž rozvoj dobře známe ($\sin(x)$, $\ln(1+x)$). Využijeme tedy těchto rozvojů - rozvíjíme do čtvrtého stupně:

$$\begin{aligned}
\sin(x) &= x - \frac{x^3}{3!} + x^4\omega_1(x) \\
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + x^4\omega_2(x) \\
2\ln(1+x) &= 2x - x^2 + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + x^4\omega_3(x)
\end{aligned}$$

Poznamenejme, že na posledním řádku jsme nezapomněli vynásobit zbytek v Peanově tvaru dvojkou, ale dvojku jsme "vtáhli"do zbytku. Nyní tedy stačí složit první a třetí polynom, hledáme 4. Taylorův polynom, takže nás budou zajímat pouze členy s maximálně čtvrtou mocninou x, ostatní členy se "schovají"do zbytku.

$$\begin{aligned}
\sin(2\ln(1+x)) &= \left(2x - x^2 + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + x^4\omega_3(x)\right) - \frac{1}{3!}\left(2x - x^2 + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + x^4\omega_3(x)\right)^3 \\
&+ \left(2x - x^2 + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + x^4\omega_3(x)\right)^4 \omega_1\left(2x - x^2 + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + x^4\omega_3(x)\right) \\
&= 2x - x^2 + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2} - \frac{1}{3!}\left((2x)^3 + 3(2x)^2(-x^2) + \dots\right) + x^4\omega_5(x) \\
&= 2x - x^2 + \frac{2x^3}{3} - \frac{x^4}{2} - \frac{4}{3}x^3 + 2x^4 + x^4\omega_6(x) = 2x - x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^4 + x^4\omega_5(x)
\end{aligned}$$

Hledaný polynom je tedy $2x - x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^4$.

4.1 Příklady k procvičení

Poznámka: Některé funkce je třeba spojitě dodefinovat v bodě a.

1. Určete 3. Taylorův polynom v bodě $a = 2$ funkce
$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

2. Určete 3. Taylorův polynom v bodě $a = 1$ funkce
$$f(x) = x^x - 1$$

3. Určete 3. Taylorův polynom v bodě $a = 1$ funkce
$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

4. Určete 2. Taylorův polynom v bodě $a = 0$ funkce
$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

5. Určete 6. Taylorův polynom v bodě $a = 0$ funkce
$$f(x) = \ln\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)$$

6. Určete 7. Taylorův polynom v bodě $a = 0$ funkce
$$f(x) = \sin(x)\cos(2x)$$

7. Určete 4. Taylorův polynom v bodě $a = 0$ funkce
$$f(x) = \frac{1 + x + x^2}{1 - x + x^2}$$

8. Určete 2. Taylorův polynom v bodě $a = 0$ funkce
$$f(x) = \cosh(x)$$

9. Určete 5. Taylorův polynom v bodě $a = 0$ funkce
$$f(x) = e^{2x - x^2}$$

10. Určete 4. Taylorův polynom v bodě $a = 0$ funkce
$$f(x) = e^{\sin(x)}$$

11. Určete 6. Taylorův polynom v bodě $a = 0$ funkce
$$f(x) = \ln(\cos(x))$$

12. Určete 4. Taylorův polynom v bodě $a = 0$ funkce
$$f(x) = \ln(1 + e^x)$$

13. Určete 13. Taylorův polynom v bodě $a = 0$ funkce

$$f(x) = \sqrt[3]{\sin(x^3)}$$

14. Určete n-tý Taylorův polynom v bodě $a = 0$ funkce

$$f(x) = \ln\left(2 + \frac{3}{5}x\right)$$

15. Určete n-tý Taylorův polynom v bodě $a = 0$ funkce

$$f(x) = \operatorname{arctg}(x)$$

16. Určete n-tý Taylorův polynom v bodě $a = 0$ funkce

$$f(x) = \operatorname{arccotg}(x)$$

17. Určete n-tý Taylorův polynom v bodě $a = 0$ funkce

$$f(x) = 1 + \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

4.2 Výpočet limit pomocí Taylorova polynomu

Řešený příklad: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x) - x}{x\sin(x)}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x - \frac{x^3}{3!} + x^3\omega(x) - x}{x\sin(x)}\right) =$$
$$\lim_{x\to 0} -\frac{x^2}{6\sin(x)} + \frac{x^2\omega(x)}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} -\frac{x}{\sin(x)}\frac{x}{6} + x\omega(x)\frac{x}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} -\frac{x}{6}.1 + x\omega(x).1 = 0$$

18. $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(x) - \sin(x)}{x^3 + x^4}$

19. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}$

20. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x \sin(x) - x(1+x)}{x^3}$

21. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{1}{x} - \operatorname{cotg}(x)\right)$

22. $\lim_{x\to +\infty} \left(x - x^2 \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)$

23. $\lim_{x\to 0} \frac{\sinh(\operatorname{tg}(x)) - x}{x^3}$

24. $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}\right)$

25. $\lim_{x\to 0} \frac{1 - (\cos(x))^{\sin(x)}}{x^3}$

4.3 Přibližný výpočet funkční hodnoty

Řešený příklad: Vypočítejte přibližnou hodnotu výrazu $\sin(36°)$
Nejprve převedeme stupně na radiány $36° = \frac{\pi}{5}$, zajímá nás tedy výraz $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$. Využijeme známý rozvoj funkce sinus a Lagrangeův tvar zbytku:

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} + \frac{(-1)^{n+1}\cos(\xi)}{(2n+3)!} x^{2n+3}.$$

Hledáme tedy takové n, pro které bude absolutní hodnota zbytku menší než námi zadaná tolerovaná chyba - pro tento příklad zvolme přesnost 10^{-4}. Hodnota x je v našem případě rovna $\frac{\pi}{5}$ a číslo ξ je tedy z intervalu $\left\langle 0, \frac{\pi}{5} \right\rangle$. Nejprve učiníme horní odhad.

$$\left| \frac{(-1)^{n+1}\cos(\xi)}{(2n+3)!} x^{2n+3} \right| = \frac{|\cos(\xi)|}{(2n+3)!} \left(\frac{\pi}{5}\right)^{2n+3} \le \frac{1}{(2n+3)!} \left(\frac{\pi}{5}\right)^{2n+3} \le \frac{1}{(2n+3)!}$$

V první nerovnosti jsme odhadli absolutní hodnotu funkce kosinus jedničkou a v druhé nerovnosti jsme trochu hrubě odhadli shora číslo π hodnotou 5. Z tohoto odhadu už bude možné vyřešit od které hodnoty n platí nerovnost

$$\frac{1}{(2n+3)!} < 10^{-4},$$

tedy

$$10^4 = 10000 < (2n+3)!$$

Tato nerovnost je splněna už pro $n = 3$ (pro $n = 2$ dostáváme $7! = 5040$). Poznamenejme ještě, že funkci $\sin(x)$ jsme si na začátku vyjádřili jako součet $(2n+1)$-tého Taylorova polynomu plus zbytku, k dosažení dané přesnosti stačí tedy aproximace sedmým Taylorovým polynomem:

$$\sin(x) \doteq x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}$$

Za x teď stačí dosadit požadovanou hodnotu $\frac{\pi}{5}$. Pokud bychom chtěli znát desetinný rozvoj tohoto čísla, narazíme na problém, že číslo π je iracionální a ve výpočtech vždy můžeme pracovat pouze s jeho aproximací. Budeme-li předpokládat, že pracujeme s "dostatečně přesnou" aproximací čísla π, dostaneme desetinný rozvoj $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right) \doteq 0,5877$.

S přesností 10^{-4} (nebo vyšší dle vlastního uvážení) spočítejte hodnotu následujících výrazů:

26. e
27. $\sqrt{5}$
28. $\sqrt[3]{30}$
29. $\sqrt[5]{250}$
30. $\sqrt{e}$
31. $\ln(1,05)$
32. $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
33. $\cos(18°)$

34. $(1,1)^{1,2}$

Odhadněte absolutní chybu v následujících přibližných vztazích:

35. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \quad 0 \leq x \leq 1$

36. $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} \quad |x| \leq \frac{1}{2}$

37. $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} \quad 0 \leq x \leq 1$

38. $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{9} \quad 0 \leq x \leq 1$

Pro jaká x je absolutní hodnota chyby přibližného vyjádření následujících funkcí menší než 10^{-4}

39. $\sin(x) \doteq x - \frac{x^3}{6}$

40. $\ln(1+x) \doteq x - \frac{x^2}{2}$

4.4 Mocninné řady

K mocninné řadě $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x-a)^n$ existuje $\rho \in \overline{\mathbb{R}}$, $\rho \geq 0$ takové, že pokud $|x-a| < \rho$, pak řada konverguje absolutně, naopak je-li $|x-a| > \rho$, pak řada diverguje. Číslo ρ nazýváme poloměrem konvergence mocninné řady a platí vztah

$$\rho = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}},$$

přičemž klademe $\rho = 0$, pokud limes superior je rovno $+\infty$ a $\rho = +\infty$, pokud limes superior je rovno 0.

Při výpočtu se může hodit Cauchyho vzoreček pro limitu kladných posloupností

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

pokud limita na pravé straně existuje.

Poznamenejme ještě, že při zkoumání konvergence mocninné řady v krajních bodech oboru konvergence nepomůže Cauchyho ani d'Alambertovo kritérium v limitním tvaru.

Řešený příklad: Vyšetřete obor konvergence mocninné řady $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x+1)^n}{n^2 2^n}$.
Nejprve řadu upravíme do tvaru

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3x+1)^n}{n^2 2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n \left(x+\frac{1}{3}\right)^n}{n^2 2^n},$$

odtud vidíme, že střed je v bodě $a = -\frac{1}{3}$, dále spočítáme poloměr konvergence ρ.

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup \sqrt[n]{\frac{3^n}{n^2 2^n}} = \frac{3}{2}$$

Poloměr konvergence je $\rho = \frac{2}{3}$, víme tedy, že řada konverguje pro $x \in \left(-1, \frac{1}{3}\right)$, zbývá vyšetřit krajní body. Pro $x = -1$ dostáváme řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, tato řada konverguje podle Leibnizova kritéria. Pro $x = \frac{1}{3}$ máme řadu $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, která rovněž konverguje, výsledný obor konvergence je tedy $\left\langle -1, \frac{1}{3} \right\rangle$.
Vyšetřete obor konvergence mocninné řady:

41. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n} x^n$

42. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n5^n} (x-3)^n$

43. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x-1)^n}{n^n}$

44. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n5^n} (x+1)^n$

45. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x+4)^n}{4^n n}$

46. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(nx)^n}{n!}$

47. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{x}{\sin(n)}\right)^n$

48. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$

49. $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$

50. $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n x^n$

4.5 Rozvoj funkce do mocninné řady

Vyjádření reálné funkce reálné proměnné jako řady

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x-a)^n \qquad \forall x \in \mathcal{J}$$

nazýváme rozvojem funkce do mocninné řady se středem v bodě $a \in D_f$, kde interval $\mathcal{J}$ je takový, že $a \in \mathcal{J}^o$ (je z vnitřku intervalu) a $\mathcal{J} \subset D_f$. Jako $\mathcal{J}$ zpravidla uvažujeme největší interval s touto vlastností.

Rozvoje známých funkcí

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \quad \forall x \in (-1, 1\rangle$$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \quad \forall x \in (-1, 1)$$

Řešený příklad: Rozviňte do mocninné řady v bodě $a = 0$ funkci $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2-2x}{1+4x}\right)$.
Začneme určením definičního oboru, $x \neq -\frac{1}{4}$. Dle zavedení rozvoje funkce do mocninné řady,

hledáme tento rozvoj vždy na intervalu, který je podmnožinou definičního oboru, takového, že $a \in \mathcal{J}^o$. V našem případě budeme tedy hledat rozvoj nejvýše na intervalu $\left(-\frac{1}{4}, +\infty\right)$ (tedy nikoliv na $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{4}\}$). Dále budeme pokračovat pomocí derivace funkce.

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{2-2x}{1+4x}\right)^2}\frac{-2(1+4x)-4(2-2x)}{(1+4x)^2} = \frac{-10}{5+20x^2} = \frac{-2}{1+4x^2}$$
$$= -2\left(1+4x^2\right)^{-1} = -2\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{-1}{n}4^n x^{2n} = -2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n 4^n x^{2n}$$

Tento rozvoj by platil na $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ - tento interval bychom dostali řešením nerovnosti $-1 < 4x^2 < 1$, nesmíme však zapomenout na nedefinovanost původní funkce, a tedy i nedefinovanost její derivace v bode $x = -\frac{1}{4}$, rozvoj tedy platí na intervalu $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$. Rozvoj původní funkce dostaneme zintegrováním.

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2-2x}{1+4x}\right) = -2\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-4)^n}{2n+1}x^{2n+1} + c$$

Dosazením nuly do obou stran rovnice dopočítáme konstantu $c = \operatorname{arctg}(2)$. Víme, že integrováním nezměním poloměr konvergence řady, jediné co je třeba vyšetřit je konvergence v krajních bodech intervalu. V bode $x = -\frac{1}{4}$ není funkce definována, má tedy smysl zkoumat chování řady pouze v bodě $x = \frac{1}{2}$. Dosazením dostaneme řadu

$$\operatorname{arctg}(2) - \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1},$$

která zjevně konverguje podle Leibnizova kritéria. Výsledný obor konvergence je tedy $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right\rangle$.

Rozviňte do mocninné řady v bodě $a = -1$

51. $f(x) = \ln(5+2x)$
52. $f(x) = x^3$
53. $f(x) = \sin(x)$

Rozviňte do mocninné řady v bodě $a = 0$

54. $f(x) = e^{-x^2}$
55. $f(x) = \frac{x^{10}}{1-x}$
56. $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$
57. $f(x) = \frac{2+x}{(1+2x)(1-x)}$
58. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-2x}}$
59. $f(x) = \sinh(x)$
60. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-2x}}$

61. $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

62. $f(x) = \arcsin(x)$

63. $f(x) = \mathrm{arccotg}(x)$

64. $f(x) = \mathrm{arctg}\left(\frac{2x}{2-x^2}\right)$

65. $f(x) = \arccos\left(1 - 2x^2\right)$

66. $f(x) = \ln^2(1 - x)$

67. $f(x) = x\arcsin(x) + \sqrt{1 - x^2}$

68. $f(x) = x\mathrm{arctg}(x) + \sqrt{1 + x^2}$

69. $f(x) = e^x \cos(x)$

70. $f(x) = \sin(x)\cos(x)$

Reference

[1] Pelantová E., Vondráčková J., *Cvičení z matematické analýzy: Integrální počet a řady*, Vydavatelství ČVUT, 1998

[2] Děmidovič B., *Sbírka úloh a cvičení z matematické analýzy*