9 Devátý týden

9.1 Hromadný bod množiny

Příklad 9.1 *Pomocí kvantifikátorů zapište definice hromadného a izolovaného bodu množiny $A \subset \mathbb{R}$. Za jakých dodatečných předpokladů platí, že bod je izolovaný právě tehdy, není-li hromadný?*
(Řešení:

- *$a \in \overline{\mathbb{R}}$ je hromadným bodem $A \subset \mathbb{R}$ pokud $(\forall H_a)(H_a \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset)$,*
- *$a \in A$ je izolovaný bod množina A pokud $(\exists H_a)(H_a \cap A = \{a\})$,*
- *pokud $a \in A$, pak a je izolovaný právě tehdy pokud není hromadný.*

)
Postup řešení:

- *$a \in \overline{\mathbb{R}}$ je hromadným bodem $A \subset \mathbb{R}$ pokud $(\forall H_a)(H_a \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset)$*
- *$a \in A$ je izolovaný bod množina A pokud $(\exists H_a)(H_a \cap A = \{a\})$*
- *Pokud $a \in A$. Pak a je izolovaný právě tehdy pokud není hromadný*

Poznámka 9.1 *Hromadný bod se v množině $\mathbb{C}$ nezaváděl*

Příklad 9.2 *Rozhodněte, je-li a hromadný bod množiny A pro*

i. $a = 1$, $A = (0, 2)$

ii. $a = 1$, $A = (0, 1)$

iii. $a = \pi$, $A = \mathbb{Z}$

iv. $a = 3$, $A = \mathbb{Z}$

(Řešení: ano, ano, ne, ne)
Postup řešení:

i. *Nechť $H_1 = (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon)$. Pak*

$$(0, 2) \cap H_1 \setminus \{1\} = \begin{cases} (1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon) \setminus \{1\}, & \varepsilon < 1 \\ (0, 2) \setminus \{1\}, & \varepsilon \geq 1 \end{cases}$$

V obou případech je průnik neprázdný. V prvém případě například bod $x = 1 + \frac{\varepsilon}{2}$ leží v průniku. Bod $a = 1$ je hromadným bodem množiny $A = (0, 2)$.

ii. *Nechť* $H_1 = (1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$. *Pak*

$$(0,1) \cap H_1 \setminus \{1\} = \begin{cases} (1-\varepsilon, 1), & \varepsilon < 1 \\ (0,1), & \varepsilon \geq 1 \end{cases}$$

V obou případech je průnik neprázdný. V prvém případě například bod $x = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$ *leží v průniku. Bod* $a = 1$ *je hromadným bodem množiny* $A = (0,1)$.

iii. *Dokážeme, že* π ***není*** *hromadným bodem množiny* $A = \mathbb{Z}$. *Vezměme okolí* $H_\pi = \left(\pi - \frac{1}{100}, \pi + \frac{1}{100}\right)$. *Pak* $\mathbb{Z} \cap H_\pi \setminus \{\pi\} = \emptyset$ *a tedy bod* π *není hromadným bodem množiny* $\mathbb{Z}$.

iv. *Dokážeme, že* 3 ***není*** *hromadným bodem množiny* $A = \mathbb{Z}$. *Vezměme okolí* $H_3 = \left(3 - \frac{1}{100}, 3 + \frac{1}{100}\right)$. *Pak* $\mathbb{Z} \cap H_3 \setminus \{3\} = \emptyset$ *a tedy bod* 3 *není hromadným bodem množiny* $\mathbb{Z}$.

Příklad 9.3 *Rozhodněte, je-li* a *hromadný bod množiny* A *pro*

i. $a = 0$, $A = \left\{\frac{1}{x} \,|\, x \text{ prvočíselné}\right\}$

ii. $a = +\infty$, $A = \{\operatorname{tg} x \,|\, x \in (-\pi/2, \pi/2)\}$

iii. $a = -\infty$, $A = \{n(\cos n + \sin n) \,|\, n \in \mathbb{N}\}$

(Řešení: ano, ano, ano)
Postup řešení:

i. *Ukážeme, že 0 je hromadným bodem* A. *Berme libovolné okolí* $H_0 = (\varepsilon, -\varepsilon)$. *Aby* $A \cap H_0 \setminus \{0\} \neq \emptyset$ *potřebujeme nalézt prvočíslo* x *takové, že* $\frac{1}{x} < \varepsilon$. *Jelikož množina prvočísel je nekonečná, takové prvočíslo nalezneme k libovolnému kladnému* ε. *Nula je tedy hromadným bodem množiny* A.

ii. *Opět ukážeme, že* $+\infty$ *je hromadným bodem. Berme libovolné okolí* $H_{+\infty} = (K, +\infty)$. *Aby průnik s množinou* A *nebyl nulový potřebujeme nalézt* $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ *tak, že* $\operatorname{tg} x > K$. *Jelikož funkce* tg *je na tomto intervalu roste do* $+\infty$ *jistě takové* x *nalezneme. Například*

$$x = \operatorname{arctg}(K+1).$$

iii. *Opět ukážeme, že* $-\infty$ *je hromadným bodem. Berme libovolné okolí* $H_{-\infty} = (-\infty, -K)$, $K > 0$. *Aby průnik s množinou* A *nebyl nulový potřebujeme nalézt* $n \in \mathbb{N}$ *tak, že* $n(\cos n + \sin n) < -K$. *Takové* n *jistě nalezneme. Stačí vzít* $n > K$ *a vynutit podmínku* $\cos n + \sin n < 0$.

9.2 Limita funkce

Příklad 9.4 *Buď $p = p(x)$ polynom stupně alespoň 1. Ukažte následující limitu funkce* $|\lim_{x\pm\infty} p(x)| = +\infty$.

Postup řešení: Nechť $p(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k x^k$, $m > 0$. *Pak*

$$\lim_{x\to+\infty} p(x) = \lim_{x\to+\infty} x^m \left(a_m + \sum_{k=0}^{m-1} a_k x^{k-m} \right) = +\infty \cdot \operatorname{sgn}(a_m)$$

a tedy $\lim_{x\to+\infty} |p(x)| = +\infty$. *Limitu v* $-\infty$ *se dokáže obdobně.*

Příklad 9.5 *Vypočtěte limitu funkce*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{m} a_k x^k}{\sum_{k=0}^{n} b_k x^k},$$

kde a_m, $b_n \neq 0$.
(Řešení: 0 pro $m < n$, a_m/b_n *pro* $m = n$, $+\infty \cdot \operatorname{sgn}(a_m/b_n)$ *pro* $m > n$.*)*
Postup řešení:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sum_{k=0}^{m} a_k x^k}{\sum_{k=0}^{n} b_k x^k} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^m \left(a_m + \sum_{k=0}^{m-1} a_{k-m} x^{k-m} \right)}{x^n \left(b_n + \sum_{k=0}^{n-1} b_k x^{k-m} \right)} =: \lim_{x\to+\infty} f(x)$$

a tedy

- $m = n \implies \lim_{x\to+\infty} f(x) = a_m/b_n$
- $m < n \implies \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$
- $m > n \implies \lim_{x\to+\infty} f(x) = \operatorname{sgn}(a_m/b_n) \cdot (+\infty)$

Příklad 9.6 *Vypočtěte limitu funkce*

$$\lim_{x\to a} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1}.$$

pro $a = 0,\ 1,\ +\infty$.
(Řešení: 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{2}$*)*
Postup řešení:
Pro jednotlivé případy dostáváme

- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = 1$,
- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x+1)}{2x+1} = \frac{2}{3}$,
- $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-1}{2x^2-x-1} = \frac{1}{2}$.

Příklad 9.7 *Vypočtěte limitu funkce*

$$\lim_{x\to a} \frac{x^4+2x^2-3}{x^3-3x^2+2x}.$$

pro $a = -\infty, 1$.
(Řešení: $-\infty, -8$ *)*
Postup řešení:

Pro jednotlivé případy dostáváme

- $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4+2x^2-3}{x^3-3x^2+2x} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^3+x^2+3x+3)}{(x-1)(x^2-2x)} = -8$,
- $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^4+2x^2-3}{x^3-3x^2+2x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^4\left(1+\frac{2}{x^2}-\frac{3}{x^4}\right)}{x^3\left(1-\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}\right)} = -\infty$.

Příklad 9.8 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1},$$

kde $m, n \in \mathbb{N}$.
(Řešení: $\frac{m}{n}$ *)*
Postup řešení: S využitím vzorce pro $a^n - b^n$ *dostáváme*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m-1}{x^n-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\sum\limits_{k=0}^{m-1} x^k}{(x-1)\sum\limits_{k=0}^{n-1} x^k} = \frac{m}{n}.$$

Příklad 9.9 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}.$$

(Řešení: 1)
Postup řešení:

Jelikož $x = 1$ *je kořenem čitatele i jmenovatele, můžeme limitu upravit na*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x^3+x^2+x-2)}{(x-1)(x^4+x^3+x^2+x-3)} = \lim_{x\to 1} \frac{1+1+1-2}{1+1+1+1-3} = 1.$$

Příklad 9.10 *Vypočtěte limitu funkce*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}.$$

(Řešení: 1)

Postup řešení:

Vytknutím $\sqrt{x}$ z čitatele a jmenovatele dostáváme

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x}\left(1+\frac{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}}}=1.$$

Příklad 9.11 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}.$$

(Řešení: $\frac{4}{3}$)

Postup řešení: Vhodným rozšířením jmenovatele a čitatele získáme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}&=\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}\cdot\frac{\sqrt{1+2x}+3}{\sqrt{1+2x}+3}\\&=\lim_{x\to4}\frac{2(x-4)}{x-4}\cdot\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}=\lim_{x\to4}2\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{1+2x}+3}=\frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Příklad 9.12 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}.$$

(Řešení: $\frac{1}{144}$)

Postup řešení:

Použijeme vzorec $(a^3+b^3)=(a+b)(a^2-ab+b^2)$ pro $a=\sqrt[3]{x-6}$ a $b=2$. Pak platí

$$(\sqrt[3]{x-6}+2)\cdot\frac{(x-6)^{2/3}-2((x-6))^{1/3}+2^2}{(x-6)^{2/3}-2((x-6))^{1/3}+2^2}=\frac{x+2}{(x-6)^{2/3}-2((x-6))^{1/3}+2^2}.$$

Zároveň $x^3+8=(x+2)(x^2-2x+4)$. Celkově platí

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}&=\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{(x-6)^{2/3}-2((x-6))^{1/3}+2^2}\frac{1}{(x+2)(x^2-4x+4)}\\&=\lim_{x\to-2}\frac{1}{(x-6)^{2/3}-2((x-6))^{1/3}+2^2}\frac{1}{x^2-4x+4}\\&=\frac{1}{4+4+4}\frac{1}{4+4+4}=\frac{1}{12}\frac{1}{12}=\frac{1}{144}.\end{aligned}$$

Příklad 9.13 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}.$$

(Řešení: $\frac{1}{4}$)
Postup řešení:
Jednoduchou úpravou jmenovatele získáme

$$\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}=\lim_{x\to 16}\frac{\sqrt[4]{x}-2}{(\sqrt[4]{x}-2)(\sqrt[4]{x}+2)}=\lim_{x\to 16}\frac{1}{\sqrt[4]{x}+2}=\frac{1}{4}.$$

Příklad 9.14 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}.$$

(Řešení: $\frac{3}{2}$)
Postup řešení: Vhodně rozšíříme nejprve čitatel a pak jmenoval, abychom mohli použít vzorce $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ a $(a^3-b^3)=(a-b)(a^2+ab+b^2)$. Pak

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}\\
&\quad=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}\cdot\left(\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right)\\
&\quad=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}\cdot\frac{(1+x)^{2/3}+(1+x)^{1/3}(1-x)^{1/3}+(1-x)^{2/3}}{(1+x)^{2/3}+(1+x)^{1/3}(1-x)^{1/3}+(1-x)^{2/3}}\frac{1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\\
&\quad=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)-(1-x)}{(1+x)-(1-x)}\frac{(1+x)^{2/3}+(1+x)^{1/3}(1-x)^{1/3}+(1-x)^{2/3}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\\
&\quad=\frac{1+1+1}{1+1}=\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

9.3 Spojitost funkce

Příklad 9.15 *Pomocí kvantifikátorů zapište definici spojitosti (realné) funkce (reálné proměnné). Diskutujte vztah mezi limitou v konečném bodě a spojitostí.*

(Řešení:

- *f je spojitá v bodě a, právě když $(\forall H_{f(a)})(\exists U_a)(\forall x\in U_a\cap D_f)(f(x)\in H_{f(a)})$,*
- *pokud $a\in D'_f\cap D_f$, pak f je spojitá v bodě a právě tehdy, když $\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$.*

)

Postup řešení:

Funkce f je spojitá v bodě a, právě když $(\forall H_{f(a)})(\exists U_a)(\forall x \in U_a \cap D_f)(f(x) \in H_{f(a)})$. Nechť $a \in D_f \cap D'_f$, pak má smysl vyšetřovat limitu v bodě a. Srovnáním výše uvedené definice spojitosti a definice limity funkce v bodě a pozorujeme, že platí následující věta. Funkce f je spojitá v bodě a právě tehdy, když $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

Příklad 9.16 *Buď $a \in \mathbb{R}$. Nechť existuje konečná limita $\lim_{x\to a} f(x) =: c$. Ukažte, že funkce*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D_f \setminus \{a\} \\ c & x = a \end{cases}$$

je spojitá v a.
Postup řešení:
Nechť $\lim_{x\to a} f(x) = c \in \mathbb{R}$, kde $a \in \mathbb{R}$, tj. z definice

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in D_f, 0 < |x - a| < \delta)(|f(x) - c| < \varepsilon).$$

Chceme ukázat, že $\tilde{f}(x)$ je spojitá v bodě a. Bod a je hromadným bodem množiny D_f, je tedy i hromadným bodem množiny $D_{\tilde{f}}$. Celkově $a \in D'_{\tilde{f}} \cap D_{\tilde{f}}$, lze tedy přepsat spojitost pomocí limity, tj. máme ukázat

$$(\forall \tilde{\varepsilon} > 0)(\exists \tilde{\delta} > 0)(\forall x \in D_{\tilde{f}}, 0 < |x - a| < \tilde{\delta})(|\tilde{f}(x) - \tilde{f}(a)| < \tilde{\varepsilon}).$$

Závorka $(\forall x \in D_{\tilde{f}}, 0 < |x - a| < \tilde{\delta})$ lze ekvivalentně přepsat $(\forall x \in D_f, 0 < |x - a| < \tilde{\delta})$, pak tedy s využitím definice funkce $\tilde{f}(x)$ můžeme psát

$$(\forall \tilde{\varepsilon} > 0)(\exists \tilde{\delta} > 0)(\forall x \in D_f, 0 < |x - a| < \tilde{\delta})(|\tilde{f(x)} - c| < \tilde{\varepsilon}).$$

Pokud tedy zvolíme $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$ a položíme $\tilde{\delta} = \delta$, máme hotovo.

Příklad 9.17 *Z definice ukažte, že funkce $f(x) = x^2 + 1$, $D_f = \mathbb{R}$, je spojitá v libovolném $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Postup řešení: Z definice máme ukázat, že platí výrok

$$(\forall x_0 \in \mathbb{R})(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}, |x - x_0| < \delta)(|x^2 + 1 - (x_0^2 + 1)| < \varepsilon).$$

Jistě platí

$$|x^2 + 1 - (x_0^2 + 1)| = |x^2 - x_0^2| = |x - x_0||x + x_0|.$$

Použitím trojúhelníkové nerovnosti dále získáme

$$|x + x_0| = |x + x_0 - x_0 + x_0| \leq |x - x_0| + 2|x_0| < \delta + 2|x_0|.$$

Takže celkově máme odhad

$$|x - x_0||x + x_0| < \delta(\delta + 2|x_0|) = \delta^2 + 2|x_0|\delta \overset{!}{<} \varepsilon.$$

Nerovnice $\delta^2 + 2|x_0|\delta - \varepsilon < 0$ *má řešení* $\delta \in (0, \sqrt{|x_0|^2 + \varepsilon^2} - |x_0|)$*, takže hledané* δ *v závisloti na* x_0 *a* ε *můžeme volit například jako* $\delta = \frac{1}{2}\left(\sqrt{|x_0|^2 + \varepsilon^2} - |x_0|\right)$.

Příklad 9.18 *Dokažte, že libovolná funkce je spojitá v libovolném izolovaném bodě svého definičního oboru.*
Postup řešení:
Nechť bod x_0 *je izolovaný bod definičního oboru funkce* f*. Pak z definice existuje okolí* $H^*_{x_0}$ *splňující*

$$(\exists H^*_{x_0})(D_f \cap H^*_{x_0} = \{x_0\}).$$

Opět z definice, funkce f *je spojitá v bodě* x_0 *pokud platí výrok*

$$(\forall H_{f(x_0)})(\exists H_{x_0})(\forall x \in H_{x_0} \cap D_f)(f(x) \in H_{f(x_0)}).$$

Pokud za hledané okolí H_{x_0} *zvolíme okolí* $H^*_{x_0}$*, které máme k dispozici z definice izolovaného bodu, dostáváme*

$$H_{x_0} \cap D_f = H^*_{x_0} \cap D_f = \{x_0\}.$$

Výše uvedený výrok o spojitosti v izolovaném bodě tedy platí, jelikož jistě $f(x_0) \in H_{f(x_0)}$.

Poznámka 9.2 *U minulého příkladu nelze využít charakterizaci spojitosti přes limitu. V izolovaném bodě není limita funkce definovaná!*

9.4 Limita složené funkce, limita sevřené funkce

Poznámka 9.3 *Buď* $a \in \bar{\mathbb{R}}$ *hromadným bodem* $f \circ g$ *a*

i. $\lim_{x \to a} g(x) = b \in \bar{\mathbb{R}}$

ii. $\lim_{x \to b} f(x) = c \in \bar{\mathbb{R}}$

iii. $((\exists H^*_a)(\forall x \in H^*_a \cap D_g)(g(x) \neq b)) \vee (b \in D_f \wedge f(b) = c)$.

Potom $\lim_{x \to a} f \circ g(x) = c$.

Poznámka 9.4 *Třetí bod v minulé větě je splněna např, pokud* g *je prostá nebo* f *spojitá.*

Příklad 9.19 *Vypočtěte limitu funkce*

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}).$$

Korektně odůvodněte použití věty o limitě složené funkce.
(Řešení: 0)
Postup řešení: Jelikož $\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$, *dostáváme*

$$\begin{aligned}\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}&=2\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cos\frac{\sqrt{x+1}\sqrt{x}}{2}\\&=2\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}.\end{aligned}$$

Zároveň $|\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}|\le 1$ *a funkci tedy můžeme sevřít*

$$-2\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\le 2\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\cos\frac{\sqrt{x+1}\sqrt{x}}{2}\le 2\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}.$$

Poslední krok je dokázat, že $\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=0$. *Budeme chtít použít větu o limitě složené funkce. V jejím značení máme:*

$$\begin{aligned}f(x)&=\sin x,\\g(x)&=\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})},\\a&=+\infty,\\b&=0,\\c&=0.\end{aligned}$$

Abychom větu mohli použít musí platit jeden z výroků:

$$(\exists H_{+\infty})(\forall x\in H_{+\infty}\cap D_g)(\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}\neq 0)\ \textit{nebo}\ (0\in D_f\wedge\sin 0=0).$$

První výrok platí pro všechna okolí $+\infty$, *druhý výrok též platí. Můžeme tedy použít větu limitě o složené funkce a celkově*

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0.$$

Příklad 9.20 *Pomocí věty o limitě sevřené funkce vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}.$$

(Řešení: 0)
Postup řešení: Využijeme nerovnost $|\sin\frac{1}{x}|\le 1$, *která platí pro všehna nenulová* x. *Pak*

$$0\leftarrow -x\le x\sin\frac{1}{x}\le x\to 0.$$

Z věty o limitě sevřené funkce dostáváme $\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{x}=0$.

Příklad 9.21 (Referenční limity) *Na přednášce bylo odvozeno pomocí Heineho věty a věty o limitě složené funkce, že*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e,\quad \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln(a),\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Dokažte poslední ze vztahů pomocí limity sevřené funkce.
(Nápověda: Pro $0\le x\le 1$ *platí* $(1+\frac{x}{n})^n\nearrow e^x$ *a* $(1+\frac{x}{n})^{n+1}\searrow e^x$*.)*
Postup řešení: Z nápovědy plyne nerovnost

$$1\le\lim_{x\to 0+}\frac{e^x-1}{x}\le\frac{n+1}{n},\forall n\in\mathbb{N}.$$

Vzhledem k libovolnosti n *musí platit (lze ukázat sporem)*

$$\lim_{x\to 0+}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

Levostranná limita vyjde shodně, což je patrné např. ze vztahu $\frac{e^{-x}-1}{-x}=e^{-x}\frac{e^x-1}{x}$*. Celkově*

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,$$

což jsme chtěli ukázat.

Příklad 9.22 *Na přednášce byla následující limita odvozena pomocí Heineho věty. Dokažte pomocí limity sevřené posloupnosti:*

$$\lim_{n\to+\infty}n(\sqrt[n]{e}-1)=1.$$

Postup řešení: Využijeme odhadů

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le e\le\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n$$

platných pro libovolné $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$*. Pak platí*

$$n(\sqrt[n]{e}-1)\le n\left(\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{\frac{n}{n}}-1\right)=n\frac{1}{n-1}\to 1,$$

$$n(\sqrt[n]{e}-1)\ge n\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n}}-1\right)=n\frac{1}{n}=1\to 1.$$

Celkově z věty o limitě sevřené posloupnosti dostáváme

$$\lim_{n\to+\infty}n(\sqrt[n]{e}-1)=1.$$

9.5 Výpočet složitějších limit pomocí referenčních I

Příklad 9.23 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{x}, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)},$$

kde α, $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$.

(Řešení: 5, $\frac{\alpha}{\beta}$*)*
Postup řešení:
S využitím referenčních limit a věty o limitě složené funkce dostáváme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{x}\cdot\frac{5}{5} = 5\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{5x} = 5,$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\sin(\beta x)}\cdot\frac{\alpha x}{\alpha x}\cdot\frac{\beta x}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\alpha x)}{\alpha x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\beta x)}{\beta x} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Příklad 9.24 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin(nx)}{\sin(mx)},$$

kde n, $m \in \mathbb{N}$.

(Řešení: $(-1)^{n+m}\frac{n}{m}$*)*
Postup řešení:
S využitím součtových vzorců pro funkci sin,referenčních limit a věty o limitě složené funkce dostáváme

$$\begin{aligned}\lim_{x\to \pi}\frac{\sin(nx)}{\sin(mx)} &= \lim_{x\to \pi}\frac{\sin\left(nx+n\pi-n\pi\right)}{\sin\left(mx+m\pi-m\pi\right)} = \lim_{x\to \pi}\frac{\sin(n(x-\pi)+n\pi)}{\sin(m(x-\pi)+m\pi)}\\ &= \lim_{x\to \pi}\frac{\sin(n(x-\pi)\cos\left(n\pi\right)+\cos(n(x-\pi))\sin\left(n\pi\right)}{\sin(m(x-\pi)\cos\left(m\pi\right)+\cos(m(x-\pi))\sin\left(m\pi\right)}\\ &= \lim_{x\to \pi}\frac{\sin(n(x-\pi))}{\sin(m(x-\pi))}(-1)^{n-m} = (-1)^{n-m}\lim_{x\to \pi}\frac{\sin(n(x-\pi))}{\sin(m(x-\pi))}\cdot\frac{n(x-\pi)}{n(x-\pi)}\cdot\frac{m(x-\pi)}{m(x-\pi)}\\ &= (-1)^{n+m}\frac{n}{m}.\end{aligned}$$

Příklad 9.25 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}.$$

(Řešení: 1)
Postup řešení: S využitím referenčních limit dostáváme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.$$

Příklad 9.26 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}.$$

Výsledek tohoto příkladu si zapamatujte.

(Řešení: $\frac{1}{2}$)
Postup řešení: Vhodným rozšířením a využitím referenční limity dostáváme

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\cdot\frac{1+\cos x}{1+\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos^2 x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos^2 x}=\frac{1}{2}.$$

Příklad 9.27 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}.$$

(Nápověda: Využijte výsledku předchozího příkladu.)

(Řešení: $\frac{1}{2}$)
Postup řešení: Jednoduchými úpravami s využitím goniometrických vzorců dostáváme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{(1-\cos x)(1+\cos x)\cos x}=\frac{1}{2}.$$

Jiný postup: *S využitím předcházejících limit dostáváme*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin^3 x}\frac{1-\cos x}{x^2}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin^3 x}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1\cdot\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$$

Příklad 9.28 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right).$$

(Řešení: $\frac{2}{\pi}$)
Postup řešení: S využitím součtových vzorců pro cos *a referenční limity dostáváme*

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}x\right)&=\lim_{x\to 1}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{(1-x)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)\cos\frac{\pi}{2}-\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)\sin\frac{\pi}{2}}=\lim_{x\to 1}\frac{\frac{\pi}{2}(x-1)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}(x-1)\right)}\frac{1}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

Příklad 9.29 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2-5x+1)}{x}.$$

(Řešení: -5)

Postup řešení:

S využitím referenční limity dostáváme

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2-5x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2-5x+1)}{x}\cdot\frac{x^2-5x}{x^2-5x}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x^2-5x+1)}{x^2-5x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2-5x}{x}=\lim_{x\to 0}(x-5)=-5.$$

Příklad 9.30 *Vypočtěte*

$$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}.$$

(Řešení: e^{-2})

Postup řešení: Vhodnou úpravou a využitím referenční limity dostáváme

$$\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0}\left((1-2x)^{\frac{1}{-2x}}\right)^{\frac{-2x}{x}}=e^{-2}.$$