6 Šestý týden

Poznámka 6.1 *V následujících příkladech je vhodné mít na paměti následující vzorečky (zejména pro $n = 2$ a $n = 3$). Pro $a, b \in \mathbb{C}$ a $n \in \mathbb{N}$ platí*

$$a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k},$$
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Poznámka 6.2 *Na přednášce bylo pro pro limitu reálné posloupnosti (a^n), $a \in \mathbb{R}$, ukázáno*

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 0 \text{ pro } |a| < 1, \\ 1 \text{ pro } a = 1, \\ +\infty \text{ pro } a > 1, \\ \text{neexistuje pro } a \leq -1. \end{cases}$$

Poznámka 6.3 *Na přednášce bylo pro pro limitu komplexní posloupnosti (a^n), $a \in \mathbb{C}$, ukázáno*

$$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} 0 \text{ pro } |a| < 1, \\ 1 \text{ pro } a = 1, \\ \infty \text{ pro } |a| > 1, \\ \text{neexistuje pro } |a| = 1, a \neq 1. \end{cases}$$

6.1 Limita racionální funkce (dokončení)

Příklad 6.1 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$, existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+n+1)^{10} - (n+1)^{20}}{(n^2+1)^{10} - (n+1)^{20}}.$$

(Řešení: 1/2)
Postup řešení:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n^2+n+1)^{10} - (n+1)^{20}}{(n^2+1)^{10} - (n+1)^{20}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n^{20}+10n^{19}+\ldots) - (n^{20}+20n^{19}+\ldots)}{(n^{20}+10n^{18}+\ldots) - (n^{20}+20n^{19}+\ldots)} =$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{-10n^{19}+\ldots}{-20n^{19}+\ldots} = \frac{1}{2}.$$

Příklad 6.2 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right).$$

(Řešení: 1/2)
Postup řešení:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+2+\ldots+n-1}{n^2}=$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n-1)n}{2n^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2-n}{2n^2}=\frac{1}{2}.$$

Příklad 6.3 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n}\right).$$

(Řešení: neexistuje)
Postup řešení: Pro n sudé platí

$$1-2+3-4+\cdots+(n-1)-n=(1+2+\cdots+(n-1)+n)-2\cdot(2+4+\cdots+n)$$
$$=\frac{n(n+1)}{2}-4\cdot\frac{\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)}{2}=\frac{n^2+n}{2}-\frac{n^2}{2}-n=-\frac{n}{2}.$$

Podobně pro n liché úpravami dostáváme

$$(1-2+3-4+\ldots-(n-1))+n=\left[-\frac{n-1}{2}\right]+n=\frac{n+1}{2}.$$

Celkově tedy

- *pro n sudé*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}-\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{n}=-\frac{1}{2},$$

- *pro n liché*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{2}.$$

Našli jsme tedy dvě vybrané posloupnosti, které mají různé limity a celkově tedy limita nemůže existovat.

Příklad 6.4 *Vypočtěte (v $\mathbb{C}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+i}{4-in}.$$

(Řešení: $2i$)
Postup řešení:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+i}{4-in} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(2+\frac{i}{n}\right)}{n\left(\frac{4}{n}-i\right)} = -\frac{2}{i} = 2i.$$

Příklad 6.5 *Vypočtěte (v $\mathbb{C}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4n-i}{2+in}.$$

(Řešení: $-4i$)
Postup řešení:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{4n-i}{2+in} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(4-\frac{i}{n}\right)}{n\left(\frac{2}{n}+i\right)} = \frac{4}{i} = -4i.$$

Příklad 6.6 *Vypočtěte (v $\mathbb{C}$)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+i}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+i}}.$$

(Řešení: 0) *Postup řešení:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+i}}{\frac{1}{n}+\frac{1}{n+i}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n+i-n}{n(n+i)}}{\frac{n+i+n}{n(n+i)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{i}{2n+i} = 0.$$

6.2 Limity na odmocniny

Příklad 6.7 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right).$$

(Řešení: 0)
Postup řešení:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right) \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} =$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

Příklad 6.8 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}+5}{2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}}.$$

(Řešení: 1/2)
Postup řešení:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}+5}{2\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\left(1+\frac{5}{\sqrt{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(2+n^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}\right)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{5}{\sqrt{n}}}{2+\frac{1}{n^{\frac{1}{6}}}} = \frac{1}{2}.$$

Příklad 6.9 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[7]{n^2-3}-\sqrt[20]{n^7+1}}{5\sqrt[9]{n^2+1}+2\sqrt[20]{n^7}}.$$

(Řešení: -1/2)
Postup řešení: Nejvyšší mocnina je v tomto případě $\frac{7}{20}$, vytýkáme tedy člen $n^{\frac{7}{20}}$:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[7]{n^2-3}-\sqrt[20]{n^7+1}}{5\sqrt[9]{n^2+1}+2\sqrt[20]{n^7}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{7}{20}}\left(\sqrt[7]{\frac{1}{n^{\frac{9}{20}}}-\frac{3}{n^{\frac{49}{20}}}}-\sqrt[20]{1+\frac{1}{n^7}}\right)}{n^{\frac{7}{20}}\left(5\sqrt[9]{\frac{1}{n^{\frac{23}{20}}}+\frac{1}{n^{\frac{63}{20}}}}+2\right)} = -\frac{1}{2}.$$

Příklad 6.10 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+3}}.$$

(Řešení: 1)
Postup řešení:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+3}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} \cdot \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+3}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{2}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}\right)}{\sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{2}{n}}\right)} = 1.$$

Příklad 6.11 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{3n^2+1}-2n\right).$$

(Řešení: $-\infty$)
Postup řešení:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{3n^2+1}-2n\right)=\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{3+\frac{1}{n^2}}-2\right)=+\infty\cdot(\sqrt{3}-2)=-\infty.$$

Příklad 6.12 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1+\sqrt{1+n^{-4}}}.$$

(Řešení: $\sqrt{2}$)
Postup řešení: Zřejmé.

Příklad 6.13 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+(-1)^n n+1}-\sqrt{n^2+(-1)^{n+1}n+1}\right).$$

(Řešení: neexistuje)
Postup řešení: Platí

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n^2+(-1)^n n+1}-\sqrt{n^2+(-1)^{n+1}n+1}=$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+(-1)^n n+1}-\sqrt{n^2+(-1)^{n+1}n+1}\right)\left(\sqrt{n^2+(-1)^n n+1}+\sqrt{n^2+(-1)^{n+1}n+1}\right)}{\sqrt{n^2+(-1)^n n+1}+\sqrt{n^2+(-1)^{n+1}n+1}}$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2(-1)^n n}{\sqrt{n^2+(-1)^n n+1}+\sqrt{n^2+(-1)^{n+1}n+1}}=$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2(-1)^n}{\sqrt{1+\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{1}{n^2}}}.$$

Vybereme-li nyní podposloupnost členů se sudými indexy, limita vyjde 1. Naopak pro liché indexy dostáváme hodnotu -1. Našli jsme tedy dvě různé podposloupnosti s různými limitami. Původní limita tedy neexistuje.

Příklad 6.14 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} n^{4/3}(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2-1}).$$

(Řešení: 2/3)

Postup řešení: Označme $a = \sqrt[3]{n^2+1}$ *a* $b = \sqrt[3]{n^2-1}$. *Ze vzorce* $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ *vyjádříme výraz* $(a-b)$, *tedy* $a - b = \frac{a^3-b^3}{a^2+ab+b^2}$. *Pak*

$$\lim_{n\to+\infty} n^{4/3}(\sqrt[3]{n^2+1} - \sqrt[3]{n^2-1}) =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{4}{3}}\left(n^2+1-n^2+1\right)}{\sqrt[3]{(n^2+1)^2} + \sqrt[3]{(n^2+1)(n^2-1)} + \sqrt[3]{(n^2-1)^2}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{n^4+2n^2+1} + \sqrt[3]{n^4-1} + \sqrt[3]{n^4-2n^2+1}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^{\frac{4}{3}}}{n^{\frac{4}{3}}\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}} + \sqrt[3]{1-\frac{1}{n^4}} + \sqrt[3]{1-\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^4}}\right)} = \frac{2}{3}.$$

Příklad 6.15 *Vypočtěte (v* $\mathbb{R}$*; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+n^2+1} - \sqrt[3]{n^3-n^2+1}\right).$$

(Řešení: 2/3)
Postup řešení: Označme $a = \sqrt[3]{n^3+n^2+1}$ *a* $b = \sqrt[3]{n^3-n^2+1}$. *Rozšířením výrazem* $a^2 + ab + b^2$ *dostaneme*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n^3+n^2+1} - \sqrt[3]{n^3-n^2+1} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2}{\sqrt[3]{(n^3+n^2+1)^2} + \sqrt[3]{(n^3+n^2+1)(n^3-n^2+1)} + \sqrt[3]{(n^3-n^2+1)^2}} = \frac{2}{3}.$$

Příklad 6.16 *Vypočtěte (v* $\mathbb{R}$*; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[3]{n} - \sqrt{n}\right).$$

(Řešení: $-\infty$*)*
Postup řešení:

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[3]{n} - \sqrt{n} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{1}{2}} = \lim_{n\to+\infty} n^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{6}}} - 1\right) = -\infty.$$

Příklad 6.17 *Vypočtěte (v* $\mathbb{R}$*; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[4]{n^4-n} - \sqrt[3]{n^3+3n^2}\right).$$

(Řešení: -1)

Postup řešení: Označme n-tý člen zadané posloupnosti symbolem a_n. Nejmenší společný násobek 3 a 4 je 12. Použijeme tedy vzorec $a^{12} - b^{12} = (a-b)\sum_{k=0}^{11} a^k b^{11-k}$, *kde* $a = \sqrt[12]{(n^4-n)^3}$ *a* $b = \sqrt[12]{(n^3+3n^2)^4}$. *Tímto rozšířením dostáváme*

$$a_n = \frac{(n^4-n)^3 - (n^3+3n^2)^4}{\sum_{k=0}^{11} (n^4-n)^{\frac{k}{4}} (n^3+3n^2)^{\frac{11-k}{3}}}.$$

Nejvyšší mocniny jak v čitateli tak v jmenovateli jsou 11 (n^{12} se v čitateli i jmenovateli odečtou), a tedy rozhodnou koeficienty u těchto mocnin. Upravíme-li jmenovatel do tvaru

$$n^{11} \sum_{k=0}^{11} \left(1 - \frac{1}{n^3}\right)^{\frac{k}{4}} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^{\frac{11-k}{3}},$$

pak každý sčítanec sumy jde k 1 a celkově tedy koeficient u n^{11} je ve jmenovateli 12. V čitateli můžeme využít binomickou větu a zjistíme, že u n^{11} je koeficient -12. Celkem tedy limita vyjde -1.

Příklad 6.18 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-1/2} \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{2n} - \sqrt{3n+2}\right).$$

(Řešení: $1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}$)
Postup řešení:

$$\lim_{n\to+\infty} n^{-1/2} \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{2n} - \sqrt{3n+2}\right) =$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{2} - \sqrt{3+\frac{2}{n}}\right)}{n^{\frac{1}{2}}} = 1 + \sqrt{2} - \sqrt{3}.$$

Příklad 6.19 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} n^{1/2} \left(\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} - 3\sqrt{n+2}\right).$$

(Řešení: $-5/2$)
Postup řešení:

$$\lim_{n\to+\infty} n^{1/2} \left(\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} - 3\sqrt{n+2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{1}{2}} \left(n+1+4n+4\sqrt{n(n+1)} - 9n - 18\right)}{\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} + 3\sqrt{n+2}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{1}{2}} \left(4\sqrt{n(n+1)} - (4n+17)\right)}{\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} + 3\sqrt{n+2}} \cdot \frac{4\sqrt{n(n+1)} + (4n+17)}{4\sqrt{n(n+1)} + (4n+17)}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{1}{2}} (-120n - 289)}{\left(\sqrt{n+1} + 2\sqrt{n} + 3\sqrt{n+2}\right) \left(4\sqrt{n(n+1)} + (4n+17)\right)} = -\frac{120}{6 \cdot 8} = -\frac{5}{2}.$$

Příklad 6.20 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+\sqrt{n^8+1}}}-n\sqrt{1+\sqrt{2}}\right).$$

(Řešení: 0)

Postup řešení: Výraz rozšíříme číslem $\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+\sqrt{n^8+1}}}+n\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)$ *a použijeme vzorec pro* a^2-b^2. *Tím dostaneme*

$$a_n=\frac{n^2+\sqrt{n^4+\sqrt{n^8+1}}-n^2-\sqrt{2}n^2}{\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+\sqrt{n^8+1}}}+n\sqrt{1+\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{n^4+\sqrt{n^8+1}}-\sqrt{2}n^2}{\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+\sqrt{n^8+1}}}+n\sqrt{1+\sqrt{2}}}.$$

Opět rozšíříme, abychom se zbavili nejvyšší mocniny v čitateli. Dostáváme

$$a_n=\frac{n^4+\sqrt{n^8+1}-2n^4}{\left(\sqrt{n^2+\sqrt{n^4+\sqrt{n^8+1}}}+n\sqrt{1+\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{n^4+\sqrt{n^8+1}}+\sqrt{2}n^2\right)}.$$

Abychom se zbavili poslední odmocniny, rozšíříme naposledy, nyní výrazem $\sqrt{n^8+1}+n^4$,

$$a_n=\frac{n^8+1-n^8}{b_n}\to 0,$$

jako b_n *jsme označili jmenovatel výrazu, o kterém platí, že jde do plus nekonečna - výsledná limita je tedy rovna nule.*

Příklad 6.21 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{n^2+(-1)^n\sqrt{n}}-n\right).$$

(Řešení: neexistuje)

Postup řešení: Zadanou limitu rozšířením upravíme na tvar

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n(-1)^n\sqrt{n}}{\sqrt{n^2+(-1)^n\sqrt{n}}+n}.$$

Pro sudé hodnoty n je limita do plus nekonečna, pro liché mínus nekonečno. Limita tedy neexistuje.

Příklad 6.22 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{an+1}-\sqrt{n})\sqrt{4n+3}$$

pro $a\in\mathbb{R}^+$.

(Řešení: $+\infty$ pro $a > 1$, 1 pro $a = 1$, $-\infty$ pro $a < 1$)
Postup řešení:

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{an+1}-\sqrt{n})\sqrt{4n+3} = \lim_{n\to+\infty}\frac{((a-1)n+1)\sqrt{4n+3}}{\sqrt{an+1}+\sqrt{n}}.$$

Pro $a \neq 1$ je v čitateli vyšší mocnina než ve jmenovateli. Pro $a > 1$ dostáváme výsledek $+\infty$, pro $a < 1$ naopak $-\infty$. Pro $a = 1$ platí

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{4n+3}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{2\sqrt{n+\frac{3}{4}}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 1.$$

Příklad 6.23 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} n^{k-1}\left(\sqrt[k]{n^k+1}-\sqrt[k]{n^k-1}\right)$$

pro $k \in \mathbb{N}$.
(Řešení: 2/k)
Postup řešení: Použijeme vzorec $a^k - b^k = (a-b)\sum_{j=0}^{k-1} a^j b^{k-1-j}$,

$$\lim_{n\to+\infty} n^{k-1}\left(\sqrt[k]{n^k+1}-\sqrt[k]{n^k-1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{2n^{k-1}}{\sum_{j=0}^{k-1}(n^k+1)^{\frac{j}{k}}(n^k-1)^{\frac{k-1-j}{k}}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{2n^{k-1}}{n^{k-1}\sum_{j=0}^{k-1}(1+n^{-k})^{\frac{j}{k}}(1-n^{-k})^{\frac{k-1-j}{k}}}.$$

Ve jmenovateli je suma čítající k členů, z nichž každý má limitu jedna. Výsledná limita je tedy $\frac{2}{k}$.

Příklad 6.24 *Určete čísla $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby platilo*

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt[3]{1-n^3}-an-b\right) = 0.$$

(Řešení: $a = -1$, $b = 0$)
Postup řešení: Nechť a_n značí n-tý člen posloupnosti na levé straně zadané rovnice. Vytnutím nejvyšší mocniny získáváme

$$a_n = n\left[\sqrt[3]{-1+\frac{1}{n^3}}-a-\frac{b}{n}\right].$$

Pokud by $a < -1$, pak by předcházející limita vyšla $+\infty$, pokud by $a > -1$, pak $\lim a_n = -\infty$. Jediná šance je tedy pro $a = -1$. Pak posloupnost a_n bude vypadat

$$a_n = \sqrt[3]{1-n^3} + n - b.$$

Rozšířením číslem $(1-n^3)^{2/3} - \sqrt[3]{1-n^3}(n-b) + (n-b)^2$ dostaneme

$$a_n = \frac{1 - n^3 + (n-b)^3}{(1-n^3)^{2/3} - \sqrt[3]{1-n^3}(n-b) + (n-b)^2}.$$

Vytknutím nejvyšších mocnin získáme

$$a_n = \frac{n^2\left[-3b + \frac{3b^2}{n} + \frac{-b^3+1}{n^2}\right]}{n^2\left[(1/n^3-1)^{2/3} - (1-b/n)(1/n^3-1)^{1/3} + (1-b/n)^2\right]} \to -b.$$

A tedy musí platit, že $b = 0$.

6.3 Limity s obecnou mocninou

Příklad 6.25 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}.$$

(Řešení: 1/3)
Postup řešení: Vytýkáme exponenciálu s největším základem. Platí

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^n\left(\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 1\right)}{3^n\left(2\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 3\right)} = \frac{1}{3}.$$

Příklad 6.26 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$L = \lim_{n\to+\infty} a^{n^2+n}$$

pro $a \in \mathbb{R}$.
(Řešení: $L = +\infty$ pro $|a| > 1$, $L = 0$ pro $|a| < 1$, $L = 1$ pro $|a| = 1$)
Postup řešení: Exponent $n^2 + n$ můžeme přepsat do tvaru $n(n+1)$, což je sudé číslo. (Pokud je n sudé, pak $n+1$ je liché a naopak. Současně platí, že sudé krát liché je sudé.) Platí tedy $a^{n^2+n} = |a|^{n^2+n}$. Protože posloupnost $(|a|^{n^2+n})$ je vybraná z $(|a|^n)$, dostáváme následující limity.

- $|a| > 1$: $L = +\infty$.
- $|a| < 1$: $L = 0$.

- $|a| = 1$: $L = 1$.

Příklad 6.27 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}}$$

pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.
(Řešení: 0)
Postup řešení: Pro přípustné hodnoty parametru a takových, že $|a| < 1$, je výsledek zjevně 0. Pro $|a| > 1$ upravíme limitu na tvar

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{1+a^{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{a^n\left(\frac{1}{a^n}+a^n\right)}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{a^n}+a^n}.$$

Z tohoto tvaru je již patrné, že i pro tyto hodnoty parametru a je limita rovna nule.

Příklad 6.28 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}}$$

pro $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$.
(Řešení: 1 pro $|a| > 1$, -1 pro $0 < |a| < 1$)
Postup řešení: Pro $|a| > 1$ vytkneme a^n. Platí

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - a^{-2n}}{1 + a^{-2n}} = 1.$$

Pro $|a| < 1$ vytýkáme a^{-n},

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n - a^{-n}}{a^n + a^{-n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^{2n} - 1}{a^{2n} + 1} = -1.$$

Příklad 6.29 *Vypočtěte (existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^n}{1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^n},$$

kde $\alpha, \beta \in \mathbb{C} : |\alpha| < 1, |\beta| < 1$.
(Řešení: $\frac{1-\beta}{1-\alpha}$)
Postup řešení: Využijeme známého vzorce pro součet n členů geometrické posloupnosti. Platí

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^n}{1+\beta+\beta^2+\ldots+\beta^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\alpha^{n+1}}{1-\alpha}\frac{1-\beta}{1-\beta^{n+1}} = \frac{1-\beta}{1-\alpha}.$$

Příklad 6.30 *Vypočtěte (v $\mathbb{R}$; existuje-li)*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\dots\sqrt[2^n]{2}.$$

(Řešení: 2)
Postup řešení:

$$\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\dots\sqrt[2^n]{2} = \prod_{k=1}^{n}\sqrt[2^k]{2} = \prod_{k=1}^{n} 2^{\frac{1}{2^k}} = 2^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}} = 2^{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k} \to 2^{\frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} = 2.$$