4 Čtvrtý týden

4.1 Supremum a infimum množiny

Příklad 4.1 *Zapište pomocí kvantifikátorů definice minima, maxima, infima a suprema podmnožiny* $\mathbb{R}$*. Čemu se rovná* $\sup\emptyset$ *a* $\inf\emptyset$*?*

Postup řešení: Nechť $M \subset \mathbb{R}$. Pak

i. $a \in M$ je minimem M, právě když $(\forall x \in M)(a \leq x)$,

ii. $a \in M$ je maximem M, právě když $(\forall x \in M)(a \geq x)$,

iii. $a \in \overline{\mathbb{R}}$ je infimem (největší dolní závora) M, právě když

$$\begin{aligned}(\forall x \in M)(x \geq a),\\ (\forall b \in \mathbb{R}, b > a)(\exists x \in M)(x < b).\end{aligned}$$

iv. $a \in \overline{R}$ je supremem (nejmenší horní závora) M, právě když

$$\begin{aligned}(\forall x \in M)(x \leq a),\\ (\forall b \in \mathbb{R}, b < a)(\exists x \in M)(x > b).\end{aligned}$$

Pro prázdnou množinu platí $\sup\emptyset = -\infty$ a $\inf\emptyset = +\infty$.

Příklad 4.2 *Zkuste uhádnout* $\sup M$, $\inf M$, $\max M$, $\min M$ *a následně své tipy dokažte:*

$$M = \left\{ \frac{2n}{3n+1} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(Řešení: $\min M = \inf M = 1/2$*,* $\sup M = 2/3$*, maximum neexistuje)*

Postup řešení: Tipneme si, že minima je nabýváno pro $n = 1$, tento tip následně ověříme. Platí:

$$\begin{aligned}\frac{2n}{3n+1} &\geq \frac{1}{2},\\ 4n &\geq 3n+3,\\ n &\geq 1.\end{aligned}$$

Minima je tedy opravdu nabýváno pro $n = 1$ a má hodnotu $\frac{1}{2}$. Protože minimum M existuje, pak $\inf M = \min M$. U suprema tipujeme (na základě limitního přechodu) hodnotu $\frac{2}{3}$, tento tip následně ověříme.

i. Nejdříve ukážeme, že $2/3$ je horní závora:

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \left(\frac{2n}{3n+1} \leq \frac{2}{3} \right),$$
$$2n \leq \frac{2}{3}(3n+1),$$
$$2n \leq 2n + \frac{2}{3},$$
$$0 \leq \frac{2}{3}.$$

ii. Nyní ukážeme, že je to nejmenší horní závora:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N}) \left(\frac{2n}{3n+1} > \frac{2}{3} - \varepsilon \right),$$
$$2n > 2n + \frac{2}{3} - 3\varepsilon n - \varepsilon,$$
$$n > \frac{1}{3\varepsilon}\left(\frac{2}{3} - \varepsilon\right) = \frac{2}{9\varepsilon} - \frac{1}{3}.$$

Nyní stačí volit $n = \lfloor |\frac{2}{9\varepsilon} - \frac{1}{3}| \rfloor + 1$.

Příklad 4.3 *Zkuste uhádnout* $\sup M$, $\inf M$, $\max M$, $\min M$ *a následně své tipy dokažte:*

$$M = \left\{ \frac{x^3}{x^2+10} \,\middle|\, x \in \mathbb{R} \right\}.$$

(Řešení: $\inf M = -\infty$, $\sup M = +\infty$, *minimum ani maximum neexistuje)*

Postup řešení:

- $\inf M = -\infty$:

  Ukážeme, že množina je neomezená zdola, tedy

  $$\inf M = -\infty \iff (\forall c \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) \left(\frac{x^3}{x^2+10} < c \right).$$

  Předpokládejme, že x je záporné. Pomocí odhadu shora dostaneme

  $$\frac{x^3}{x^2+10} < \frac{x^3}{2x^2} = \frac{x}{2} < c$$

  pro $x^2 > 10$. Stačí tedy volit například $x = -2|c| - 10$.

- $\sup M = +\infty$:

  Ukážeme, že množina je neomezená shora,

$$\sup M = +\infty \iff (\forall c \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) \left(\frac{x^3}{x^2+10} > c \right).$$

  Opět využijeme vhodného odhadu. Pro $x > 0$, kde $x^2 > 10$, platí

$$\frac{x^3}{x^2+10} > \frac{x^3}{x^2+x^2} = \frac{x}{2} > c.$$

  Stačí tedy volit například $\max\{2c+1, 100\}$.

Minimum ani maximum množiny M neexistuje.

Příklad 4.4 *Zkuste uhádnout* $\sup M$, $\inf M$, $\max M$, $\min M$ *a následně své tipy dokažte:*

$$M = \left\{ \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2} \,\middle|\, x \in (0,+\infty) \right\}.$$

(Řešení: $\inf M = -3/2,\ \sup M = 2$, *minimum ani maximum neexistuje)*
Postup řešení:

- $\inf M = -3/2$*:*

  i. Nejdříve ukážeme, že -3/2 je dolní závora:

$$\begin{aligned}
(\forall x \in (0,+\infty)) \left(\frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2} \geq -3/2 \right), \\
2\sqrt{x} - 3 \geq -\frac{3}{2}(\sqrt{x}+2), \\
2\sqrt{x} - 3 \geq -\frac{3}{2}\sqrt{x} - 3, \\
\frac{7}{2}\sqrt{x} \geq 0, \\
\sqrt{x} \geq 0.
\end{aligned}$$

  ii. Nyní ukážeme, že je to největší dolní závora

$$\begin{aligned}
(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists x \in (0,+\infty)), \left(\frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+2} < -3/2 + \varepsilon \right), \\
2\sqrt{x} - 3 < -\frac{3}{2}\sqrt{x} - 3 + \varepsilon\sqrt{x} + 2\varepsilon, \\
\left(\frac{7}{2} - \varepsilon \right) \sqrt{x} < 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Pro $\varepsilon \geq \frac{7}{2}$ nerovnice platí pro libovolné x, volíme tedy například $x = 68$ (#jardajagr). V opačném případě stačí volit $\sqrt{x} = \varepsilon(\frac{7}{2} - \varepsilon)^{-1}$, tedy přesněji, za x volíme druhou mocninu tohoto výrazu. Infimum není nabýváno, tedy minimum neexistuje.

- $\sup M = 2$*:*

  i. Nejdříve ukážeme, že 2 je horní závora:

$$(\forall x \in (0, +\infty)) \left(\frac{2\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 2} \leq 2 \right),$$
$$2\sqrt{x} - 3 \leq 2(\sqrt{x} + 2),$$
$$2\sqrt{x} - 3 \leq 2\sqrt{x} + 4,$$
$$0 \leq 1.$$

  ii. Nyní ukážeme, že je to nejmenší horní závora:

$$(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists x \in (0, +\infty)) \left(\frac{2\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 2} > 2 - \varepsilon \right),$$
$$2\sqrt{x} - 3 > 2\sqrt{x} + 4 - \varepsilon\sqrt{x} - 2\varepsilon,$$
$$\varepsilon\sqrt{x} > 7 - 2\varepsilon,$$
$$\sqrt{x} > \frac{7}{\varepsilon} - 2.$$

  Nyní stačí volit například $\sqrt{x} = \frac{7}{\varepsilon}$, tedy $x = \frac{49}{\varepsilon^2}$. Supremum není nabýváno, maximum tedy neexistuje.

Příklad 4.5 *Zkuste uhádnout* $\sup M$, $\inf M$, $\max M$, $\min M$ *a následně své tipy dokažte:*

$$M = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(1 - \frac{1}{n}, 2 \right).$$

(Řešení: $\min M = \inf M = 1$, $\sup M = 2$, *maximum neexistuje)*
Postup řešení: Dokážeme, že $M = \langle 1, 2)$. Inkluze $\langle 1, 2) \subset M$ je jednoduchá. Nechť $x \in \langle 1, 2)$, pak

$$1 \leq x < 2,$$

a tedy jistě pro každé $n \in \mathbb{N}$ platí, že

$$1 - \frac{1}{n} < x < 2,$$

a celkem tedy $x \in M$. Druhá inkluze $M \subset \langle 1, 2)$. Nechť $x \in M$, pak x musí splňovat dvě nerovnosti:

$$1 - \frac{1}{n} < x, \forall n \in \mathbb{N},$$

a

$$x < 2.$$

Z první podmínky plyne, že $x \geq 1$*, že druhé* $x < 2$*. Celkem* $x \in \langle 1, 2)$*. Dokázali jsme tedy, že* $M = \langle 1, 2)$ *a nyní je již úloha jednoduchá. Jednoduše lze ukázat, že* $\min M = \inf M = 1$ *a* $\sup M = 2$*. Maximum neexistuje.*

Příklad 4.6 *Zkuste uhádnout* $\sup M$, $\inf M$, $\max M$, $\min M$ *a následně své tipy dokažte:*

$$M = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\langle 0, 2 - \frac{1}{n} \right\rangle.$$

(Řešení: $\inf M = 0$*,* $\sup M = 2$*, minimum ani maximum neexistuje)*
Postup řešení: Obdobně jako u minulého příkladu ukážeme, že $M = (0, 2)$*. Z toho již plyne, že minimum ani maximum neexistují,* $\inf M = 0$ *a* $\sup M = 2$*.*

Příklad 4.7 *Zkuste uhádnout* $\sup M$, $\inf M$, $\max M$, $\min M$ *a následně své tipy dokažte:*

$$M = \left\{ \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(Řešení: $\min M = \inf M = 3/7$*,* $\sup M = 1/2$*, maximum neexistuje)*
Postup řešení: Tipneme si, že prvky množiny tvoří ostře rostoucí posloupnost, a minimum nastane pro $n = 1$*. Supremum si tipneme limitním přechodem* $n \longrightarrow +\infty$*, tj. tipneme* $\sup M = \frac{1}{2}$*. Důkaz:*

i. Minimum:

Ověříme, že minimum je rovno $\frac{3}{7}$*:*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n + 2} &\geq \frac{3}{7}, \\ 7 &\geq 3\left(\frac{1}{3}\right)^n + 6, \\ 1 &\geq 3\left(\frac{1}{3}\right)^n, \\ 3^n &\geq 3, \\ n &\geq 1. \end{aligned}$$

Minimum je tedy skutečně nabýváno pro $n = 1$ *a má hodnotu* $\frac{3}{7}$*.*

ii. Supremum:

Nejprve ověříme, zda je $\frac{1}{2}$ horní závorou:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n+2} &\leq \frac{1}{2},\\ 2 &\leq \left(\frac{1}{3}\right)^n+2,\\ 0 &\leq \left(\frac{1}{3}\right)^n.\end{aligned}$$

Jedna polovina je tedy skutečně horní závorou. Druhá podmínka suprema:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^n+2} &> \frac{1}{2}-\varepsilon,\\ \frac{2}{\left(\frac{1}{3}\right)^n+2} &> 1-2\varepsilon,\\ 2 &> (1-2\varepsilon)\left(2+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right),\\ 3^n &> \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}.\end{aligned}$$

Abychom mohli nerovnici zlogaritmovat, odhadneme výraz jeho absolutní hodnotou a současně v odhadu přičteme jedničku, abychom se vyvarovali logaritmování nuly (pro hodnotu $\varepsilon=\frac{1}{2}$). Platí

$$\begin{aligned}3^n &> \left|\frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}\right|+1 > \frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon},\\ n &> \log_3\left(\left|\frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}\right|+1\right).\end{aligned}$$

Vhodné n můžeme volit například takto:

$$n=\left\lfloor\left|\log_3\left(\left|\frac{1-2\varepsilon}{4\varepsilon}\right|+1\right)\right|\right\rfloor+1.$$

Příklad 4.8 *Zkuste uhádnout* $\sup M$, $\inf M$, $\max M$, $\min M$ *a následně své tipy dokažte:*

$$M=\left\{a+\frac{1}{a}\,\middle|\, a\in(0,1)\right\}.$$

(Řešení: $\inf M=2,\ \sup M=+\infty$*), minimum ani maximum neexistuje)*
Postup řešení: Hypotéza: na intervalu $(0,1)$ by mohla být funkce monotonní. Jdeme-li s a k nule (zprava), výraz jde k plus nekonečnu (tip na supremum), jdeme-li k jedničce, výraz jde ke dvojce (tip na infimum).

i. Infimum: Nejprve ověříme, zda je 2 dolní závorou:

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{a} &\geq 2, \\ a^2 - 2a + 1 &\geq 0, \\ (a-1)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Nerovnost platí, první podmínka infima splněna. Druhá podmínka má tvar

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{a} &< 2 + \varepsilon, \\ \frac{a^2+1}{a} - 2 &< \varepsilon, \\ \frac{a^2 - 2a + 1}{a} &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Nyní použijeme odhad, $a \in (0,1)$ platí tedy, že $a^2 < 1$,

$$\begin{aligned} \frac{a^2 - 2a + 1}{a} < \frac{1 - 2a + 1}{a} &< \varepsilon, \\ \frac{2 - 2a}{a} &< \varepsilon, \\ \frac{2}{2+\varepsilon} &< a. \end{aligned}$$

Pro splnění nerovnosti a současně zachování $a \in (0,1)$ stačí volit a jako průměr mezi spodní hranicí a jedničkou, tedy

$$a = \frac{1 + \frac{2}{2+\varepsilon}}{2} = \frac{\varepsilon + 4}{2(\varepsilon + 2)}.$$

ii. $\sup M = +\infty$*: chceme ukázat, že množina není shora omezená, tj.*

$$(\forall K \in \mathbb{R})(\exists a \in (0,1)) \left(a + \frac{1}{a} > K \right).$$

Platí

$$a + \frac{1}{a} > K \;\Leftrightarrow\; \frac{a^2+1}{a} > K.$$

Dále využijeme odhad $a^2 > 0$,

$$\frac{a^2+1}{a} > \frac{1}{a} > K.$$

Stačí tedy volit např. $a = \min\{\frac{1}{2|K|}, \frac{1}{2}\}$.

Příklad 4.9 *Zkuste uhádnout supremum, platnost své domněnky dokažte a rozhodněte, zda je supremum nabýváno:*

$$\sup\left\{\frac{n^2+3n+5}{1-2n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}.$$

(Řešení: $-\frac{23}{5}$, nabýváno pro $n=3$.)
Postup řešení:

Množinu označíme M a ukážeme, že $\sup M = -\frac{23}{5}$. Tuto hodnotu můžeme získat vyšetřováním monotonie posloupnosti tvořené prvky M. První podmínka má tvar

$$(\forall n\in N)\left(\frac{n^2+3n+5}{1-2n}\le -\frac{23}{5}\right).$$

Ekvivalentními úpravami dostáváme

$$\frac{n^2+3n+5}{1-2n}\le -\frac{23}{5}\Leftrightarrow 5(n^2+3n+5)\ge -23(1-2n)\Leftrightarrow 5n^2-31n+48\ge 0.$$

Nerovnice má diskriminant $D=9611-5\cdot 4\cdot 48=961-960=1$. Nulové body tedy jsou $n_1=3$ a $n_2=\frac{16}{5}$. Výše uvedená nerovnost tedy platí pro všechna přirozená čísla a pro $n=3$ dokonce platí rovnost. Našli jsme tedy maximum dané množiny, které je současně supremem.

Příklad 4.10 *Dokažte následující tvrzení a rozhodněte, zda je infimum nabýváno.*

$$\inf\left\{\frac{3x+1-2x^2}{x^2+5x}\,\middle|\, x\in\mathbb{R}^+\right\}=-2.$$

Postup řešení: Nejprve ukažme, že -2 je dolní závorou, tj. $(\forall x>0)\left(\frac{3x+1-2x^2}{x^2+5x}\ge -2\right)$.

Jednoduchými úpravami dostáváme

$$3x+1-2x^2\ge -2x^2-10x\Leftrightarrow 1\ge -13x,$$

a výrok tedy platí. Rovnost nenastává pro žádná přípustná x. Dále ověřujme druhou podmínku, tj.

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists x>0)(\frac{3x+1-2x^2}{x^2+5x}<-2+\varepsilon).$$

Převedením -2 na levou stranu zjistíme, že máme za úkol nalézt $x>0$ tak, že

$$\frac{3x+1-2x^2+2x^2+10x}{x^2+5x}=\frac{13x+1}{x^2+5x}<\varepsilon.$$

S využitím odhadu dostáváme

$$\frac{13x+1}{x^2+5x}\le\frac{13x+13\cdot 5}{x^2+5x}=\frac{13(x+5)}{x(x+5)}=\frac{13}{x}<\varepsilon.$$

Volíme tedy například $x:=\frac{13}{\varepsilon}+1$.

Příklad 4.11 *Zkuste uhádnout infimum a supremum následující množiny, platnost svých domněnek dokažte a rozhodněte, zda supremum a infimum jsou nabývána:*

$$\left\{(-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

(Řešení: $\sup M = 1$, $\inf M = -1$, *nejsou nabývána)*
Postup řešení:

- *Tipneme, že* $\sup M = 1$. *Musíme ověřit dvě podmínky:*

  i. $(\forall n \in \mathbb{N})\left((-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \leq 1\right)$*:*
  Pokud bude n *sudé, pak předcházející nerovnost přejde na tvar* $1 - \frac{1}{n} \leq 1$, *což jistě platí. Pro* n *liché dostáváme* $-1 + \frac{1}{n} \leq 1$, *která opět platí.*

  ii. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})\left((-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n} > 1 - \varepsilon\right)$*:*
  K danému ε *budeme* n *hledat mezi sudými čísly. Pro ně předcházející rovnice dostane výraz*

  $$1 - \frac{1}{n} - 1 > -\varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

  Volme tedy např. $n = 2\lfloor\frac{1}{\varepsilon}\rfloor + 2$.

- *Nyní ukážeme, že* $\inf M = -1$. *Opět musíme ukázat dvě podmínky:*

  i. $(\forall n \in \mathbb{N})\left((-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n} \geq -1\right)$*:*
  Pro n *sudé dostáváme nerovnost* $1 - \frac{1}{n} \geq -1$, *která platí pro každé* $n \in \mathbb{N}$. *Pokud je* n *liché pak dostáváme nerovnici* $-1 + \frac{1}{n} \geq -1$, *která také platí pro každé* n.

  ii. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})\left((-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n} < -1 + \varepsilon\right)$*:*

  Budeme hledat mezi lichými n. *Pak předcházející nerovnost přejde na tvar*

  $$-1 + \frac{1}{n} < -1 + \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

  Volme tedy $n = 2\lfloor\frac{1}{\varepsilon}\rfloor + 1$.

Příklad 4.12 *Dokažte následující tvrzení a rozhodněte, zda je infimum nebo supremum nabýváno.*

i. $\inf\{x^3 - x^2 - x + 2 \,|\, x \in \langle 0, 2\rangle\} = 1$,

ii. $\sup\{x^3 - x^2 - x + 2 \,|\, x \in \langle 0, 2\rangle\} = 4$.

(Řešení: Obě jsou nabývána)
Postup řešení:

i. *První podmínka infima má tvar*

$$x^3 - x^2 - x + 2 \geq 1.$$

Ekvivalentní úpravou lze převést na tvar

$$x^3 - x^2 - x + 1 \geq 0.$$

Pozorujeme, že ± 1 *jsou kořeny, po rozkladu (dělení polynomu polynomem) dostáváme nerovnost*

$$(x-1)^2(x+1) \geq 0.$$

Pro $x \in \langle 0, 2\rangle$ *předcházející nerovnost platí, navíc pro* $x = 1$ *nastává rovnost. Našli jsme tedy minimum (a tedy i infimum).*

ii. *První podmínka suprema má tvar*

$$x^3 - x^2 - x + 2 \leq 4.$$

Ekvivalentní úpravou lze převést na tvar

$$x^3 - x^2 - x - 2 \leq 0.$$

Opět se dá uhádnout kořen $x = 2$*. Po rozkladu na součin dostáváme*

$$(x^2 + x + 1)(x - 2) \leq 0.$$

Pro $x \in \langle 0, 2\rangle$ *je první závorka vždy kladná, druhá vždy nekladná. Rovnost nastává pro* $x = 2$*, našli jsme tedy maximum (a tedy i supremum).*

Příklad 4.13 *Zkuste uhádnout infimum a supremum následující množiny, platnost svých domněnek dokažte a rozhodněte, zda supremum a infimum jsou nabývána:*

$$M = \left\{ \frac{2n^2 + n + 11}{n^2 + 5} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(Řešení: $\inf M = 2$*,* $\sup M = \frac{7}{3}$*, supremum je nabýváno, infimum ne)*

- *Nejprve ukážeme, že* $\inf M = 2$*. Opět ověřujeme dvě podmínky:*

  i. $(\forall n \in \mathbb{N})\left(\frac{2n^2+n+11}{n^2+5} \geq 2\right)$*:*
  ekvivalentními úpravami dostáváme nerovnost $n + 11 \geq 10$*, která platí pro každé* $n \in \mathbb{N}$*. Rovnost nenastává pro žádné přirozené* n*.*

ii. $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in \mathbb{N})\left(\frac{2n^2+n+11}{n^2+5} < 2+\varepsilon\right)$*:*

Nerovnost upravíme na tvar

$$\frac{2n^2+n+11}{n^2+5} < 2+\varepsilon \Leftrightarrow \frac{n+1}{n^2+5} < \varepsilon.$$

Potom pomocí jednoduchých odhadů dostáváme,

$$\frac{n+1}{n^2+5} < \frac{n+1}{n^2} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n} < \varepsilon.$$

Stačí tedy volit $n = \lfloor \frac{2}{\varepsilon} \rfloor + 1$.

- *Nyní ukážeme, že* $\sup M = \frac{7}{3}$*. V tomto případě máme ukázat*

  i. $(\forall n \in \mathbb{N})\left(\frac{2n^2+n+11}{n^2+5} \leq \frac{7}{3}\right)$*:*
  Platí

$$\frac{2n^2+n+11}{n^2+5} \leq \frac{7}{3} \Leftrightarrow 6n^2+3n+33 \leq 7n^2+35,$$
$$\Leftrightarrow 0 \leq n^2-3n+2.$$

  Polynom na pravé straně má kořeny $n_1 = 1$ *a* $n_2 = 2$*. Vidíme tedy, že výrok platí. Zároveň nastává rovnost pro* $n = 1$ *či* $n = 2$*, a tedy supremum je nabýváno a maximum existuje.*

Příklad 4.14 *Tipněte si supremum a infimum množiny*

$$M = \left\{ x \in \mathbb{R}_0^+ \,\middle|\, \sin x \cos x = 0 \right\}.$$

Správnost svých tipů dokažte.
(Řešení: $\sup M = +\infty$, $\inf M = 0$*)*
Postup řešení: Uvažujeme $x \in \mathbb{R}_0^+$*, současně* $x = 0$ *zjevně řeší danou rovnost, minimum (a tedy i infimum) množiny je tedy 0. Rovnici dále vyhovují všechna řešení ve tvaru* $x = k\pi$*;* $k \in \mathbb{N}$ *(tam je* $\sin(x) = 0$*, všechna řešení rovnice jsou* $x = \frac{k\pi}{2}$*), supremum množiny je tedy plus nekonečno, což formálně dokážeme. Chceme ukázat:*

$$(\forall K \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}_0^+, \sin x \cos x = 0)(x > K).$$

V tomto případě stačí volit

$$x = (\lfloor |K| \rfloor + 1)\pi.$$

Příklad 4.15 *Buď*

$$M = \left\{ \sin \frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Určete, čemu se rovná $\inf M$ *a svou hypotézu dokažte. Může se hodit nerovnost* $\sin x \leq x$ *platná pro* $x \geq 0$.
(Řešení: $\inf M = 0$*)*
Postup řešení: Jdeme-li s $n \to +\infty$ *argument se blíží nule, tedy náš tip je* $\inf M = 0$. *Tuto hypotézu následně ověříme.*

i. První podmínka má tvar

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\sin\left(\frac{1}{n}\right) \geq 0).$$

Podmínka je splněna, neboť sinus je funkce kladná na intervalu $(0, \pi)$, *a tedy i na* $(0, 1\rangle$.

ii. Druhá podmínka má tvar

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n \in N)(\sin\left(\frac{1}{n}\right) < \varepsilon).$$

S využitím zmíněné nerovnosti dostáváme odhad

$$\sin\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Stačí tedy volit $n = \lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor + 1$.

Příklad 4.16 *Buď*

$$M_a = \{ax^2 + 2x - 3ax - 6 \,|\, x \in \mathbb{R}\}.$$

Určete, čemu se rovná $\inf M_a$ *a* $\sup M_a$ *v závislosti na parametru* $a \in \mathbb{R}$, *a svou hypotézu dokažte.*
(Řešení:

- $a = 0 : \sup M_a = +\infty, \inf M_a = -\infty,$
- $a > 0 : \sup M_a = +\infty, \inf M_a = -\frac{9a^2+12a+4}{4a},$
- $a < 0 : \sup M_a = -\frac{9a^2+12a+4}{4a}, \inf M_a = -\infty.$

)
Postup řešení:

- $a = 0$*: Množina má tvar*

$$M_0 = \{2x - 6 \,|\, x \in \mathbb{R}\}$$

Množina je zjevně neomezená, infimum tedy bude $-\infty$ *a supremum* $+\infty$*, což formálně dokážeme. Pro supremum je třeba pro každé* $K \in \mathbb{R}$ *najít* x *tak, aby platilo*

$$2x - 6 > K \Leftrightarrow x > \frac{K+6}{2}.$$

Volíme tedy například $x = \frac{K+6}{2} + 1$*. Podobně u infima pro každé* $D \in \mathbb{R}$ *hledáme* x *splňující*

$$2x - 6 < D \Leftrightarrow x < \frac{D+6}{2}.$$

Volíme tedy například $x = \frac{D+6}{2} - 1$*.*

- $a > 0$*: Množina představuje konvexní parabolu, její supremum tedy bude jistě* $+\infty$*, což následně ukážeme. Pro každé* $K \in \mathbb{R}$ *chceme najít* x *splňující*

$$ax^2 + 2x - 3ax - 6 > K \;\Leftrightarrow\; ax^2 + 2x - 3ax - 6 - K > 0.$$

Ze vzorce pro řešení kvadratické rovnice pro $K \geq -6$ *dostaneme, že vhodným* x *je např.*

$$x = \frac{3a - 2 + \sqrt{(2-3a)^2 + 4(6+K)a}}{2a} + 10.$$

Pro $K < -6$ *můžeme volit např.* $x = 0$*.*

Při hledání infima nejprve nalezneme vrchol paraboly. Ten se nachází v bodě

$$\left[\frac{3a-2}{2a}, -\frac{9a^2 + 12a + 4}{4a}\right],$$

jehož druhá souřadnice je náš kandidát na minimum (infimum). Tento tip dokážeme. První podmínka má tvar

$$\begin{aligned} ax^2 + 2x - 3ax - 6 &\geq -\frac{9a^2 + 12a + 4}{4a}, \\ 4a^2x^2 + (8a - 12a^2)x + (3a-2)^2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Diskriminant nerovnice je roven nule, dosazením zjistíme, že uvedená nerovnost platí. Současně pro $x = \frac{3a-2}{2a}$ *nastává rovnost, našli jsme tedy minimum, a tedy i infimum.*

- $a < 0$ *V tomto případě množina představuje konkávní parabolu, infimum tedy bude* $-\infty$ *a suprema bude nabýváno ve vrcholu paraboly. Formální důkaz by proběhl analogicky jako v případě* $a > 0$*.*

Příklad 4.17 *Mohou existovat dvě neprázdné podmnožiny $A, B \subset \mathbb{R}$ s vlastnostmi*

$$\sup A = \sup B, \quad \inf A = \inf B, \quad A \cap B = \emptyset?$$

(Řešení: ano, např. $A = \mathbb{Q}$ a $B = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$)
Postup řešení: Ano. Například A lichá celá čísla, B sudá celá čísla. Nebo racionální a iracionální čísla.

Příklad 4.18 *Dokažte, že pro $A, B \subset \mathbb{R}$ platí*

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}, \quad \inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}.$$

Diskutujte zvlášť případy, kdy A nebo B jsou prázdné či shora/zdola neomezené množiny.
Postup řešení:

i. $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$*:*
Nejprve diskutujme triviální případy. Pokud alespoň jedna množina je prázdná, např. $A = \emptyset$, pak $A \cup B = B$, $\sup A = -\infty$, $\max\{\sup A, \sup B\} = \sup B$. Rovnost tedy platí. Pokud jedna množina je neomezená shora, např. A, pak $\sup A = +\infty$, množina $A \cup B$ je taky neomezená a tvrzení opět triviální platí protože $\max\{+\infty, \sup B\} = +\infty$.

Nyní pro přehlednost definujme:

$$\sup A = \alpha,$$
$$\sup B = \beta.$$

Jelikož to jsou suprema, víme, že platí 4 podmínky:

$$(\forall x \in A)(x \leq \alpha), \tag{1}$$
$$(\forall \alpha' \in \mathbb{R}, \alpha' < \alpha)(\exists x \in A)(x > \alpha'), \tag{2}$$
$$(\forall x \in B)(x \leq \beta), \tag{3}$$
$$(\forall \beta' \in \mathbb{R}, \beta' < \beta)(\exists x \in A)(x > \beta'). \tag{4}$$

Případ ještě rozdělíme na 2 případy - buď $\alpha \geq \beta$ či $\alpha < \beta$. V prvním případě máme $\max\{\alpha, \beta\} = \alpha$ a máme ukázat, že $\sup\{A \cup B\} = \alpha$. Z podmínek (1) a (3) plyne

$$(\forall x \in A \cup B)(x \leq \alpha),$$

jelikož $\beta \leq \alpha$. Máme tedy dokázanou první podmínku suprema. V druhé podmínce máme ukázat, že

$$(\forall \alpha' \in \mathbb{R}, \alpha' < \alpha)(\exists x \in A \cup B)(x > \alpha').$$

Ta je splněna díky podmínce (2). *Ať nám totiž nepřítel dá libovolné* α' *hledané* $x \in A \cup B$ *najdeme v množině* A *podle podmínky* (2), *o které víme, že platí. Dokázali jsme tedy, že* $\sup\{A \cup B\} = \alpha$, *což jsme chtěli. V druhém případě, tj. kdy* $\beta > \alpha$ *postupujeme obdobně. Zrychleně tedy: máme dokázat, že* $\sup\{A \cup B\} = \beta$. *Opět spojením podmínek* (1) *a* (3) *dostáváme první podmínku suprema*

$$(\forall x \in A \cup B)(x \leq \beta),$$

jelikož $\beta > \alpha$. *Druhá podmínka suprema nyní plyne z podmínky* (4), *z ní totiž plyne*

$$(\forall \beta' \in \mathbb{R}, \beta' < \beta)(\exists x \in A \cup B)(x > \beta').$$

ii. $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$
Důkaz formálně stejný jako v případě suprem.

Příklad 4.19 *Buď* $A \subset \mathbb{R}$. *Definujme* $-A := \{-x | \, x \in A\}$. *Dokažte, že*

$$\sup -A = -\inf A, \quad \inf -A = -\sup A.$$

Postup řešení: Dokážeme, že $\sup -A = -\inf A$. *Pro přehlednost označme* $\inf A = \alpha$. *Pak z první podmínky infima máme*

$$(\forall x \in A)(x \geq \alpha).$$

Vynásobením nerovnosti číslem -1, *dostáváme výrok*

$$(\forall x \in A)(-x \leq -\alpha) \Leftrightarrow (\forall x \in -A)(x \leq -\alpha),$$

a tedy $-\alpha$ *je horní závorou množiny* $-A$. *Nyní ukážeme, že tato závora je nejmenší. Druhá podmínka* $\inf A = \alpha$ *říká, že*

$$(\forall \alpha' \in \mathbb{R}, \alpha' > \alpha)(\exists x \in A)(x < \alpha').$$

Tento výrok můžeme ekvivalentně přepsat:

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow (\forall \alpha' \in \mathbb{R}, \alpha' > \alpha)(\exists x \in A)(-x > -\alpha') \\
&\Leftrightarrow (\forall \alpha' \in \mathbb{R}, \alpha' > \alpha)(\exists x \in -A)(x > -\alpha') \\
&\Leftrightarrow (\forall -\alpha' \in \mathbb{R}, -\alpha' < -\alpha)(\exists x \in -A)(x > -\alpha'),
\end{aligned}$$

a tedy $-\alpha$ *je nejmenší horní závora.*

Druhá rovnost se dokáže obdobně.

4.2 Pojem posloupnost, vybraná posloupnost, monotonie posloupnosti

Příklad 4.20 *Pomocí kvantifikátorů zapište definici omezenosti posloupnosti, definici vybrané posloupnosti a definici skorovybrané posloupnosti. Tyto definice znegujte.*
(Řešení:

- *Posloupnost (a_n) je omezená právě tehdy, když platí*

$$(\exists K \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N})(|a_n| \leq K).$$

Negace:

$$(\forall K \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})(|a_n| > K)$$

.

- *Posloupnost (a_n) je vybraná z posloupnosti (b_n) právě tehdy, když platí*

$$(\exists (k_n),\ \{k_n\} \subset \mathbb{N} \wedge (\forall n \in \mathbb{N})(k_{n+1} > k_n))(\forall n \in \mathbb{N})(a_n = b_{k_n}).$$

Negace:

$$(\forall (k_n),\ \{k_n\} \subset \mathbb{N} \wedge (\forall n \in \mathbb{N})(k_{n+1} > k_n))(\exists n \in \mathbb{N})(a_n \neq b_{k_n})$$

.

- *Posloupnost (a_n) je skorovybraná z posloupnosti (b_n) právě tehdy, když platí*

$$(\exists (k_n),\ \{k_n\} \subset \mathbb{N} \wedge (\forall \alpha \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(a_n > \alpha))(\forall n \in \mathbb{N})(a_n = b_{k_n}).$$

Negace:

$$(\forall (k_n),\ \{k_n\} \subset \mathbb{N} \wedge (\forall \alpha \in \mathbb{R}^+)(\exists n_0 \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0)(a_n > \alpha))(\exists n \in \mathbb{N})(a_n \neq b_{k_n})$$

.

)

Příklad 4.21 *Rozhodněte o monotonii (ostrá/neostrá) a omezenosti posloupnosti (a_n), kde*

i. $a_n = \dfrac{n}{2^n}$,

ii. $a_n = n^3 - 5n^2$.

(Řešení: i. neostře klesající a omezená, ii. omezená zdola)
Postup řešení:

i. Řešíme-li monotonii $a_n = \dfrac{n}{2^n}$, *ptáme se, zda* $(\forall n \in \mathbb{N})(a_{n+1} \leq a_n)$. *Platí*

$$\frac{n+1}{2^{n+1}} \leq \frac{n}{2^n} \Leftrightarrow n+1 \leq 2n \Leftrightarrow n \geq 1.$$

Poslední nerovnost je pravdivá, a tedy pro každé n *přirozené platí* $a_{n+1} \leq a_n$. *Posloupnost je (neostře) klesající, protože platí* $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$.

Posloupnost je tedy omezená shora právě hodnotou $\frac{1}{2}$, *současně je omezená zdola, protože se jedná o posloupnost kladných čísel, tedy je omezena zdola nulou. Posloupnost je tedy omezená, neboť je omezená zdola i shora.*

ii. Řešíme-li monotonii $a_n = n^3 - 5n^2$, *opět se ptáme zda* $(\forall n \in \mathbb{N})(a_{n+1} \leq a_n)$. *Platí*

$$\begin{aligned}(n+1)^3 - 5(n+1)^2 &> n^3 - 5n^2,\\ n^3 - 2n^2 - 7n - 4 &> n^3 - 5n^2,\\ 3n^2 - 7n - 4 &> 0.\end{aligned}$$

Studujeme, kdy je nerovnost pravdivá. Kvadratický člen má za kořeny $n_+ = 2.81, n_- = -0.47$. *Nerovnost je splněna pro* $n \geq 3$, *a tedy pro tyto hodnoty* n *platí* $a_{n+1} > a_n$. *Takže zde je posloupnost ostře rostoucí. Pro* $n = 1, 2$ *je ostře klesající.* ***Celkově tedy posloupnost není monotonní.***

Posloupnost nabývá minima $a_3 = -18$, *a je tedy omezená zdola. Shora omezená není, neboť platí* $(\forall K \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N})(n^3 - 5n^2 > K)$. *Pokud odhadneme členy posloupnosti zdola, dostaneme* $n^3 - 5n^2 \geq n^2 > n > K$. *Kde u první nerovnosti požadujeme* $n \geq 6$. *Proto stačí volit* $n = \lfloor K \rfloor + 7$.

Příklad 4.22 *Rozhodněte o monotonii (ostrá/neostrá) a omezenosti posloupnosti* (a_n), *kde*

i. $a_n = \dfrac{2n+3}{n^2+3n+1}$,

ii. $a_n = (n - \sqrt{n})^n$.

(Řešení: i. ostře klesající a omezená, ii. ostře rostoucí a omezená zdola)
Postup řešení:

i. Nejprve vyřešíme monotonii. Ptáme se, zda platí $(\forall n \in \mathbb{N})(a_{n+1} \geq a_n)$, *tedy zda*

$$\begin{aligned}\frac{2n+5}{(n+1)^2+3n+4} &\geq \frac{2n+3}{n^2+3n+1},\\ n^2+4n+5 &\leq 0.\end{aligned}$$

Uvedená nerovnost nenastává pro žádné $n \in \mathbb{N}$. *Pro každé přirozené* n *tedy platí* $a_{n+1} < a_n$ *a z definice je to ostře klesající posloupnost. Maximum nabývá pro*

$n = 1$, *pro které* $a_1 = 1$, *a je tedy omezená shora. Posloupnost je zřejmě omezená zdola, a to například nulou - jedná se o posloupnost kladných členů. Posloupnost je tedy omezená.*

ii. Nejprve vyřešíme monotonii. Ptáme se, zda $(\forall n \in \mathbb{N})\,(a_{n+1} \geq a_n)$*:*

$$\begin{aligned} a_n = (n - \sqrt{n})^n &= (\sqrt{n}(\sqrt{n} - 1))^n \\ &< (\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1} - 1))^n \\ &= (n + 1 - \sqrt{n+1})^n \end{aligned} \tag{5}$$

Nyní pro $n \geq 2$ *platí, že výraz uvnitř závorky je větší než 1, a tedy platí nerovnost*

$$(n + 1 - \sqrt{n+1})^n < (n + 1 - \sqrt{n+1})^{n+1} = a_{n+1}.$$

Současně $a_1 = 0$ *a* $a_2 = (2-\sqrt{2})^2$*, což je jistě kladné číslo. Celkově tedy dostáváme, že se jedná o ostře rostoucí posloupnost. Jedná se o posloupnost kladných čísel, tedy je jistě omezena zdola (např. nulou). Zbývá tedy ukázat, že je neomezená shora, tj.* $(\forall K \in \mathbb{R})(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(a_n > K)$*. Platí odhad*

$$\left(n - \sqrt{n}\right)^n > n - \sqrt{n} > \sqrt{n}\left(\sqrt{n} - 1\right).$$

První nerovnost platí pro $n \geq 3$*, poslední výraz pak lze pro* $n \geq 5$ *odhadnout následovně*

$$\sqrt{n}\left(\sqrt{n} - 1\right) > \sqrt{n} > K.$$

Stačí tedy volit $n_0 = \max\{\lfloor K^2 \rfloor + 1, 5\}$*. Posloupnost tedy není omezená shora.*

Příklad 4.23 *Vyšetřete (stejnými metodami jako u posloupností) monotonii funkce*

$$f(x) = \frac{5x + 3}{2x - 2}.$$

(Řešení: ostře klesající na $(-\infty, 1)$ *a ostře klesající na* $(1, +\infty)$ *)*
Postup řešení: Vyšetřujeme monotonii funkce $f(x) = \frac{5x+3}{2x-2}$ *na jejím definičním oboru* $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$*. Předpokládejme, že* $x < y$ *a ukážeme, že platí* $f(x) > f(y)$ *:*

$$\begin{aligned} \frac{5x + 3}{2x - 2} &> \frac{5y + 3}{2y - 2}, \\ \frac{5}{2} + \frac{4}{x - 1} &> \frac{5}{2} + \frac{4}{y - 1}, \\ \frac{1}{x - 1} &> \frac{1}{y - 1}. \end{aligned}$$

Monotonii vyšetřujeme zvlášť na intervalech $(-\infty, 1)$ *a* $(1, +\infty)$*.*

- $(-\infty, 1)$*:*

  Vynásobením nerovnice zápornými čísly $x-1$ *a* $y-1$ *dostáváme* $y > x$*, což jsme předpokládali. Funkce je tedy na tomto intervalu ostře klesající.*

- $(1, +\infty)$*:*

  Podobně zde dostáváme vynásobením nerovnost $y > x$*, a tedy funkce je ostře klesající i na tomto intervalu.*

Příklad 4.24 *Vyšetřete (stejnými metodami jako u posloupností) monotonii funkce*

$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

(Řešení: ostře rostoucí na $\langle 1, \infty)$ *a na* $(-\infty, -1\rangle$*, ostře klesající na* $\langle -1, 0)$ *a na* $(0, 1\rangle$ *)*

Postup řešení: Funkce je lichá. Zaměříme, se tedy na řešení pro $x, y > 0$ *a* $x < y$*,*

$$\begin{aligned} x + \frac{1}{x} &< y + \frac{1}{y}, \\ x^2y + y &< xy^2 + x, \\ xy(x-y) &< (x-y), \\ (xy-1)(x-y) &< 0. \end{aligned}$$

Jelikož $x < y$*, pro platnost nerovnosti stačí, aby* $xy > 1$*. Řešení se opět rozpadá na dva případy.*

i. $x \geq 1$ *a z předpokladu* $y > x$ *pak zajisté platí,* $xy > 1$*, a tedy* $f(x) < f(y)$*. Funkce je ostře rostoucí na* $\langle 1, +\infty)$*.*

ii. $x \in (0, 1)$ *a* $y \in (x, 1\rangle$*:* $xy < 1$*, a funkce je tedy ostře klesající pro* $x \in (0, 1\rangle$*.*

Z lichosti funkce potom plyne, že na $(-\infty, -1\rangle$ *ostře roste a na* $\langle -1, 0)$ *ostře klesá.*

Příklad 4.25 *Vyšetřete (stejnými metodami jako u posloupností) monotonii funkce*

$$f(x) = \sqrt{3}\sin x + \cos x.$$

(Řešení: ostře rostoucí na intervalech $\langle -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\rangle$*,* $k \in \mathbb{Z}$ *a ostře klesající na intervalech* $\langle \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\rangle$*,* $k \in \mathbb{Z}$ *)*

Postup řešení: Funkci můžeme následujícím způsobem zjednodušit:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{3}\sin x + \cos x \\ &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) \\ &= 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \end{aligned}$$

Funkce $\sin(x)$ *je rostoucí na intervalech* $\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle$, *kde* $k \in \mathbb{Z}$, *a klesající na intervalech* $\langle \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi\rangle$, *kde* $k \in \mathbb{Z}$. *Pak* $2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ *je rostoucí na*

$$\langle -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\rangle, \ k \in \mathbb{Z},$$

a klesající na

$$\langle \frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{4\pi}{3} + 2k\pi\rangle, \ k \in \mathbb{Z}.$$

Příklad 4.26 *Vyšetřete (stejnými metodami jako u posloupností) monotonii funkce*

$$f(x) = \operatorname{arctg} \frac{|\ln x|}{\ln x - 1}.$$

(Řešení: ostře klesající na $\langle 1, e)$ *a na* $(e, +\infty)$, *ostře rostoucí na* $(0, 1\rangle$ *)*
Postup řešení: Funkce arctg *je ostře rostoucí na* $\mathbb{R}$, ln *je ostře rostoucí na* $\mathbb{R}^+$. *Řešení rozdělíme na dva případy.*

- $(0, 1\rangle$*: předpokládáme* $x, y \in (0, 1\rangle$, $x < y$. *Pak*

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{arctg}\left(-\frac{\ln x}{\ln x - 1}\right) \\ &= \operatorname{arctg}\left(-1 + \frac{1}{-\ln x + 1}\right) \\ &< \operatorname{arctg}\left(-1 + \frac{1}{-\ln y + 1}\right) = f(y). \end{aligned}$$

  Poslední nerovnost platí, neboť $\frac{1}{-\ln x+1} < \frac{1}{-\ln y+1}$ *a funkce tedy na tomto intervalu ostře roste.*

- $(1, e)$ *nebo* $(e, +\infty)$*: předpokládáme* $x, y \in (1, e)$ *nebo* $x, y \in (e, +\infty)$ *a v obou případech* $x < y$. *Pak:*

$$\begin{aligned} f(x) &= \operatorname{arctg}\left(\frac{\ln x}{\ln x - 1}\right) \\ &= \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{\ln x - 1}\right) \\ &> \operatorname{arctg}\left(1 + \frac{1}{\ln y - 1}\right). \end{aligned}$$

  Poslední nerovnost rovněž platí, neboť $\frac{1}{\ln x-1} > \frac{1}{\ln y-1}$, *a funkce je tedy na těchto intervalech ostře klesající.*

Příklad 4.27 *Buďte (a_n), (b_n) rostoucí posloupnosti. Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků*

i. $(a_n + b_n)$ *je rostoucí*

ii. (a_n^2) *je rostoucí*

iii. $(a_n b_n)$ *je rostoucí*

Pokud výrok neplatí, doplňte (minimální) předpoklady tak, aby se stal pravdivým.
(Řešení: i. platí, ii. neplatí, ale platí pokud (a_n) je posloupnost nezáporných čísel, iii. neplatí, ale platí pokud (a_n) a (b_n) jsou posloupnosti nezáporných čísel)
Postup řešení:

i. Předpokládáme, že (a_n) i (b_n) jsou rostoucí posloupnosti, tedy $a_n \leq a_{n+1}$ a $b_n \leq b_{n+1}$. Sečtením těchto nerovností dostáváme

$$a_n + b_n \leq a_{n+1} + b_{n+1},$$

což dokazuje, že i posloupnost $(a_n + b_n)$ je rostoucí.

ii. Tvrzení neplatí, uvažujme například posloupnost $a_n = -\frac{1}{n}$. Ta je jistě rostoucí, ale současně $a_n^2 = 1/n^2$ je posloupnost klesající. Výrok je pravdivý za předpokladu, že a_n je posloupnost nezáporných čísel. Za tohoto předpokladu můžeme umocnit nerovnici $a_n \leq a_{n+1}$ a dostáváme $a_n^2 \leq a_{n+1}^2$, což dokazuje tvrzení.

iii. Tvrzení opět neplatí. Jakožto protipříklad nám opět může posloužit posloupnost $a_n = b_n = -\frac{1}{n}$. Výrok je pravdivý za předpokladu, že obě posloupnosti jsou nezáporné. Předpokládejme tedy, že jsou nezáporné. Potom

$$b_n \leq b_{n+1}$$
$$a_n b_n \leq a_n b_{n+1} \leq a_{n+1} b_{n+1},$$

což dokazuje tvrzení.

Příklad 4.28 *Určete, v jakých případech je posloupnost (b_n) vybraná (případně skoro vybraná) z posloupnosti (a_n).*

i. $a_n = c^{\sqrt{n}}, \quad b_n = c^n \ (c > 0, c \neq 1)$,

ii. $a_n = c^n, \quad b_n = c^{4n+3(-1)^n} \ (c > 0, c \neq 1)$,

iii. $a_n = c^n, \quad b_n = c^{n+(-1)^n} \ (c > 0, c \neq 1)$.

(Řešení: i) vybraná, ii) skorovybraná, iii) nic)
Postup řešení:

- *Zvolme $k_n = n^2$, tedy (k_n) je ostře rostoucí posloupnost. Z definice vybrané posloupnosti je tedy $(b_n) = (a_{k_n}) = (c^n)$ vybraná z $(a_n) = (c^{\sqrt{n}})$.*

- (k_n), *kde* $k_n = 4n + 3(-1)^n$, *není monotónní, a tedy* (b_n) *není vybranou z* (a_n). *Ale* $(\forall n \in \mathbb{N})(k_n = 4n + 3(-1)^n \in \mathbb{N})$, *a je tedy skorovybraná.*

- (k_n), *kde* $k_n = n + (-1)^n$ *není monotónní, a tedy* (b_n) *není vybranou z* (a_n). *A není ani skorovybraná, neboť pro* $n = 1$ *je* $k_1 = 0 \notin \mathbb{N}$.

Příklad 4.29 *Určete, v jakých případech je posloupnost* (b_n) *vybraná (případně skoro vybraná) z posloupnosti* (a_n).

i. $a_n = n, \quad b_n = \dfrac{4n^2 + 4n + 1}{2n + 1}$

ii. $a_n = \dfrac{n + 5}{n + 2}, \quad b_n = \dfrac{(n + 1)!/2 + 5}{(n + 1)!/2 + 2}$

iii. $a_n = \dfrac{n + 5}{n + 2}, \quad b_n = \dfrac{n^{3/2} + 5}{n^{3/2} + 2}$

(Řešení: i) vybraná, ii) vybraná, iii) nic)
Postup řešení:

- $b_n = \frac{4n^2+4n+1}{2n+1} = \frac{(2n+1)^2}{2n+1} = 2n + 1 = a_{2n+1}$. *Tedy z definice* $k_n = 2n + 1$, *což je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel, a* (b_n) *je tedy vybraná z* (a_n).

- $b_n = \frac{(n+1)!/2+5}{(n+1)!/2+2} = a_{\frac{(n+1)!}{2}}$. *Tedy z definice* $k_n = \frac{(n+1)!}{2}$, *což je ostře rostoucí posloupnost přirozených čísel, a* (b_n) *je tedy vybraná z* (a_n).

- $b_n = \frac{n^{3/2}+5}{n^{3/2}+2} = a_{n^{3/2}}$. *Tedy* $k_n = n^{3/2}$ *je sice ostře rostoucí posloupnost, ale ne přirozených čísel. Není tedy vybraná ani skorovybraná.*

Příklad 4.30 *Dokažte, že každá prostá posloupnost přirozených čísel má ostře rostoucí podposloupnost.*
Postup řešení: Ukážeme postup jak danou podposloupnost nalézt. Označme prostou posloupnost přirozených čísel (a_n) *a hledanou posloupnost* (b_n). *Definujme* $b_1 = a_1$. *Další členy definujeme postupným procházením posloupnosti* (a_n) *dokud nenalezneme člen s vyšší hodnotou než je posledně definovaný člen posloupnosti* (b_n). *Jelikož posloupnost* a_n *je prostá, vyšší hodnotu vždy musíme najít. Pseudo-algoritmus je popsán v Algoritmus 1 .*

Algorithm 1:

Vstup : a_n přirozená prostá posloupnost.
Výstup: b_n ostře rostoucí podposloupnost.

```
1  Definuj b_1 = a_1. Polož n = 2.
2  while n < +∞ do
3  |  j = n
4  |  while j < +∞ do
5  |  |  if a_j > b_{n-1} then
6  |  |  |  break
7  |  |  end
8  |  |  j = j + 1
9  |  end
10 |  Polož b_n = a_j a n = n + 1.
11 end
```