13 Třináctý týden

13.1 Konkávnost a konvexnost

Příklad 13.1 *Dokažte, že následující definice konvexnosti funkce f na intervalu I jsou ekvivalentní.*

i. $(\forall x_1, x_2, x_3 \in I, x_1 < x_2 < x_3)(\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1})$

ii. $(\forall \lambda \in \langle 0,1\rangle)(\forall x, y \in I)(f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y))$

iii. $(\forall x_1, \ldots, x_n \in I)(\forall \lambda_1, \ldots \lambda_n \in \langle 0,1\rangle, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1)(f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) \leq \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f(x_k))$

Obdobné ekvivalence lze dokázat i pro konkávnost.
Postup řešení: Dokážeme sérii implikací:

- *ii* $\Leftrightarrow$ *i: Položme*

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \lambda x + (1-\lambda)y \\ x_3 &= y \end{aligned}$$

Tedy $\lambda = \frac{x_2-x_3}{x_1-x_3}$ *a* $1-\lambda = \frac{x_1-x_2}{x_1-x_3}$. *Pak platí serie ekvivalencí:*

$$\begin{aligned} ii. &\Leftrightarrow f(x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_3) \\ &\Leftrightarrow f(x_2) \leq \frac{x_2-x_3}{x_1-x_3} f(x_1) + \frac{x_1-x_2}{x_1-x_3} f(x_3) \\ &\Leftrightarrow (x_3-x_1)f(x_2) \leq (x_3-x_2)f(x_1 + (x_2-x_1)f(x_3) \\ &\Leftrightarrow (x_3-x_1)f(x_2) \leq (x_3 - x_1 + x_1 - x_2)f(x_1 + (x_2-x_1)f(x_3) \\ &\Leftrightarrow (x_3-x_1)f(x_2) - (x_3-x_1)f(x_1) \leq (x_1-x_2)f(x_1) + (x_2-x_1)f(x_3) \\ &\Leftrightarrow \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \\ &\Leftrightarrow i. \end{aligned}$$

- *iii.* $\Longrightarrow$ *ii. : zřejmě, pouze stačí vzít* $n = 2$.
- *ii.* $\Longrightarrow$ *iii. : dokážeme indukcí na* n. *Pro* $n = 1, 2$ *implikace jistě platí jistě platí.*

Pak

$$\begin{aligned} f\left(\sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k x_k\right) &= f\left(\lambda_{n+1}x_{n+1} + (1-\lambda_{n+1})\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k x_k}{1-\lambda_{n+1}}\right) \\ &\overset{ii.}{\leq} \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) + (1-\lambda_{n+1})f\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k x_k}{1-\lambda_{n+1}}\right) \\ &\overset{IP}{\leq} \lambda_{n+1}f(x_{n+1}) + (1-\lambda_{n+1})\sum_{k=1}^{n}\frac{\lambda_k}{1-\lambda_{n+1}}f\left(x_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1}\lambda_k f\left(x_k\right), \end{aligned}$$

kde v první nerovnost jsme využili ii. a v druhé nerovnosti indukční předpoklad.

Příklad 13.2 *S využitím konvexnosti nebo konkávnosti dokažte, že pro všechna kladná čísla $x_1, \ldots, x_n$, kde $n \in \mathbb{N}$, platí*

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leq \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

Postup řešení: Využije funkci $f(x) = x^2$. Tato funkce je jistě konvexní na $\mathbb{R}$ a platí pro ni tedy iii. vlastnost z minulého příkladu. Pokud definujeme $\lambda_k = \frac{1}{n}$ pro $k \in \widehat{n}$ dostáváme

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}x_k\right)^2 \overset{iii.}{\leq} \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}x_k^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^2.$$

Odmocněním již získáváme hledanou nerovnost.

Příklad 13.3 *S využitím konvexnosti nebo konkávnosti dokažte, že pro všechna kladná čísla $x_1, \ldots, x_n$, kde $n \in \mathbb{N}$, platí*

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n).$$

Postup řešení: Využijeme funkci $f(x) = \ln x$. Tato funkce je konkávní na $(0, +\infty)$ a platí pro ti tedy nerovnost

$$\ln\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k x_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n}\lambda_k \ln(x_k),$$

kde $\sum_{k=1}^{n}\lambda_k = 1$. Opět definujeme $\lambda_k = \frac{1}{n}$ pro $k \in \widehat{n}$. Pak s využitím vlastností logaritmů dostáváme

$$\ln\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ x_k\right) \geq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\ln x_k = \sum_{k=1}^{n}\ln x_k^{\frac{1}{n}} = \ln\left(\prod_{k=1}^{n}x_k^{\frac{1}{n}}\right).$$

Jelikož logaritmus je rostoucí funkce, je předcházející nerovnost ekvivalentní s

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\, x_k \geq \prod_{k=1}^{n} x_k^{\frac{1}{n}},$$

což je již hledaná nerovnost.

Příklad 13.4 *Nalezněte maximální intervaly, na kterých je následující funkce (ryze) konvexní/konkávní:*

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

(Řešení: ryze konvexní na $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$ a na $\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$, ryze konkávní na $\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$)
Postup řešení: Definiční obor funkce je $D_f = \mathbb{R}$. Pro $x \in D_f$ platí

$$f'(x) = -2xe^{-x^2},$$
$$f''(x) = 2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right) = 2e^{-x^2}\left(\sqrt{2}x - 1\right)\left(\sqrt{2}x - 1\right).$$

Pozorujeme, že máme dva inflexní body: $x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ a $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. Jelikož $f''(x) > 0$ pro $x \in (-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ je funkce na ryze konvexní na $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$ a na $\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$. Na intervalu $\langle -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$ je funkce ryze konkávní.

Příklad 13.5 *Nalezněte maximální intervaly, na kterých je následující funkce (ryze) konvexní/konkávní:*

$$f(x) = x\sin(\ln x).$$

(Řešení: ryze konvexní na $\langle e^{\frac{-3\pi}{4}+2k\pi}, e^{\frac{-\pi}{4}+2k\pi}\rangle$, ryze konkávní na $\langle e^{\frac{-\pi}{4}+2k\pi}, e^{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}\rangle$ pro $k \in \mathbb{Z}$)
Postup řešení: Definiční obor funkce je $D_f = \mathbb{R}^+$. Pro $x \in D_f$ platí

$$f'(x) = \sin(\ln x) + \cos(\ln x),$$
$$f''(x) = \frac{\cos(\ln x) - \sin(\ln x)}{x} = \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{\cos\left(\ln x + \frac{\pi}{4}\right)}{x}.$$

Jmenovatel je vždy kladný, o znaménku druhé derivace tedy rozhodne čitatel. Funkce bude ryze konvexní pokud

$$\ln x + \frac{\pi}{4} \in \langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\rangle$$

tedy pro $x \in \langle e^{\frac{-3\pi}{4}+2k\pi}, e^{\frac{-\pi}{4}+2k\pi}\rangle$, $k \in \mathbb{Z}$. Na intervalech $\langle e^{\frac{-\pi}{4}+2k\pi}, e^{\frac{5\pi}{4}+2k\pi}\rangle$ je funkce ryze konkávní.

Příklad 13.6 *Nalezněte maximální intervaly, na kterých je následující funkce (ryze) konvexní/konkávní:*

$$f(x) = \arcsin|x|.$$

(Řešení: ryze konvexní na $\langle -1, 1\rangle$)

Definiční obor funkce je roven $D_f = \langle -1, 1\rangle$. Jelikož funkce f je sudá funkce, stačí vyšetřit na intervalu $(0, 1)$. Pro $x \in (0, 1)$ platí

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
$$f''(x) = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}.$$

Tedy $f''(x) > 0$ na $(0, 1)$ z čehož plyne, že f je ryze konvexní na $\langle 0, 1\rangle$. Ze sudosti můžeme říci, že f je ryze konvexní na $\langle -1, 1\rangle$.

13.2 Důkazy nerovností

Příklad 13.7 *Dokažte nerovnosti*

$$\frac{2}{\pi}x < \sin x < x < \operatorname{tg} x$$

pro $x \in (0, \pi/2)$.
Postup řešení: Postupně ukážeme tři nerovnosti.

- *Nejprve ukážeme, že $\sin x < x$ pro daná x. Definujme funkci $h(x) = \sin x - x$. Pokud ukážeme, že $h(x) < 0$, je druhá nerovnost dokázána. Pro daná x platí*

  $$h'(x) = \cos x - 1 < 0.$$

  Funkce $h(x)$ je tedy ostře klesající. Zároveň $h(0) = 0$. Celkově tedy pro daná x platí

  $$h(x) < 0 \Leftrightarrow \sin x < x.$$

- *Obdobně ukážeme, že $x < \operatorname{tg} x$. Definujme funkci $s(x) = x - \operatorname{tg} x$. Pak pro daná x platí*

  $$s'(x) = \frac{-\sin^2 x}{\cos^2 x} < 0.$$

  Funkce s je ostře klesající a opět platí $s(0) = 0$. Celkově jsme zjistili $s(x) < 0 \Leftrightarrow x < \operatorname{tg} x$, což je dokazovaná nerovnost.

- *Zbývá dokázat první nerovnost. Jedna možnost je nakreslit grafy funkcí. Tyto funkce mají průsečíky v bodech $[0, 0]$ a $[1, 1]$. A jelikož funkce $\sin x$ je na daném intervalu ryze konkávní, musí platit $\sin x > \frac{2}{\pi}x$. Druhá možnost je opět přes diferenciální počet. Definujme funkci $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Pro její derivaci platí*

  $$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2},$$

kde $g(x) = x\cos x - \sin x$. *Jelikož* $g'(x) = -x\sin x < 0$ *pro* $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, *je funkce* $g(x)$ *ostře klesající a zároveň* $g(0) = 0$. *Proto* $g(x) < 0$ *pro* $x \in (0, \frac{\pi}{2})$. *Jelikož* $g(x) < 0$ *je i* $f' < 0$ *a tedy i funkce* f *je klesající. Pak pro* $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ *získáváme*

$$\frac{\sin x}{x} = f(x) \geq f(\pi/2) = \frac{2}{\pi}.$$

Nyní již stačí vynásobit tuto nerovnost nenulovým x *a máme hledanou nerovnost.*

Příklad 13.8 *Dokažte nerovnost*

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x$$

pro $x > 0$. *(Pozn: jedná se o optimální odhad polynomem nejvýše třetího stupně na kladné poloose, neboť* $\sin x = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} (-1)^n x^{2n+1}/((2n+1)!)$.*)*
Postup řešení: Definujme $f(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin x$. *Ukážeme, že* $f(x) < 0$ *pro daná* x. *Pro derivaci* f *platí*

$$f'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x,$$

Chtěli bychom ukázat, že $f'(x) < 0$. *To opět ukážeme přes diferenciální počet. Pro druhou derivaci platí*

$$f''(x) = -x + \sin x < 0,$$

kde nerovnost $\sin x < x$ *máme k dispozici z minulého příkladu. Tedy funkce* $f'(x)$ *je ostře klesající, zároveň* $f'(0) = 0$. *Celkem tedy* $f'(x) < 0$ *na daném intervalu, tedy původní funkce* $f(x)$ *je také ostře klesající. Zároveň* $f(0) = 0$, *tedy opravdu platí* $f(x) < 0$ *pro daná* x.

Příklad 13.9 *Dokažte nerovnost*

$$2x < \sin x + \operatorname{tg} x,$$

pro $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
Postup řešení: Označme $f(x) = 2x - \sin x - \operatorname{tg} x$ *a ukážeme, že* $f(x) < 0$. *Pro daná* x *platí*

$$f'(x) = 2 - \cos x - \frac{1}{\cos^2 x} = 2 - \left[\cos x + \frac{1}{\cos^2 x}\right] \overset{AG}{\geq} 2 - 2\sqrt{\frac{1}{\cos x}} = 2\left[1 - \frac{1}{\sqrt{\cos x}}\right] < 0,$$

kde jsme využili AG nerovnost $\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{ab}$ *platnou pro libovolná kladná čísla. Funkce* $f(x)$ *je tedy jistě klesající a* $f(0) = 0$. *Celkově tedy dostáváme, že* $f(x) < 0$ *pro* $x \in (0, \frac{\pi}{2})$, *což jsme chtěli ukázat.*

13.3 Průběhy funkcí

Poznámka 13.1 *Vyšetřit průběh funkce zejména obnáší nalézt:*

- *definiční obor, obor hodnot,*
- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty (např limity v nekonečnech),*
- *případnou sudost, lichost, periodicitu,*
- *spojitost, druhy bodů nespojitosti,*
- *existenci asymptot (svislých i těch v nekonečnech),*
- *monotonii funkce (intervaly monotonie), lokální extrémy,*
- *konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body,*
- *nakreslit graf funkce.*

Příklad 13.10 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = \frac{x^4}{(x+1)^3}.$$

Postup řešení: Budeme postupovat dle seznamu na začátku sekce:

- *definiční obor:*

  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty:*

  Jelikož

  $$x = 0 \implies f(x) = 0,$$
  $$f(x) = 0 \implies x = 0,$$

  je jediný průsečík bod $[0.0]$. *Pro limity v zajímavých bodech platí*

  $$\lim_{x \to +\infty} = +\infty,$$
  $$\lim_{x \to -\infty} = -\infty,$$
  $$\lim_{x \to -1+} = +\infty,$$
  $$\lim_{x \to -1-} = -\infty.$$

- *případnou sudost, lichost, periodicitu:*

  Funkce nemá žádnou z těchto vlastností.

- *spojitost, druhy bodů nespojitosti:*

  Funkce je spojitá ve všech bodech definičního oboru. V $x = -1$ *je nespojitost druhého druhu.*

- *existenci asymptot:*

  Existuje svislá asymptota $x = -1$*. Pro klasické platí:*

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4}{x(x+1)^3} = 1,$$
$$k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4}{x(x+1)^3} = 1,$$
$$q_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^4}{(x+1)^3} - x = -3,$$
$$q_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^4}{(x+1)^3} - x = -3.$$

  Existuje tedy jedna asymptota $y = x - 3$*.*

- *monotonii funkce, lokální extrémy:*

  Pro $x \in D_f$ *platí*

$$f'(x) = \frac{x^3(x+4)}{(x+1)^2}.$$

  Máme tedy dva podezřelé body z extrému $x = 0$ *a* $x = -4$*. Jelikož* $f'(x) > 0$ *pro* $x < -4$*,* $f'(x) < 0$ *pro* $x \in (-4, 0) \setminus \{-1\}$*,* $f'(x) > 0$ *pro* $x > 0$*. Funkce tedy ostře roste na* $(-\infty, -4)$*, klesá na* $(-4, -1)$*, klesá na* $(-1, 0)$ *a opět roste na* $(0, +\infty)$*. Tedy v bodě* -4 *je ostré lokální maximum* $f(-4) = -\frac{256}{27}$*. V* $x = 0$ *je ostré lokální minimum* $f(0) = 0$*.*

- *konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body:*

  Pro $x \in D_f$ *platí:*

$$f''(x) = 12\frac{x^2}{(x+1)^5} -$$

  Pak $f''(x) > 0$ *pro* $x > -1$ *a* $f''(x) < 0$ *pro* $x < -1$*. Funkce je tedy ryze konvexní na* $\langle -1, +\infty)$ *a ryze konkávní na* $(-\infty, -1\rangle$*.*

- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 1.*

Příklad 13.11 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = (x-3)\sqrt{x}.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*
$$D_f = \mathbb{R}_0^+$$
- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty:*

  Platí
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 3,$$
$$x = 0 \Rightarrow f(x) = 0.$$

  Průsečíky s osami tedy jsou $[0, 0]$ *(bod dotyku) a* $[3, 0]$*. Pro limitu v plus nekonečnu platí* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- *sudost, lichost, periodicita:*

  Funkce nemá žádnou z těchto vlastností.
- *spojitost, druhy bodů nespojitosti:*

  Funkce je spojitá ve všech bodech D_f.
- *existence asymptot Svislá asymptota neexistuje, v* $+\infty$ *máme*
$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \notin \mathbb{R}.$$

  Funkce tedy nemá žádnou asymptotu.
- *monotonie funkce, lokální extrémy:*

  Protože $f(x) = x^{\frac{3}{2}} - 3x^{\frac{1}{2}}$*, pak pro* $x > 0$ *platí*
$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\frac{x-1}{\sqrt{x}}$$

  Z Darbouxovy věty získáme, že $f'(0) = -\infty$*. Jediný podezřelý bod z extrému tedy je* $x = 1$*. Zároveň* $f'(x) < 0$ *pro* $x \in (0, 1)$*,* f *je tedy na* $\langle 0, 1\rangle$ *ostře klesající. Naopak* $f'(x) > 0$ *pro* $x \in (1, +\infty)$*, a* f *je na* $\langle 1, +\infty)$ *ostře rostoucí. Podezřelý bod z extrému* $x = 1$ *je tedy ostré lokální minimum.*
- *konvexnost, konkávnost, inflexní body:*

  Pro $x > 0$ *platí*
$$f''(x) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^{2/3}}\right)$$

  Funkce je na $\langle 0, +\infty)$ *ryze konvexní.*
- *obor hodnot:*

  Z výpočtů plyne, že $H_f = \langle f(1), +\infty) = \langle -2, +\infty)$
- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 1.*

Příklad 13.12 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = \frac{|1+x|^{3/2}}{\sqrt{x}}.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*
$$D_f = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$$
Pozorujeme, že můžeme psát $f(x) = \frac{(1+x)^{3/2}}{\sqrt{x}}$.
- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty: Platí*
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \notin D_f,$$
$$x = 0 \notin D_f.$$
Funkce nemá průsečík s žádnou osou. Pro limity v zajímavých bodech platí
$$\lim_{x\to+\infty} = +\infty,$$
$$\lim_{x\to 0+} = +\infty.$$
- *sudost, lichost, periodicita:*

  Funkce nemá žádnou z těchto vlastností.
- *spojitost, druhy bodů nespojitosti*
  Funkce je spojitá ve všech bodech D_f
- *existence asymptot:*
  Existuje svislá asymptota $x = 0$. *Pro asymptotu v* $+\infty$ *platí*
$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \in \mathbb{R}$$
$$q = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 1\cdot x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+x)^{3/2} - x^{3/2}}{x^{1/2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1+x)^3 - x^3}{x^{1/2}((1+x)^{3/2} + x^{3/2})}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1 + x^3 + 3x^2 + 3x - x^3}{x^{1/2}((1+x)^{3/2} + x^{3/2})} = \frac{3}{2}.$$
  Funkce tedy má asymptotu v $+\infty$ *o rovnici* $y(x) = x + \frac{3}{2}$.
- *monotonie funkce, lokální extrémy:*
  Pro $x > 0$ *platí*
$$f'(x) = \frac{(2x-1)\sqrt{1+x}}{x^{3/2}}.$$

Jediný podezřelý bod z extrému je $x = \frac{1}{2}$. Zároveň pozorujeme, že $f'(x) < 0$ pro $x \in (0, \frac{1}{2})$ a f je na $(0, \frac{1}{2}\rangle$ ostře klesající,$f'(x) > 0$ pro $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$ a tedy f je na $\langle\frac{1}{2}, +\infty)$ ostře rostoucí. Z výše uvedeného (monotonie) plyne, že $x = \frac{1}{2}$ je bodem ostrého lokálního minima.

- *konvexnost, konkávnost, inflexní body:*

  Pro $x > 0$ platí

  $$f''(x) = \frac{3}{4x^{5/2}\sqrt{1+x}}.$$

  Funkce je tedy na $(0, +\infty)$ ryze konvexní. Inflexní body na tomto intervalu neexistují.

- *obor hodnot: z výpočtů plyne, že $H_f = \langle f(\frac{1}{2}), +\infty) = \langle\frac{3\sqrt{3}}{2}, +\infty)$*
- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 1.*

Příklad 13.13 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = e^{-x} + x.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*

  $D_f = \mathbb{R}$

- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty:*

  Platí

  $$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = -e^{-x} \Rightarrow x \notin \mathbb{R},$$
  $$x = 0 \Rightarrow f(x) = 1.$$

  Rovnice $e^{-x} = -x$ nemá řešení, jelikož $e^x > x$ pro všechna $x \in \mathbb{R}$. Funkce má průsečík s osou y v bodě $[0, 1]$. Pro limity v nekonečnech platí $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

- *sudost, lichost, periodicita:*
  Funkce nemá žádnou z těchto vlastností.
- *spojitost, druhy bodů nespojitosti*
  Funkce je spojitá ve všech bodech D_f
- *existence asymptot:*

Svislá asymptota neexistuje. Pro asymptoty v nekonečnech platí

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{x} + 1 = 1 \in \mathbb{R}$$
$$q_1 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = 0,$$
$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} = \frac{e^{-x}}{x} + 1 = +\infty \notin \mathbb{R}$$

Funkce tedy má asymptotu v $+\infty$ danou rovnicí $y = x$.

- *monotonie funkce, lokální extrémy:*

  Pro $x \in D_f$ platí
  $$f'(x) = 1 - e^{-x} = 0.$$
  Jediný podezřelý bod z extrému je $x = 0$. Zároveň $f'(x) < 0$ pro $x \in (-\infty, 0)$ a f je tedy na $(-\infty, 0\rangle$ ostře klesající. Dále $f'(x) > 0$ pro $x \in (0, +\infty)$ a f je na $\langle 0, +\infty)$ ostře rostoucí. Z výše uvedeného (monotonie) plyne, že $x = 0$ je bodem ostrého lokálního minima (dokonce globálního).

- *konvexnost, konkávnost, inflexní body:*

  Pro $x \in D_f$ platí
  $$f''(x) = e^{-x}.$$
  Funkce je na celém D_f ryze konvexní. Inflexní body na tomto intervalu neexistují.

- *obor hodnot: z výpočtů plyne, že $H_f = \langle f(0), +\infty) = \langle 1, +\infty)$.*

- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 1.*

Příklad 13.14 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = x + \operatorname{arctg} x.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*

  $D_f = \mathbb{R}$

- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty: Platí*
  $$f(x) = 0 \implies x = 0,$$
  $$x = 0 \implies f(x) = 0.$$
  Funkce má průsečík s osou y a osou x v bodě $[0, 0]$. Pro limity v nekonečnech platí
  $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

- *sudost, lichost, periodicita:*

  Jelikož
  $$f(-x) = -x \operatorname{arctg}(-x) = -(x + \operatorname{arctg} x) = -f(x),$$
  je funkce lichá.

- *spojitost, druhy bodů nespojitosti:*

  Funkce je spojitá ve všech bodech D_f.

- *existence asymptot Svislá asymptota neexistuje. Pro asymptoty v nekonečnech platí*
  $$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1 \in \mathbb{R} \\ q_1 &= \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} \in \mathbb{R} \\ k_2 &= \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 1 + \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1 \in \mathbb{R} \\ q_2 &= \lim_{x\to-\infty} (f(x) - 1 \cdot x) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2} \in \mathbb{R} \end{aligned}$$
  Funkce má asymptotu $y(x) = x + \frac{\pi}{2}$ v $+\infty$ a $y(x) = x - \frac{\pi}{2}$ v $-\infty$.

- *monotonie funkce, lokální extrémy:*

  Pro $x \in D_f$ platí
  $$f'(x) = 1 + \frac{1}{1+x^2}.$$
  Pozorujeme, že $f'(x) > 0$ pro $\forall x \in D_f$ a tedy f je na celém D_f ostře rostoucí. Funkce nemá žádný lokální extrém.

- *konvexnost, konkávnost, inflexní body:*

  Pro $x \in D_f$ platí
  $$f''(x) = -\frac{2x}{1+x^2}.$$
  Pozorujeme, že $f''(x) < 0$ pro $x > 0$ a tedy f je na $\langle 0, +\infty)$ ryze konkávní. Zároveň $f''(x) > 0$ pro $x < 0$ a tedy f je na $(-\infty, 0\rangle$ ryze konvexní. Bod $x = 0$ je inflexním bodem f.

- *obor hodnot: z výpočtů plyne, že $H_f = (-\infty, +\infty)$*

- *nakreslit graf funkce: viz. Obrázek 2.*

Příklad 13.15 *Vyšetřete průběh funkce*
$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*

  $D_f = \mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$

- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty: Platí*

$$f(x) = 0 \implies x = 1,$$
$$x = 0 \notin D_f.$$

  Funkce má průsečík s osou x v bodě $[1, 0]$. Pro limity v krajních bodech platí

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \ \lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty.$$

- *sudost, lichost, periodicita:*
  Funkce nemá žádnou z těchto vlastností.
- *spojitost, druhy bodů nespojitosti:*
  Funkce je spojitá ve všech bodech D_f.
- *existence asymptot: Existuje svislá asymptota $x = 0$. Pro asymptotu v $+\infty$ platí*

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{3/2}} = 0 \in \mathbb{R},$$
$$q = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 0 \cdot x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0 \in \mathbb{R}.$$

  Funkce má asymptotu v$+\infty$ s předpisem $y(x) = 0$.

- *monotonie funkce, lokální extrémy:*

  Pro $x \in D_f$ platí

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x^{3/2}}.$$

  Jediný podezřelý bod z extrému je $x = e^2$. Zároveň platí

  - *$f'(x) > 0$ pro $x \in (0, e^2) \Rightarrow f$ je na $(0, e^2\rangle$ ostře rostoucí,*
  - *$f'(x) < 0$ pro $x \in (e^2, +\infty) \Rightarrow f$ je na $\langle e^2, +\infty)$ ostře klesající.*

  Z výše uvedeného (monotonie) plyne, že $x = e^2$ je bodem ostrého lokálního maxima (dokonce globálního).

- *konvexnost, konkávnost, inflexní body:*

  Pro $x \in D_f$ platí

$$f''(x) = \frac{3 \ln x - 8}{4x^{5/2}}.$$

  Pozorujeme, že

  - *$f''(x) < 0$ pro $x \in (0, e^{\frac{8}{3}}) \Rightarrow f$ je na $(0, e^{\frac{8}{3}}\rangle$ ryze konkávní,*

– $f''(x) > 0$ *pro* $x \in (e^{\frac{8}{3}}, +\infty) \Rightarrow f$ *je na* $\langle e^{\frac{8}{3}}, +\infty)$ *ryze konvexní.*

Bod $x = e^{\frac{8}{3}}$ *je inflexním bodem* f*.*

- *obor hodnot: z výpočtů plyne, že* $H_f = (-\infty, f(e^2)\rangle = (-\infty, \frac{2}{e}\rangle$
- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 2.*

Příklad 13.16 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + 2}.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*

  $D_f = \mathbb{R}$
- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty:*

  Platí

$$x = 0 \implies f(0) = \frac{\sin(0)}{\cos(0) + 2} = 0,$$
$$f(x) = 0 \implies \sin x = 0 \implies x = k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

  Průsečíky tedy jsou body $[k\pi, 0]$ *pro* $k \in \mathbb{Z}$*. Limity v* $\pm\infty$ *neexistují.*
- *sudost, lichost, periodicita:*

  Sinus i cosinus jsou funkce periodické s periodou 2π*, funkce* f *je tedy periodická s touto periodou. Při vyšetřování monotonie a konvexnosti se tedy stačí zaměřit na interval* $\langle 0, 2\pi\rangle$*. Jelikož platí:*

$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x) + 2} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x) + 2} = -f(x),$$

  je funkce lichá.
- *spojitost:*

  Funkce je spojitá ve všech bodech definičního oboru.
- *asymptoty:*

  Funkce nemá svislé asymptoty a jelikož je periodická, nemá ani asymptoty v nekonečnech.
- *monotonie:*

  Pro $x \in \mathbb{R}$ *platí*

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\,(\cos(x) + 2) + \sin^2(x)}{(\cos(x) + 2)^2} = \frac{1 + 2\cos(x)}{(\cos(x) + 2)^2}.$$

  Podezřelý bod z extrému splňuje rovnici $\cos x = -\frac{1}{2}$*, tj. body* $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ *a* $x_2 = \frac{4\pi}{3}$*. Zároveň*

– $f'(x) > 0$ *pro* $x \in (0, \frac{2\pi}{3})$ *a* $x \in (\frac{4\pi}{3}, 2\pi)$, *tedy funkce* f *je na těchto intervalech ostře rostoucí,*

– $f'(x) < 0$ *pro* $x \in (\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3})$ *a* f *je tedy na tomto intervalu ostře klesající.*

Bod $x_1 = \frac{2\pi}{3}$ *je tedy ostré lokální maximum a bod* $x_2 = \frac{4\pi}{3}$ *je ostré lokální minimum.*

- *konvexnost, konkávnost a inflexní body: Pro* $x \in \mathbb{R}$ *platí*

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{-2\cos(x)\left(\cos(x)+2\right)^2 + 2\left(\cos(x)+2\right)\sin(x)\left(1+2\cos(x)\right)}{(\cos(x)+2)^4} \\ &= \frac{2\sin(x)\cos(x) - 2\sin(x)}{(\cos(x)+2)^3} = \frac{2\sin(x)\left(\cos(x)-1\right)}{(\cos(x)+2)^3}. \end{aligned}$$

Pozorujeme, že $f''(x)$ *je záporná na intervalu* $(0, \pi)$ *a kladná na intervalu* $(\pi, 2\pi)$. *Původní funkce* f *je tedy konvexní na* $\langle \pi, 2\pi \rangle$ *a konkávní* $(\langle, \pi \rangle$.

- *Z výpočtu plyne* $H_f = \langle f(\frac{4\pi}{3}), f(\frac{2\pi}{3}) \rangle = \langle -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \rangle$.
- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 2.*

Příklad 13.17 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = |x^3 - 6x^2 + 11x - 6|.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*

  $D_f = \mathbb{R}$

- *průsečíky s osami souřadnic a funkční hodnoty v zajímavých bodech:*

  Platí

$$\begin{aligned} x = 0 &\implies f(0) = 6, \\ f(x) = 0 &\implies 0 = x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = (x-1)(x-2)(x-3) \implies x \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

  Průsečíky tedy jsou body $[0, 6]$, $[1, 0]$, $[2, 0]$ *a* $[3, 0]$. *Pro limity v nekonečnech platí* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} = +\infty$.

- *sudost, lichost, periodicita*

  Funkce není periodická, ani sudá čí lichá.

- *spojitost*

  Funkce je spojitá ve všech bodech definičního oboru.

- *asymptoty: Funkce nemá svislé asymptoty. Pro asymptoty v nekonečnech platí*

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x^3 - 6x^2 + 11x - 6|}{x} = +\infty$$

Asymptota v $+\infty$ tedy neexistuje, ze stejných důvodů nebude existovat ani asymptota v $-\infty$.

- *monotonie:*

Pro všechna $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2, 3\}$ má derivace funkce f tvar

$$f'(x) = \operatorname{sgn}((x-1)(x-2)(x-3))(3x^2 - 12x + 11),$$

v inkriminovaných bodech $\{1, 2, 3\}$ derivace neexistuje. Body podezřelé z extrému jsou tedy $\{1, 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}, 2, 2 + \frac{\sqrt{3}}{3}, 3\}$. Zároveň

  - *$f'(x) > 0$ na intervalech $(1, 2 - \frac{\sqrt{3}}{3})$, $(2, 2 + \frac{\sqrt{3}}{3})$ a $(3, +\infty)$. Původní funkce f je tedy na těchto intervalech ostře rostoucí,*
  - *naopak na interval $(-\infty, 1)$, $2 - \frac{(\sqrt{3}}{3}, 2)$ a $(2 + \frac{\sqrt{3}}{3}, 3)$ je $f'(x) < 0$ a f je zde tedy ostře klesající.*

Z monotonie pozorume, že body $1, 2, 3$ jsou ostrá lokální minima a body $2 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ jsou ostrá lokální maxima.

- *konvexnost, konkávnost, inflexní body:*

Pro $x \in D_f \setminus \{1, 2, 3\}$ platí,

$$f''(x) = sgn((x-1)(x-2)(x-3))(6x - 12).$$

Pozorujeme, že $f''(x)$ je na intervalu $(-\infty, 1)$ a na intervalu $(3, +\infty)$ kladná, tedy funkce f je na těchto intervalech ryze konvexní, naopak na intervalech $(1, 2)$ a $(2, 3)$ je $f''(x)$ záporná a f je tedy na tomto intervalu ryze konkávní.

- *Z výpočtů plyne $H_f = \mathbb{R}$*
- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 2.*

Příklad 13.18 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*

$D_f = \mathbb{R}$

- *průsečíky s osami souřadnic a funkční hodnoty v zajímavých bodech: Platí*

$$x = 0 \implies f(0) = -2,$$
$$f(x) = 0 \implies x = 2.$$

Funkce má tedy průsečíky $[2, 0]$ *a* $[0, -2]$*. Pro limity v nekonečnech platí* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm 1$*.*

- *sudost, lichost, periodicita*

Funkce není periodická, ani sudá či lichá.

- *spojitost*

Funkce je spojitá ve všech bodech definičního oboru.

- *asymptoty: Funkce nemá svislé asymptoty. Pro asymptoty v nekonečnech platí*

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-2}{x\sqrt{x^2+1}} = 0,$$
$$q_1 = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1,$$
$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x-2}{x\sqrt{x^2+1}} = 0,$$
$$q_2 = \lim_{x\to-\infty} f(x) = -1.$$

Funkce má tedy v $+\infty$ *asymptotu* $y = 1$ *a v* $-\infty$ *asymptotu* $y = -1$*.*

- *monotonie: Pro* $x \in \mathbb{R}$ *platí*

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x-2)\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1+2x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

Jediný podezřelý bod z extrému je $x = \frac{-1}{2}$*. Zároveň*

  - $f'(x)$ *je na intervalu* $(-\infty, -\frac{1}{2})$ *záporná, tedy funkce* f *je na intervalu* $(-\infty, -\frac{1}{2}\rangle$ *ostře klesající,*
  - *naopak na intervalu* $(-\frac{1}{2}, +\infty)$ *je* $f'(x)$ *kladná a* f *je tedy na intervalu* $\langle -\frac{1}{2}, +\infty)$ *ostře rostoucí.*

Z monotonie pozorujeme, že bod $x = -\frac{1}{2}$ *je ostré lokální minimum.*

- *konvexnost, konkávnost, inflexní body: Pro* $x \in \mathbb{R}$ *platí*

$$f''(x) = \frac{2(x^2+1)^{\frac{3}{2}} - (1+2x)\frac{3}{2}(x^2+1)^{\frac{1}{2}}}{(x^2+1)^3} = -\frac{4x^2+3x-2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}.$$

Pozorujeme, že $f''(x)$ *je na intervalu* $(-\infty, \frac{-3-\sqrt{41}}{8})$ *a na intervalu* $(\frac{-3+\sqrt{41}}{8}, +\infty)$ *záporná, tedy funkce* f *je na intervalech* $(-\infty, \frac{-3-\sqrt{41}}{8}\rangle$ *a* $\langle\frac{-3+\sqrt{41}}{8}, +\infty)$ *ryze konkávní, naopak na intervalu* $(\frac{-3-\sqrt{41}}{8}, \frac{-3+\sqrt{41}}{8})$ *je* $f''(x)$ *kladná a* f *je tedy na intervalu* $\langle\frac{-3-\sqrt{41}}{8}, \frac{-3+\sqrt{41}}{8}\rangle$ *konvexní.*

- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 3.*

Příklad 13.19 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*

  $D_f = \mathbb{R}$
- *průsečíky s osami souřadnic:*

  Platí

  $$\begin{aligned} x = 0 &\implies f(0) = 1, \\ f(x) = 0 &\implies x \notin \mathbb{R}, \end{aligned}$$

  a tedy bod $[0,1]$ *je jediný průsečík. Pro limity v nekonečnech platí* $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.
- *sudost, lichost, periodicita:*

  Jelikož

  $$f(-x) = \frac{1}{1+x^2} = f(x),$$

  je funkce sudá.
- *spojitost*

  Funkce je spojitá ve všech bodech definičního oboru.
- *asymptoty: Funkce nemá svislé asymptoty. Pro asymptoty v nekonečnech platí*

  $$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} = 0, \\ q_1 &= \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0, \\ k_2 &= \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x(1+x^2)} = 0, \\ q_1 &= \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0. \end{aligned}$$

  Dostáváme tedy stejnou asymptotu $y = 0$.
- *monotonie: Pro* $x \in \mathbb{R}$ *platí*

  $$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}.$$

  Jediný podezřelý bod z extrému je $x = 0$. *Zároveň*

– *$f'(x)$ je na intervalu $(0,+\infty)$ záporná, tedy funkce f je na $\langle 0,+\infty)$ intervalu ostře klesající,*

– *naopak na intervalu $(-\infty,0)$ je $f'(x)$ kladná a f je tedy na intervalu $(-\infty,0\rangle$ ostře rostoucí.*

Bod $x=0$ je tedy ostré lokální maximum.

- *konvexnost, konkávnost, inflexní body:*

  Pro $x\in\mathbb{R}$ platí

$$f''(x)=\frac{-2(1+x^2)+8x^2(1+x^2)}{(1+x^2)^4}=\frac{2(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}.$$

  Pozorujeme, že $f''(x)$ je na intervalu $(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3})$ a na intervalu $(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$ kladná, tedy funkce f je na intervalech $(-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{3}\rangle$ a $\langle\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty)$ ryze konvexní. Naopak na intervalu $(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$ je $f''(x)$ záporná a f je tedy na intervalu $\langle-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\rangle$ ryze konkávní.

- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 3.*

Příklad 13.20 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x)=\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*

  $D_f=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

- *průsečíky s osami souřadnic a limity v zajímavých bodech:*

  Platí

$$\begin{aligned} x=0 &\implies f(0)=0,\\ f(x)=0 &\implies x=0\vee x=1. \end{aligned}$$

  Tedy body $[0,0]$ a $[1,0]$ jsou průsečíky s osami. Zároveň pro limity platí

$$\lim_{x\to\pm\infty}=\pm\infty,\lim x\to-1\pm=-\infty.$$

- *sudost, lichost, periodicita:*

  Funkce nemá žádnou z uvedených vlastností.

- *spojitost:*

  Funkce je spojitá ve všech bodech definičního oboru. Funkce je nespojitá v bodě $x=-1$, jedná se o nespojitost druhého druhu.

- *asymptoty:*

  Existuje svislá asymptota $x = -1$. *Pro asymptoty v nekonečnech dostáváme*

$$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(x-1)}{x(x^2+1)} = 1, \\ q_1 &= \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2 - x}{(x+1)^2} = -3, \\ k_1 &= \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(x-1)}{x(x^2+1)} = 1, \\ q_1 &= \lim_{x\to-\infty} f(x) - x = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x^2 - x}{(x+1)^2} = -3. \end{aligned}$$

  Dostáváme tedy asymptotu ve tvaru $y = x - 3$ *u obou nekonečen.*

- *monotonie:*

  Pro $x \in D_f$ *platí*

$$f'(x) = \frac{(3x^2-2x)(x^2+2x+1) - (x^3-x^2)(2x+2)}{(x+1)^4} = \frac{x(x^2+3x-2)}{(x+1)^3}.$$

  Podezřelé body z extrémů jsou $x \in \{0, -3 \pm \sqrt{17}\}$. *Pozorujeme*

  - $f'(x)$ *je na intervalech* $(\frac{-3-\sqrt{17}}{2}, -1)$ *a* $(0, \frac{-3+\sqrt{17}}{2})$ *záporná, tedy funkce* f *je na intervalech* $\langle \frac{-3-\sqrt{17}}{2}, -1\rangle$ *a* $\langle 0, \frac{-3+\sqrt{17}}{2}\rangle$ *ostře klesající,*
  - *naopak na intervalech* $(-\infty, \frac{-3-\sqrt{17}}{2})$, $(-1, 0)$ *a* $(\frac{-3+\sqrt{17}}{2}, +\infty)$ *je* $f'(x)$ *kladná a* f *je tedy na intervalech* $(-\infty, \frac{-3-\sqrt{17}}{2}\rangle$, $\langle -1, 0\rangle$ *a* $\langle \frac{-3+\sqrt{17}}{2}, +\infty)$ *ostře rostoucí.*

  Z monotonie plyne, že body $x = 0$ *a* $x = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}$ *jsou ostrá lokální maxima, bod* $x = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$ *je ostré lokální minimum.*

- *konvexnost, konkávnost, inflexní body:*

  Pro $x \in D_f$ *platí*

$$f''(x) = \frac{(3x^2+6x-2)(x+1)^3 - 3(x^3+3x^2-2x)(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{2(5x-1)}{(x+1)^4}.$$

  Pozorujeme, že $f''(x)$ *je na intervalu* $(\frac{1}{5}, +\infty)$ *kladná, tedy funkce* f *je na intervalu* $\langle \frac{1}{5}, +\infty)$ *ryze konvexní, naopak na intervalech* $(-\infty, -1)$ *a* $(-1, \frac{1}{5})$ *je* $f''(x)$ *záporná a* f *je tedy na intervalech* $(-\infty, -1\rangle$ *a* $\langle -1, \frac{1}{5}\rangle$ *ryze konkávní.*

- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 3.*

Příklad 13.21 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right).$$

Postup řešení:

- *definiční obor*

  $$\left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| \leq 1 \Leftrightarrow (1-x^2)^2 \leq (1-x^2)^2 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}.$$

  Definiční obor D_f jsou tedy všechna reálná čísla.
- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty:*

  $$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{1+x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

  Máme tedy pouze jeden průsečík v počátku $[0,0]$. Pro limitu v $\pm\infty$ platí $\lim_{xto\pm\infty} f(x) = \pi$.
- *případnou sudost, lichost, periodicitu:*

  Jelikož $f(-x) = f(x)$ je funkce je sudá, budeme tedy vyšetřovat pouze na $\langle 0, +\infty)$.
- *spojitost, druhy bodů nespojitosti:*

  Funkce je spojitá ve všech bodech svého definičního oboru
- *existenci asymptot (svislých i těch v nekonečnech), Pro asymptotu v $+\infty$ platí*

  $$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\arccos\left(\frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x^2}+1}\right)}{x} = 0,$$
  $$q_1 = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \pi.$$

  Funkce má tedy v $+\infty$ asymptotu $y = \pi$.
- *monotonii funkce (intervaly monotonie), lokální extrémy:*

  Pro $x > 0$ platí

  $$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \frac{-2x(1+x^2)-(1-x^2)2x}{(1+x^2)^2} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \frac{-4x}{(1+x^2)^2} = \frac{2}{1+x^2}. \end{aligned}$$

  Funkce je tedy na $\langle 0, +\infty)$ ostře rostoucí. Jediným podezřelým bodem z extrému je bod $x = 0$, jelikož v tomto bodě derivace neexistuje (pro $x < 0$ je $f'(x) = -\frac{2}{1+x^2}$) díky Daurboxově větě. V tomto bodě je tedy ostré lokální minimum.

- *konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body:*

  Pro $x > 0$ platí

  $$f''(x) = -\frac{2}{(1+x^2)^2}2x = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}.$$

  Na intervalu $\langle 0, +\infty)$ je tedy funkce ryze konkávní. Inflexní body na tomto intervalu neexistují.

- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 3.*

Příklad 13.22 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = |x+2|e^{-\frac{1}{x}}.$$

Postup řešení:

- *definiční obor*

  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty:*

  Průsečík s osou y není, s osou x je průsečík $[-2, 0]$. Limity v zajímavých bodech:

  $$\lim_{x\to 0+} f(x) = 0,$$
  $$\lim_{x\to 0-} f(x) = +\infty.$$

- *případnou sudost, lichost, periodicitu:*

  Funkce nemá žádnou s těchto vlastností.

- *spojitost, druhy bodů nespojitosti:*

  Funkce je spojitá ve všech bodech definičního oboru. Funkce je nespojitá v bodě $x = 0$ (2. druhu).

- *existenci asymptot:*

  Existuje svislá asymptota $x = 0$. Pro asymptoty v nekonečnech platí

  $$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = 1,$$

  $$q_1 = \lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x(1-e^{\frac{1}{x}})+2}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to+\infty} -x \underbrace{\frac{(e^{\frac{1}{x}}-1)}{\frac{1}{x}}}_{\to 1} \frac{1}{x} + \frac{2}{e^{\frac{1}{x}}} = -1+2 = 1,$$

  $$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} -\frac{1+\frac{2}{x}}{e^{\frac{1}{x}}} = -1,$$

  $$q_2 = \lim_{x\to-\infty} f(x) + x = \lim_{x\to-\infty} -\frac{x(1-e^{\frac{1}{x}})+2}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to-\infty} +x \underbrace{\frac{(e^{\frac{1}{x}}-1)}{\frac{1}{x}}}_{\to 1} \frac{1}{x} - \frac{2}{e^{\frac{1}{x}}} = 1-2 = -1,$$

  U $+\infty$ dostáváme asymptotu $y = x+1$, u $-\infty$ asymptotu $y = -x-1$.

- *monotonii funkce (intervaly monotonie), lokální extrémy:*

  Pro první derivaci platí

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{x+2}{x^2}\right), & x \in (-2,0) \cup (0,+\infty) \\ -e^{-\frac{1}{x}} \left(1 + \frac{x+2}{x^2}\right), & x \in (-\infty,-2) \end{cases}$$

  Z Darbouxovy věty derivace v bodě -2 neexistuje. O znaménku derivace rozhodne výraz $x^2 + x + 2$. Ten je vždy kladný. Funkce je tedy ostře rostoucí na intervalu $(0,+\infty)$, ostře rostoucí na intervalu $\langle -2,0)$ a ostře klesající na $(-\infty,-2\rangle$. Jediným podezřelým bodem z extrému je bod $x = -2$, kde derivace neexistuje. Z monotonie plyne, že $x = -2$ je ostré lokální minimum.

- *konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body:*

  Druhá derivace funkce f má tvar

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^4} (2 - 3x), & x \in (-2,0) \cup (0,+\infty) \\ -\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^4} (2 - 3x), & x \in (-\infty,-2) \end{cases}$$

  Pozorujeme, že funkce je na intervalu $\langle \frac{2}{3}, +\infty)$ ryze konkávní, na $(0, \frac{2}{3}\rangle$ ryze konvexní, na $\langle -2,0)$ ryze konvexní a ryze konkávní na $(-\infty,-2\rangle$

- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 4.*

Příklad 13.23 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right).$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*

  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty:*

  Průsečík s osou x neexistuje, s osou y máme průsečík $[0, f(0)] = [0, -\frac{\pi}{4}]$. Pro limity v nekonečnech platí

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{arctg} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^2}} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

- *sudost, lichost, periodicita:*

  Funkce je sudá, budeme ji tedy vyšetřovat pouze na $D_f \bigcap \langle 0, +\infty)$.

- *spojitost, druhy bodů nespojitosti:*

  Funkce je spojitá ve všech bodech definičního oboru. Pro jednostranné limity v bodě 1 *platí*

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = +\frac{\pi}{2},$$
$$\lim_{x\to 1-} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

  V bodě 1 *je tedy nespojitost typu 'skok'.*

- *asymptoty:*

  Svislá asymptota je $x = 1$. *Pro asymptotu v* $+\infty$ *platí*

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$
$$q_1 = \lim_{x\to+\infty} f(x) - k_1 x = \frac{\pi}{4}.$$

- *monotonii funkce (intervaly monotonie), lokální extrémy:*

  Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ *platí*

$$f'(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^2} \frac{2x(x^2-1) - (x^2+1)2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{x^4+1}.$$

  Funkce je tedy ostře klesající na intervalu $\langle 0, 1)$ *a na intervalu* $(1, +\infty)$. *Jediným podezřelým bodem z extrému je* $x = 0$. *Jelikož* $f'(x) > 0$ *na intervalu* $(-1, 0)$ *je bod* $x = 0$ *ostré lokální maximum.*

- *konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body:*

  Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ *platí*

$$f''(x) = -2\frac{1(x^4+1) - x(4x^3)}{(x^4+1)^2} = \frac{6x^4 - 2}{(x^4+1)^2}.$$

  Pro $0 < x < \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ *je* $f''(x) < 0$, *pro* $x > \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$ *je* $f''(x) > 0$. *Z toho plyne, že funkce* f *je ryze konkávní na intervalu* $\langle 0, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\rangle$, *ryze konvexní na* $\langle \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, 1)$ *a ryze konvexní na* $(1, +\infty)$.

- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 4.*

Příklad 13.24 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Postup řešení:

- *definiční obor*

  $D_f = \mathbb{R}$
- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty:*

  Existuje jediný průsečík $[0, 1]$. *Limity v nekonečnech mají hodnotu* $\lim_{x \to \pm\infty} = 0$.
- *sudost, lichost, periodicita:*

  Funkce je sudá. Budeme ji vyšetřovat na $\langle 0, +\infty)$
- *spojitost, druhy bodů nespojitosti,*

  Funkce je spojitá ve všech bodech definičního oboru.
- *asymptoty:*

  Svislé asymptoty neexistují. Pro asymptotu v $+\infty$ *platí*

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$
$$q = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

  Dostáváme tedy asymptotu $y = 0$.
- *monotonii funkce (intervaly monotonie), lokální extrémy:*

  Pro $x \geq 0$ *platí*

$$f'(x) = -2xe^{-x^2}.$$

  Funkce je tedy na intervalu $\langle 0, +\infty)$ *ostře klesající. Jediným podezřelým bodem z extrém je bod* $x = 0$. *Z monotonie funkce na okolí lze usoudit, že* $x = 0$ *je ostré lokální maximum.*
- *konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body:*

  Pro $x \geq 0$ *platí*

$$f''(x) = -2e^{-x^2} - 2xe^{-x^2}(-2x) = 2e^{-x^2}\left(-1 + 2x^2\right).$$

  Inflexním bodem je $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. *Funkce je ryze konvexní na intervalu* $\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ *a ryze konkávní na intervalu* $\langle 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$
- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 4.*

Příklad 13.25 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = |x| + \operatorname{arctg}|x - 1|.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*

  $D_f = \mathbb{R}$

- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty:*

  Pro $x \in \mathbb{R}$ *je jistě* $f(x) > 0$*, tedy průsečík s osou* x *neexistuje. S osou* y *máme průsečík* $[0, f(0)] = [0, \operatorname{arctg} 1] = [0, \frac{\pi}{4}]$*. Zároveň platí* $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$*.*

- *případnou sudost, lichost, periodicitu:*

  Funkce nemá žádnou z vlastností.

- *spojitost, druhy bodů nespojitosti:*

  Funkce je spojitá ve všech bodech definičního oboru.

- *asymptoty: Svislé asymptoty neexistují. Pro asymptotu v* $+\infty$ *platí*

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} + \frac{\operatorname{arctg} |x-1|}{x} = 1$$
$$q_1 = \lim_{x \to +\infty} f(x) - k_1 x = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} (x-1) = \frac{\pi}{2}$$

  $V +\infty$ *je tedy asymptota tvaru* $y = x + \frac{\pi}{2}$*. V* $-\infty$ *dostáváme*

$$k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x}{x} + \frac{\operatorname{arctg} |x-1|}{x} = -1$$
$$q_2 = \lim_{x \to -\infty} f(x) - k_2 x = \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} (-(x-1)) = \frac{\pi}{2}$$

  $V -\infty$ *je tedy asymptota tvaru* $y = -x + \frac{\pi}{2}$*.*

- *monotonii funkce (intervaly monotonie), lokální extrémy:*

  Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ *platí*

$$f'(x) = \begin{cases} -1 + \frac{1}{1+[-(x-1)]^2}(-1) = \frac{x^2-2x+3}{2x-x^2-2} & x \in (-\infty, 0) \\ 1 + \frac{1}{1+[-(x-1)]^2}(-1) = \frac{-(x-1)^2}{2x-x^2-2}, & x \in (0, 1) \\ 1 + \frac{1}{1+[(x-1)]^2} = \frac{x^2-2x+3}{x^2-2x+2}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

  Z Darbouxovy věty plyne, že derivace v bodech $\{0, 1\}$ *neexistuje. Jelikož pro* $x \in (-\infty, 0)$ *je* $f'(x) < 0$ *je funkce na intervalu* $(-\infty, 0\rangle$ *ostře klesající. Na intervalu* $x \in (0, 1)$ *je* $f'(x) > 0$ *a tedy funkce je na* $\langle 0, 1\rangle$ *ostře rostoucí. Na posledním intervalu* $(1, +\infty)$ *je* $f'(x)$ *opět kladná, funkce opět ostře roste na intervalu* $\langle 1, +\infty)$*. Jediné podezřelé body z extrému jsou body* $\{0, 1\}$*. Z monotonie funkce na okolí těchto bodů plyne, že* $x = 0$ *je ostré lokální minimum a* $x = 1$ *není extrém.*

- *konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body:*

  Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ *platí*

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2(x-1)}{(2x-x^2-2)^2} & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{2(x-1)}{(2x-x^2-2)^2}, & x \in (0, 1) \\ \frac{-2(x-1)}{(x^2-2x+2)^2}, & x \in (1, +\infty) \end{cases}$$

Pozorujeme, že funkce je na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ ryze konkávní, na intervalu $\langle 0, 1\rangle$ ryze konkávní a na intervalu $\langle 1, +\infty)$ ryze konkávní.

- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 4.*

Příklad 13.26 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = (x-1)e^{\frac{x}{1+x}}.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*

  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty:*

  Průsečník s osou y je $[0, f(0)] = [0, -1]$. *S osou x máme průsečík* $[f^{-1}(0), 0] = [1, 0]$. *Zároveň platí*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty,$$
$$\lim_{x\to-1+} f(x) = 0, \lim_{x\to-1-} f(x) = -\infty.$$

- *případnou sudost, lichost, periodicitu:*

  Funkce nemá žádnou z těchto vlastností.

- *spojitost, druhy bodů nespojitosti:*

  Funkce je spojitá ve všech bodech definičního oboru. Funkce je nespojitá pouze v bodě $x = -1$ *(2.druhu).*

- *asymptoty:*

  Existuje svislá asymptota $x = -1$. *Pro asymptotu v* $+\infty$ *platí*

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{x}{1+x}} = e,$$
$$q_1 = \lim_{x\to+\infty} f(x) - k_1 x = \lim_{x\to+\infty} (x-1)e^{\frac{x}{1+x}} - ex = \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{x}{1+x}} - e\right) - e^{\frac{x}{1+x}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} -e\frac{x}{x+1}\left(\frac{e^{\frac{-1}{1+x}} - 1}{\frac{-1}{1+x}}\right) - e^{\frac{x}{1+x}} = -2e.$$

  V $+\infty$ *je tedy asymptota tvaru* $y = ex - 2e$. V $-\infty$ *dostáváme*

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right) e^{\frac{x}{1+x}} = e,$$
$$q_2 = \lim_{x\to-\infty} f(x) - k_1 x = \lim_{x\to-\infty} (x-1)e^{\frac{x}{1+x}} - ex = \lim_{x\to-\infty} x\left(e^{\frac{x}{1+x}} - e\right) - e^{\frac{x}{1+x}}$$
$$= \lim_{x\to-\infty} -e\frac{x}{x+1}\left(\frac{e^{\frac{-1}{1+x}} - 1}{\frac{-1}{1+x}}\right) - e^{\frac{x}{1+x}} = -2e.$$

  V $-\infty$ *je tedy asymptota tvaru* $y = ex - 2e$.

- *monotonii funkce (intervaly monotonie), lokální extrémy:*

  Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ *platí*

  $$f'(x) = e^{\frac{x}{1+x}} \frac{x(x+3)}{(1+x)^2}.$$

  Jelikož pro $x \in (-\infty, -3)$ *a* $x \in (0, \infty)$ *je* $f'(x) > 0$ *je funkce na intervalech* $(-\infty, -3\rangle$ *a* $\langle 0, \infty)$ *ostře rostoucí. Na intervalech* $x \in (-3, -1)$ *a* $x \in (-1, 0)$ *je* $f'(x) < 0$ *a funkce je ostře klesající na intervalech* $\langle -3, -1)$ *a* $(-1, 0\rangle$. *Jediné podezřelé body z extrému jsou body* $\{-3, 0\}$. *Z monotonie funkce na okolí těchto bodů plyne, že* $x = 0$ *je ostré lokální minimum,* $x = -3$ *je ostré lokální maximum.*

- *konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body:*

  Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ *platí*

  $$f''(x) = e^{\frac{x}{1+x}} \frac{5x+3}{(1+x)^4}$$

  Pozorujeme, že funkce je na intervalech $(-\infty, -1\rangle$ *a* $\langle -1, -\frac{3}{5}\rangle$ *ryze konkávní a na intervalu* $\langle -\frac{3}{5}, +\infty)$ *ryze konvexní.*

- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 5.*

Příklad 13.27 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = xe^{-x^2}.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*

  $D_f = \mathbb{R}$

- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty:*

  Průsečík s osou y je $[0, f(0)] = [0, 0]$. *S osou x máme průsečík* $[f^{-1}(0), 0] = [0, 0]$. *Zároveň platí* $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *a* $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

- *sudost, lichost, periodicita:*

  Jelikož $f(-x) = -xe^{-x^2} = -f(x)$, *je funkce lichá.*

- *spojitost, druhy bodů nespojitosti:*

  Funkce je spojitá ve všech bodech definičního oboru.

- *asymptoty:*

  Svislé asymptoty neexistují. Pro asymptotu v $+\infty$ *platí*

  $$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = 0,$$
  $$q_1 = \lim_{x\to+\infty} f(x) - k_1 x = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x^2} - 0x = 0.$$

V $+\infty$ *je tedy asymptota tvaru* $y = 0$. *V* $-\infty$ *dostáváme*

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} = 0,$$
$$q_2 = \lim_{x\to-\infty} f(x) - k_1 x = \lim_{x\to-\infty} xe^{-x^2} - 0x = 0.$$

V $-\infty$ *je tedy asymptota tvaru* $y = 0$.

- *monotonii funkce (intervaly monotonie), lokální extrémy:*
  Pro $x \in \mathbb{R}$ *platí*

$$f'(x) = e^{-x^2}\left(1 - 2x^2\right).$$

  Jelikož pro $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ *a* $x \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right)$ *je* $f'(x) < 0$ *je funkce intervalech* $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$ *a* $\langle\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty)$ *ostře klesající. Na intervalu* $x \in (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ *je* $f'(x) > 0$ *a funkce je tedy na intervalu* $\langle-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle$ *ostře rostoucí. Jediné podezřelé body z extrému jsou body* $\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\}$. *Z monotonie funkce na okolí těchto bodů plyne, že* $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ *je ostré lokální minimum,* $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *je ostré lokální maximum.*
- *konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body:*
  Pro $x \in \mathbb{R}$ *platí*

$$f''(x) = -e^{-x^2}2x\left(3 - 2x^2\right).$$

  Pozorujeme, že funkce je na intervalech $(-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}\rangle$ *a* $\langle 0, \sqrt{\frac{3}{2}}\rangle$ *ryze konkávní a na intervalech* $\langle-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0\rangle$ *a* $\langle\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty)$ *ryze konvexní.*
- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 5.*

Příklad 13.28 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*
  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$
- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty:*
  Nemá průsečík s osou x ani y. Zároveň platí

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 1, \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1,$$
$$\lim_{x\to0+} f(x) = 0, \lim_{x\to0-} f(x) = 0.$$

- *sudost, lichost, periodicita:*

  Jelikož $f(-x) = -x \operatorname{arctg} -\frac{1}{x} = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = f(x)$*, je funkce sudá.*

- *spojitost, druhy bodů nespojitosti:*

  Funkce je spojitá ve všech bodech definičního oboru. Funkce je nespojitá pouze v bodě $x = 0$ *(odstranitelná nespojitost).*

- *asymptoty: Svislé asymptoty neexistují. Pro asymptotu v* $+\infty$ *platí*

$$k_1 = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = 0,$$
$$q_1 = \lim_{x \to +\infty} f(x) - k_1 x = \lim_{x \to +\infty} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = 1.$$

  $V +\infty$ *je tedy asymptota tvaru* $y = 1$*. V* $-\infty$ *dostáváme*

$$k_2 = \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = 0,$$
$$q_2 = \lim_{x \to -\infty} f(x) - k_1 x = \lim_{x \to -\infty} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = 1.$$

  $V -\infty$ *je tedy asymptota tvaru* $y = 1$*.*

- *monotonii funkce (intervaly monotonie), lokální extrémy:*

  Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *platí*

$$f'(x) = -\frac{x}{1+x^2} + \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$$

  Z Darbouxovy věty plyne, že derivace v bodě $\{0\}$ *neexistuje. Jelikož pro* $x \in (-\infty, 0)$ *je* $f'(x) < 0$ *je funkce na tomto intervalu ostře klesající. Na intervalu* $x \in (0, +\infty)$ *je* $f'(x) > 0$ *a funkce je ostře klesající. Jediný podezřelý bod z extrému je* $\{0\}$*. Z monotonie funkce na okolí tohoto bodu plyne, že* $x = 0$ *je ostré lokální minimum.*

- *konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body:*

  Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *platí*

$$f''(x) = -\frac{2}{(1+x^2)^2}$$

  Pozorujeme, že funkce je na intervalech $(-\infty, 0)$ *a* $(0, +\infty)$ *ryze konkávní.*

- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 5.*

Příklad 13.29 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = \operatorname{sgn} x \arcsin \cos x.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*

  $D_f = \mathbb{R}$

- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty:*

  Průsečík s osou y je $[0, f(0)] = [0, 0]$. *Průsečíky s osou x jsou* $x = 0$ *nebo* $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathrm{Z}$ *Zároveň platí, že neexistuje ani jedna z limit v* $\pm\infty$.

- *sudost, lichost, periodicita:*

  Jedná se o součin liché a sudé funkce. Funkce f je tedy lichá. Funkce není periodická.

- *spojitost, druhy bodů nespojitosti:*

  Funkce je spojitá ve všech bodech definičního oboru kromě $x = 0$. *V tomto bodě je nespojitost typu skok, jelikož*

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \frac{\pi}{2}, \lim_{x\to 0-} f(x) = -\frac{\pi}{2}.$$

- *asymptoty:*

  Svislé asymptoty neexistují. Pro asymptotu v $+\infty$ *platí*

$$\begin{aligned} k_1 &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sgn} x \arcsin\cos x}{x} = 0, \\ q_1 &= \lim_{x\to+\infty} f(x) - k_1 x \ldots \text{ neexistuje.} \end{aligned}$$

  $V +\infty$ *asymptota neexistuje. V* $-\infty$ *dostáváme*

$$\begin{aligned} k_2 &= \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sgn} x \arcsin\cos x}{x} = 0 \\ q_2 &= \lim_{x\to+\infty} f(x) - k_2 x \ldots \text{ neexistuje.} \end{aligned}$$

  $V -\infty$ *asymptota rovněž neexistuje.*

- *monotonii funkce (intervaly monotonie), lokální extrémy:*

  Platí

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{-\sin x}{\sqrt{1-(\cos x)^2}} = -\operatorname{sgn}\sin x & x \in (0, +\infty) \\ \frac{\sin x}{\sqrt{1-(\cos x)^2}} = \operatorname{sgn}\sin x, & x \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

  Derivaci v nule vyšetříme přímo z definice:

$$\begin{aligned} \lim_{h\to 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0+} \frac{\arcsin(\cos h)}{h} = +\infty, \\ \lim_{h\to 0-} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= -\lim_{h\to 0-} \frac{\arcsin(\cos h)}{h} = +\infty, \end{aligned}$$

a tedy $f'(0) = +\infty$. *Jelikož pro* $x \in (0+2k\pi, \pi+2k\pi)$ *a* $x \in (0-2k\pi, -\pi-2k\pi)$, *kde* $k \in \mathrm{N}_0$ *je* $f'(x) < 0$ *je funkce na těchto intervalech ostře klesající (včetně krajních bodů). Na intervalech* $x \in (\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)$ *a* $x \in (-\pi - 2k\pi, -2\pi - 2k\pi)$, *kde* $k \in \mathrm{N}_0$ *je* $f'(x) > 0$ *a funkce je ostře klesající (včetně krajních bodů). Body podezřelé z extrému jsou* $x = k\pi, k \in \mathrm{Z} \setminus \{0\}$. *Z monotonie funkce na okolí tohoto bodu plyne, že* $x = 2k\pi, k \in \mathrm{N}$ *a* $x = -\pi - 2k\pi, k \in \mathrm{N}_0$ *jsou ostré lokální maxima a body* $x = \pi + 2k\pi, k \in \mathrm{N}_0$ *a* $x = -2k\pi, k \in \mathrm{N}$ *jsou ostré lokální minima.*

- *konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body:*

  Pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *platí*

  $$f''(x) = 0.$$

  Pozorujeme, že funkce je po částech lineární.

- *nakreslit graf funkce: viz Obrázek 5.*

Příklad 13.30 *Vyšetřete průběh funkce*

$$f(x) = \sinh \ln x.$$

Postup řešení:

- *definiční obor:*

  $D_f = \mathbb{R}^+$

- *průsečíky s osami souřadnic a jiné důležité funkční hodnoty:*

  Nemá průsečík s osou y. S osou x pouze v $x = 1$. *Zároveň platí* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *a* $\lim\limits_{x\to 0+} = -\infty$.

- *sudost, lichost, periodicita:*

  Funkce nemá žádnou z těchto vlastností.

- *spojitost, druhy bodů nespojitosti:*

  Funkce je spojitá ve všech bodech svého definičního oboru. V bodě $x = 0$ *je nespojitost druhého druhu.*

- *asymptoty:*

  Funkce má svislou asymptotu $x = 0$. *Pro asymptotu v* $+\infty$ *platí*

  $$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sinh \ln x}{x} = \frac{e^{\ln x} - e^{\ln \frac{1}{x}}}{2x} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{2},$$
  $$q_1 = \lim_{x\to+\infty} f(x) - k_1 x = \lim_{x\to+\infty} \sinh \ln x - \frac{x}{2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2} - \frac{1}{2x} - \frac{x}{2} = 0.$$

  V $+\infty$ *je tedy asymptota tvaru* $y = \frac{x}{2}$. *V* $-\infty$ *nemá smysl asymptotu vyšetřovat, kvůli omezení definičního oboru na* $\mathbb{R}^+$.

- *monotonii funkce (intervaly monotonie), lokální extrémy:*

  Pro $x \in \mathbb{R}^+$ *platí*

  $$f'(x) = \frac{1}{x} \cosh \ln x = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

  Jelikož pro $x \in \mathbb{R}^+$ *je* $f'(x) > 0$ *je funkce na* $(0, +\infty)$ *ostře rostoucí. Z toho plyne, že funkce nemá extrémy, ani lokální, ani globální.*

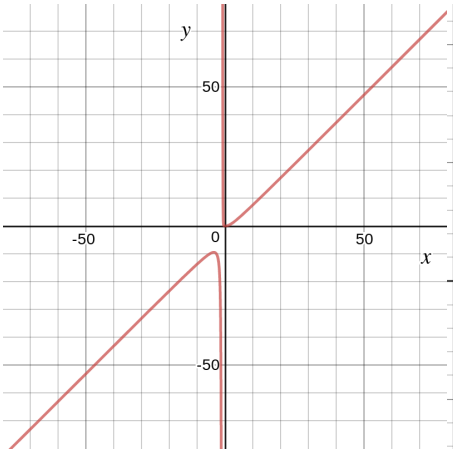
- *konvexnost a konkávnost funkce, inflexní body:*

  Pro $x \in \mathbb{R}^+$ *platí*

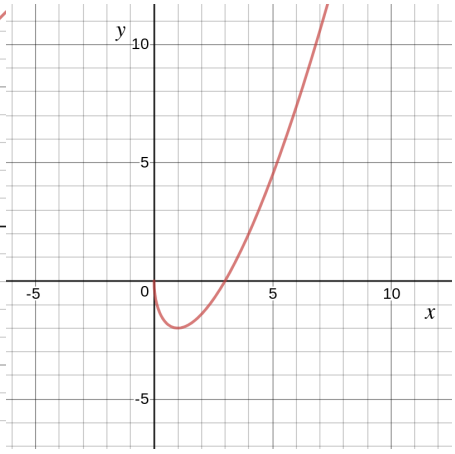
  $$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \cosh \ln x + \frac{1}{x^2} \sinh \ln x = -\frac{1}{x^3}.$$

  Pozorujeme, že funkce je na intervalu a $(0, +\infty)$ *ryze konkávní.*

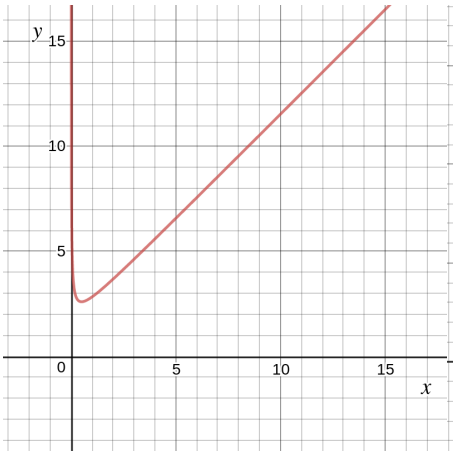
- *nakreslit graf funkce: viz. Obrázek 6.*



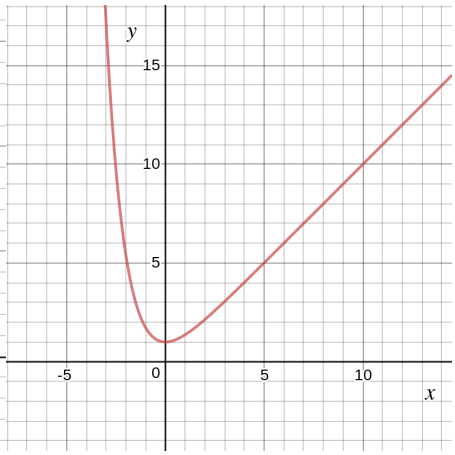
13.10 $f(x) = \frac{x^4}{(x+1)^3}$



13.11 $f(x) = (x-3)\sqrt{3}$

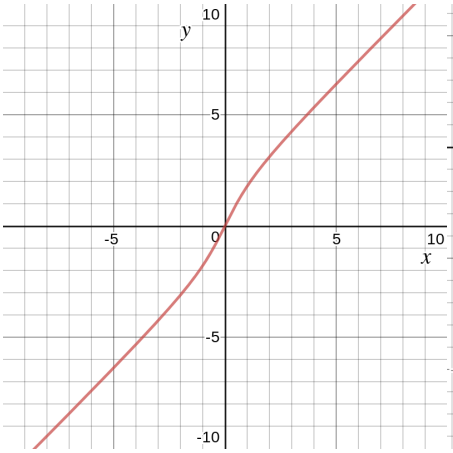


13.12 $f(x) = \frac{|1+x|^{\frac{2}{2}}}{\sqrt{x}}$

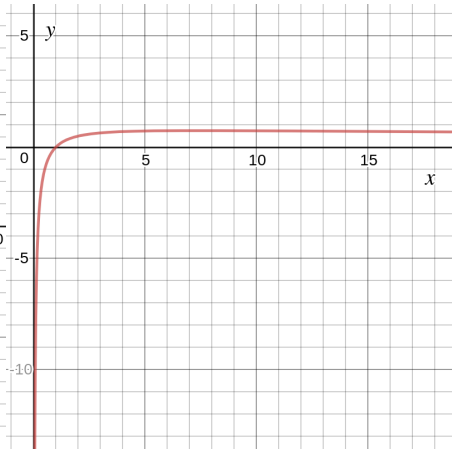


13.13 $f(x) = e^{-x} + x$

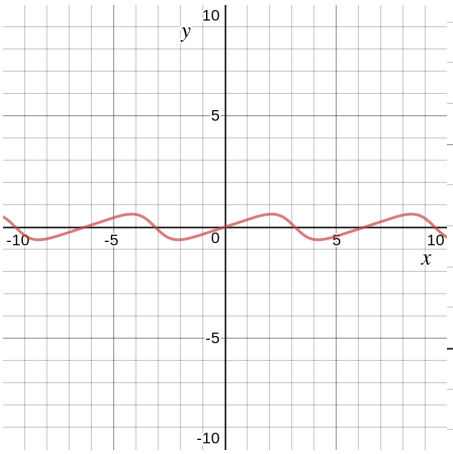
Obrázek 1:



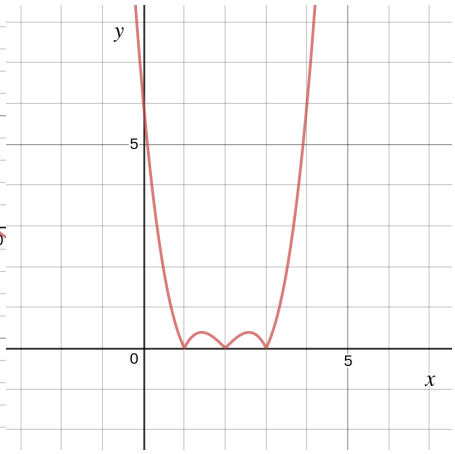
13.14 $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$



13.15 $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

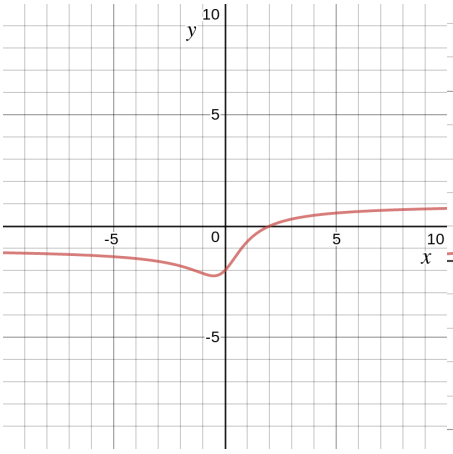


13.16 $f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + 2}$

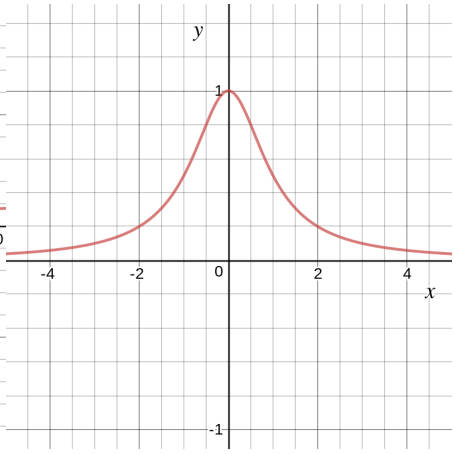


13.17 $f(x) = |x^3 - 6x^2 + 11x - 6|$

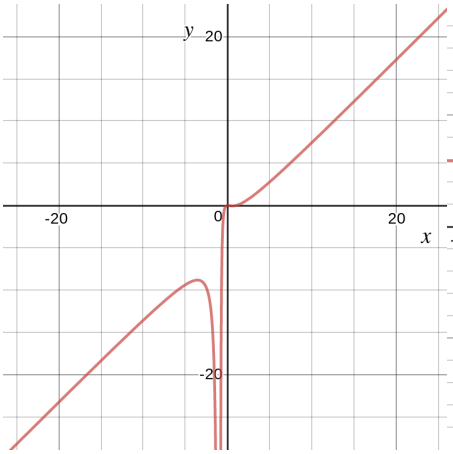
Obrázek 2:



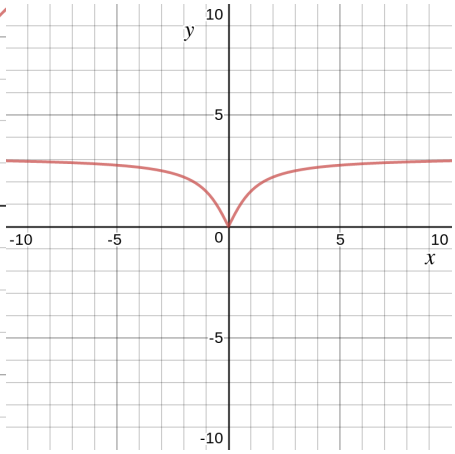
13.18 $f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-1}}$



13.19 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

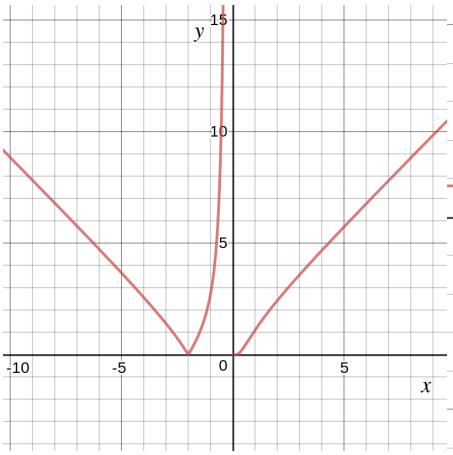


13.20 $f(x) = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$

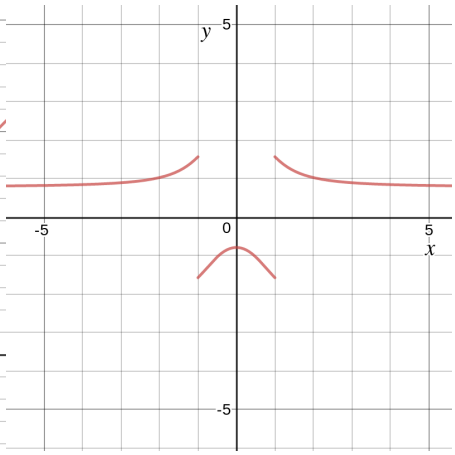


13.21 $f(x) = \arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

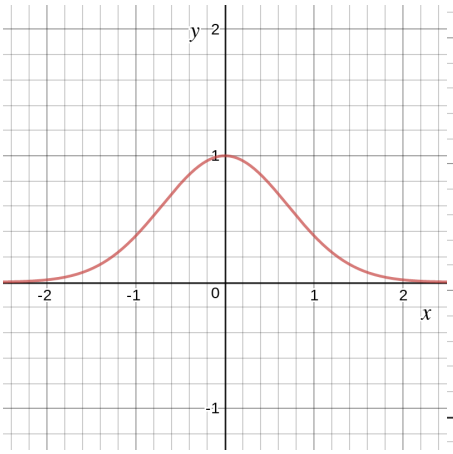
Obrázek 3:



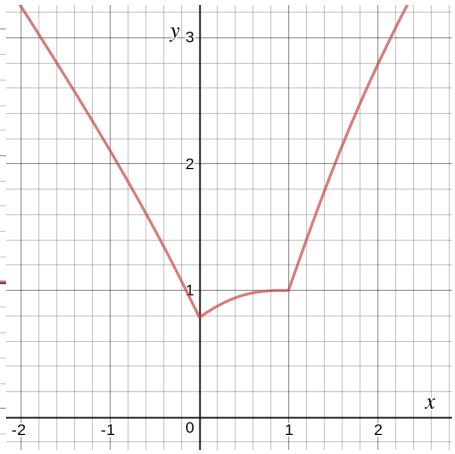
13.22 $f(x) = |x+2|e^{-\frac{1}{x}}$



13.23 $f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)$

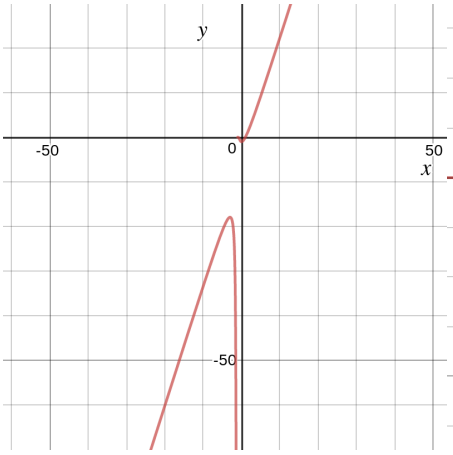


13.24 $f(x) = e^{-x^2}$

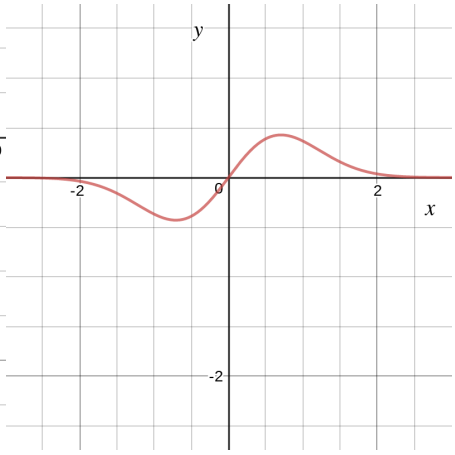


13.25 $f(x) = |x| + \operatorname{arctg}|x-1|$

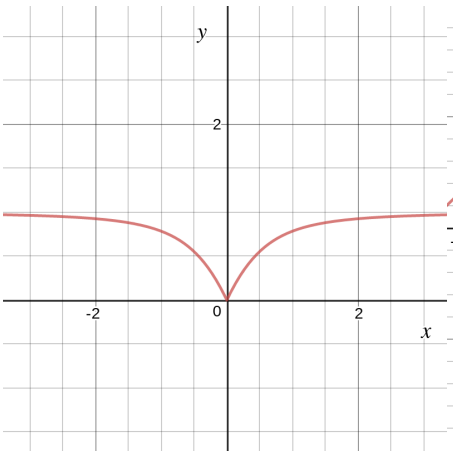
Obrázek 4:



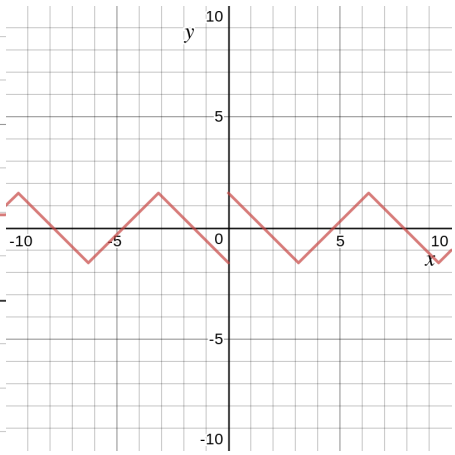
13.26 $f(x) = (x-1)e^{\frac{x}{1+x}}$



13.27 $f(x) = xe^{-x^2}$

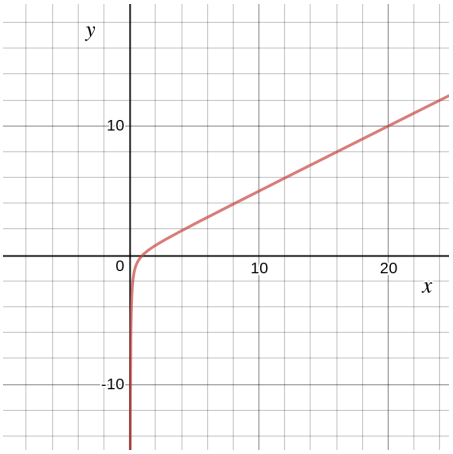


13.28 $f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$



13.29 $f(x) = \operatorname{sgn} x \arcsin \cos x$

Obrázek 5:



13.30 $f(x) = \sinh \ln x$

Obrázek 6: