1 První týden

1.1 Přípravný týden

Příklad 1.1 *Sečtěte* $\sum_{k=1}^{n}(ak+b)$, *kde* $a,b\in\mathbb{C}$, $a\ \sum_{k=0}^{n}q^k$, *kde* $q\in\mathbb{C}$ a $q\neq 1$ a $q\neq 0$.

(Řešení: $a\frac{(n+1)n}{2}+nb$, $\frac{1-q^{n+1}}{1-q}$ *)*

Postup řešení:

$$\sum_{k=1}^{n}(ak+b)=\sum_{k=1}^{n}ak+\sum_{k=1}^{n}b=a\sum_{k=1}^{n}k+b\sum_{k=1}^{n}1=a\frac{(n+1)n}{2}+nb.$$

V případě geometrické posloupnosti označíme

$$s_n=\sum_{k=0}^{n}q^k.$$

Tuto rovnost vynásobíme číslem q. *Tím dostaneme*

$$s_nq=\sum_{k=0}^{n}q^{k+1}.$$

Odečtením této rovnice od předchozí získáme

$$s_n(1-q)=1-q^{n+1}.$$

Tedy

$$s_n=\frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Příklad 1.2 *Sečtěte* $\sum_{k=1}^{n}k^2$.

(Řešení: $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *)*

Postup řešení: Z rovnosti $(k-1)^3=k^3-3k^2+3k-1$ *přerovnáním dostaneme*

$$k^3-(k-1)^3=3k^2-3k+1.$$

Tuto rovnici sečteme pro $k=1,\dots,n$. *Tím se členy na levé straně odečtou (tzv. teleskopická řada) a zbyde pouze poslední pro* $k=n$. *Tak dostaneme rovnici*

$$n^3=3\sum_{k=1}^{n}k^2-3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1.$$

Jediná neznámá suma je ta s k^2 *a dostáváme tedy výsledek*

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{3}n^3+\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{6}n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Poznámka 1.1 *Zobecnění* $\sum_{k=1}^{n} k^p$, *pro* $p \in \mathbb{N}$ *řeší* ***Faulhaberova formule****:*

$$\sum_{k=1}^{n} k^p = \frac{n^{p+1}}{p+1} + \frac{1}{2}n^p + \sum_{k=2}^{p} \frac{B_k}{k!} \left(\frac{p!}{(p-k+1)!} \right) n^{p-k+1},$$

kde B_k *je* k*-té Bernoulliho číslo definované pomocí křivkového integrálu*

$$B_k = \frac{n!}{2\pi \boldsymbol{i}} \int_{|z|=1} \frac{z}{e^z - 1} \frac{\mathrm{d}z}{z^{k+1}}.$$

.

Příklad 1.3 *Sečtěte* $S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx)$ *pro pevné* $x \in \mathbb{R} - \{2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

(Řešení: $S_n = \frac{\sin \frac{nx}{2} \sin \frac{(n+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$ *)*

Postup řešení: Jelikož

$$\sin(kx) \sin(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2} \left[\cos\left([k - 1/2]\, x \right) - \cos\left([k + 1/2]\, x \right) \right],$$

platí

$$S_n \sin(\frac{x}{2}) = \frac{1}{2} \left[\cos(\frac{x}{2}) - \cos\left(\left(n + \frac{1}{2} \right) x \right) \right] = \sin(\frac{nx}{2}) \sin \frac{(n+1)x}{2}.$$

Příklad 1.4 *Dokažte matematickou indukcí binomickou větu.*

Postup řešení: Chceme ukázat identitu

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k},$$

pro $x, y \in \mathbb{R}$ *a* $n \geq 1$.

- $n = 1$*: LS* $= x + y$*, PS* $= x + y$*. Rovnost LS* $=$ *PS platí.*
- $n - 1 \to n$*: Nechť platí* $(x+y)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{(n-1)-k} y^k$*. Budeme chtít ukázat, že*

vztah platí i pro n. Platí:

$$
\begin{aligned}
(x+y)^n &= (x+y)(x+y)^{n-1} \\
&\overset{IP}{=} (x+y)\left[\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{(n-1)-k}y^k\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{n-k}y^k + \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}x^{(n-1)-j}y^{j+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{n-k}y^k + \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{(j+1)-1}x^{n-(j+1)}y^{j+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{n-k}y^k + \sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{n-k}y^k \\
&= \binom{n-1}{0}x^n y^0 + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^{n-k}y^k + \binom{n-1}{n-1}x^0 y^n + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-1}{k-1}x^{n-k}y^k \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left[\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}\right]x^{n-k}y^k + \binom{n}{n}x^0 y^n + \binom{n}{0}x^n y^0 \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k,
\end{aligned}
$$

kde jsme ve třetím řádku použili substituci $k = j+1$.

Příklad 1.5 *Dokažte matematickou indukcí Moivrovu větu. Nechť $z = |z|(\cos\theta + \boldsymbol{i}\sin\theta)$ a $n \in \mathbb{N}$. Pak $z^n = |z|^n(\cos n\theta + \boldsymbol{i}\sin n\theta)$.*

Postup řešení: Nechť $z = |z|(\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi)$. Pak matematickou indukcí dostáváme

- $n = 1$ *: jasné*
- $n \to n+1$*: Užijeme indukční předpoklad*

$$z^{n+1} = z^n \cdot z \overset{IP}{=} [|z|^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)] \cdot [|z|(\cos\theta + i\sin\theta)].$$

Pak

$$
\begin{aligned}
z^{n+1} &= |z|^n|z|(\cos n\theta + i\sin n\theta)(\cos\theta + i\sin\theta) \\
&= |z|^{n+1}(\cos n\theta\cdot\cos\theta + \cos n\theta\cdot i\sin\theta + i\sin n\theta\cdot\cos\theta + i^2\sin n\theta\cdot\sin\theta)
\end{aligned}
$$

Jelikož $i^2 = -1$, pak $i^2\sin n\theta\cdot\sin\theta = -\sin n\theta\cdot\sin\theta$. Zároveň platí formule

$$
\begin{aligned}
\sin(n\theta+\theta) &= \sin n\theta\cdot\cos\theta + \cos n\theta\cdot\sin\theta, \\
k\sin(n\theta+\theta) &= k\sin n\theta\cdot\cos\theta + \cos n\theta\cdot k\sin\theta, \\
\cos(n\theta+\theta) &= \cos n\theta\cdot\cos\theta - \sin n\theta\cdot\sin\theta.
\end{aligned}
$$

Použitím těchto identit získáme

$$\begin{aligned} z^{n+1} &= |z|^{n+1} \left[\cos(n\theta+\theta) + i\sin(n\theta+\theta)\right] \\ &= |z|^{n+1} \left[\cos((n+1)\theta) + i\sin((n+1)\theta)\right]. \end{aligned}$$

Příklad 1.6 *Matematickou indukcí dokažte, že platí*

$$\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)} < \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Postup řešení: Pomocí produktu můžeme nerovnici přepsat na tvar

$$\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} < \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Nyní přestoupíme k indukci:

- $n = 1$*:* $\frac{1}{2} < \frac{1}{1}$*. Tato nerovnost platí.*
- $n \to n+1$*: Vyjdeme z levé strany a pomocí jednoduchých úprav a indukčního předpokladu dostáváme*

$$\frac{\prod_{k=1}^{n+1}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n+1}(2k)} = \frac{2n+1}{2(n+1)}\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} \overset{IP}{<} \frac{2n+1}{2(n+1)}\frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \frac{2n+1}{2n+2}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Nyní stačí ukázat $\frac{2n+1}{2n+2}\frac{1}{\sqrt[3]{n}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$*. Umocněním této rovnice na třetí dostáváme*

$$\begin{aligned} \frac{(2n+1)^3}{(2n+2)^3}\frac{1}{n} \le \frac{1}{n+1} &\Leftrightarrow \frac{(2n+1)^3}{n}\frac{1}{2^3(n+1)^3} \le \frac{1}{n+1} \\ &\Leftrightarrow \frac{(2n+1)^3}{8n(n+1)^2} \le 1 \\ &\Leftrightarrow 8n^3+12n^2+6n+1 \le 8n^3+16n^2+8n \\ &\Leftrightarrow 0 \le 4n^2+2n-1. \end{aligned}$$

což jistě platí. Důkaz je hotov.

1.2 Rovnice a nerovnice

Příklad 1.7 *Určete všechna* $a \in \mathbb{R}$*, pro která má rovnice*

$$\frac{x}{x-a} = a+1$$

alespoň jeden záporný kořen.

(Řešení: $a \in \{0\} \cup (-\infty, -1)$)

Postup řešení: Výraz má smysl pro $x \neq a$. Vynásobením rovnice číslem $x - a \neq 0$ dostáváme

$$x = ax - a^2 + x - a \Leftrightarrow ax = a(a+1).$$

Nyní rozdělíme výpočet na dvě možnosti: 1. $a = 0$ a 2. $a \neq 0$. V prvém případě rovnici řeší každé reálné číslo různé od 0 (tu jsme vyloučili hned první úpravou) a tedy jistě i záporné. Nula je tedy řešení. V druhém případě můžeme nenulovým a vydělit a získat řešení

$$x = a + 1.$$

To bude záporné, pokud $a < -1$.

Příklad 1.8 *Řešte v $\mathbb{R}^2$ soustavu*

$$\begin{aligned} x + (b-1)y &= 1, \\ (b+1)x + 3y &= -1 \end{aligned}$$

s reálným parametrem b.
(Řešení: $b = 2$ nemá řešení, $b = -2$ nekonečně řešení ($x = 1 + 3y$, $y \in \mathbb{R}$), v ostatních případech: $x = \frac{1}{2-b}$ a $y = \frac{1}{b-2}$)

Postup řešení: Z první rovnice můžeme vyjádřit $x = 1 - (b-1)y$ a dosadit do druhé:

$$(b+1)(1-(b-1)y) + 3y = -1 \Leftrightarrow (-b^2+4)y = -2 - b.$$

Vydělením výrazem $4 - b^2$ pro $b \neq \pm 2$ dostáváme

$$y = -\frac{2+b}{4-b^2} = \frac{1}{b-2}$$

a zpětným dosazením $x = 1 - \frac{b-1}{b-2} = \frac{1}{2-b}$. Pokud $b = 2$ dostáváme rovnost $0 = -4$, která jistě neplatí, a tedy v tomto případě nemá soustava řešení. V posledním případě $b = -2$ dostáváme rovnost $0 = 0$, a máme tedy nekonečně mnoho řešení.

Poznámka: Dosadíme-li $b = -2$ do zadání, dostaneme soustavu dvou rovnic

$$\begin{aligned} x - 3y &= 1, \\ -x + 3y &= -1, \end{aligned}$$

které jsou až na znaménko identické. Proto máme nekonečně mnoho řešení - viz LA.

Příklad 1.9 *Určete, pro které hodnoty reálného parametru $a \in \mathbb{R}$ má soustava*

$$\begin{aligned} ax - 2y &= 3, \\ 3x + ay &= 4 \end{aligned}$$

množinu řešení S, která je podmnožinou čtvrtého kvadrantu v $\mathbb{R}^2$, tj.

$$S \subset \{(x,y)|x>0 \wedge y<0\}\,.$$

(Řešení: $a \in \left(-\frac{8}{3};\frac{9}{4}\right)$)

Postup řešení: Rozdělíme na dva případy: 1. pokud $a=0$ pak $y=\frac{-2}{3}$ a $x=\frac{3}{4}$, tj. máme jedno řešení. 2. Pro nenulové a z první rovnice dostáváme $x=\frac{3+2y}{a}$. Dosazením do druhé získáme

$$\frac{3(3+2y)}{a}+ay=4.$$

Vynásobením této rovnice číslem a a následnou úpravou dostaneme

$$(6+a^2)y=4a-9.$$

Jelikož $6+a^2>0$ a chceme $y<0$, potřebujeme, aby $4a-9<0$, tj. $a<\frac{9}{4}$. Zpětným dosazením zjistíme x:

$$x=\frac{3+2\frac{4a-9}{6+a^2}}{a}=\frac{3a+8}{6+a^2}.$$

Tedy $x>0$, pokud $a>\frac{-8}{3}$.

Příklad 1.10 *Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici*

$$\frac{(x^2-1)(x-2)^2(x-3)}{x}\geq 0.$$

(Řešení: $x\in(-\infty,-1\rangle\cup(0,1\rangle\cup\{2\}\cup\langle 3;+\infty)$)
Postup řešení:

Levá strana nerovnice má smysl pro všechna $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Nejjednodušší způsob je graficky přes body, ve kterých funkce mění znaménko. V tomto případě jsou to body $x=-1,0,1,3$. Pro $x<-1$ je výraz na levé straně kladný, a musí být tedy kladný i na intervalu $(0,1)$ a $(3,+\infty)$. Dále vidíme, že levá strana je rovna nule pro x rovno -1, 1, 2 a 3.

Příklad 1.11 *Řešte v $\mathbb{R}$ nerovnici*

$$ax^2+bx+c>0,$$

kde a,b,c jsou reálné parametry.
(Řešení: Označme $D=b^2-4ac$ a $x_1=(-b+\sqrt{D})/(2a)$ a $x_2=(-b-\sqrt{D})/(2a)$, pokud $D\geq 0$. Řešení je následující: Pro $a>0\wedge D>0$ je $x\in(-\infty,x_2)\cup(x_1,+\infty)$. Pro $a>0\wedge D=0$ je $x\in\mathbb{R}\setminus\{-\frac{b}{2a}\}$. Pro $a>0\wedge D<0$ je $x\in\mathbb{R}$. Pro $a<0\wedge D>0$ je $x\in(x_1,x_2)$. Pro $a<0\wedge D\leq 0$ řešení neexistuje. Pro $a=0\wedge b>0$ je $x\in(-c/b,+\infty)$. Pro $a=0\wedge b<0$ je $x\in(-\infty,-c/b)$. Pro $a=0\wedge b=0\wedge c>0$ je $x\in\mathbb{R}$. Pro $a=0\wedge b=0\wedge c\leq 0$ řešení neexistuje.)
Postup řešení:

Příklad rozdělíme podle parametru a.

i. $a = 0$*: pak máme lineární nerovnici. Pro* $b > 0$ *je řešení* $x > \frac{-c}{b}$*, pro* $b = 0 \wedge c > 0$ *je řešení* $x \in \mathbb{R}$*, pro* $b < 0$ *je řešení* $x < -\frac{c}{b}$*. V ostatních případech* $(b = 0 \wedge c \leq 0)$ *řešení neexistuje.*

ii. $a > 0$*. Zjistíme nulové body. Diskriminant* $D = b^2 - 4ac$*. Rozlišíme tři případy:*

- $D > 0$*, pak máme dva nulové body* $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ *a řešení nerovnice* $x \in (-\infty, x_2) \cup (x_1, +\infty)$ *(platí* $x_1 > x_2$*).*
- $D = 0$*, pak máme jeden kořen. Protože* $a > 0$*, parabola* $y = ax^2 + bx + c$ *je nad osou* x *a této osy se v jednom bodě dotýká. Řešením jsou proto všechna* $x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{b}{2a}\}$*.*
- $D < 0$ *Pak nemá žádný kořen. Parabola* $y = ax^2 + bx + c$ *celá leží nad osou* x *a řešením jsou všechna reálná čísla* $x \in \mathbb{R}$*.*

iii. $a < 0$*. Obdobná diskuze jako v předchozím bodě. Pokud* $D > 0$*, řešení je* (x_1, x_2) *(platí* $x_2 > x_1$*). V dalších dvou případech již řešení neexistuje*

Příklad 1.12 *Řešte v* $\mathbb{R}$ *nerovnici*

$$|ax^2 - b| < a,$$

s reálnými parametry a, b*.*
(Řešení: Označme $\alpha = b/a$ *pro* $a > 0$*. Řešení je následující: Pro* $a \leq 0$ *a pro* $a > 0 \wedge \alpha \leq -1$ *řešení neexistuje. Pro* $a > 0 \wedge \alpha \in (-1, 1)$ *je* $x \in (-\sqrt{\alpha + 1}, \sqrt{\alpha + 1})$*. Pro* $a > 0 \wedge \alpha \geq 1$ *je* $x \in (-\sqrt{\alpha + 1}, -\sqrt{\alpha - 1}) \cup (\sqrt{\alpha - 1}, \sqrt{\alpha + 1})$*.)*
Postup řešení:

Pro $a \leq 0$ *řešení neexistuje. Stačí se tedy omezit na* $a > 0$*. Nejdříve vydělíme nerovnici číslem* a *a označíme* $\alpha = b/a$*. Dostaneme*

$$|x^2 - \alpha| < 1,$$

čili (jak se můžeme přesvědčit nakreslením situace na číselnou osu) $\alpha - 1 < x^2 < \alpha + 1$*. Nyní obě nerovnice vyřešíme.*

- $\alpha - 1 < x^2$*. Pro* $\alpha - 1 < 0$ *(tedy* $\alpha < 1$*) nerovnost platí vždy. Pro* $\alpha - 1 \geq 0$ *můžeme psát*

  $$\alpha - 1 < x^2 \;\Leftrightarrow\; 0 < x^2 - \alpha + 1 \;\Leftrightarrow\; 0 < (x - \sqrt{\alpha - 1})(x + \sqrt{\alpha - 1}).$$

  Řešením jsou proto všechna $x \in (-\infty, -\sqrt{\alpha - 1}) \cup (\sqrt{\alpha - 1}, +\infty)$*.*

- $x^2 < \alpha + 1$*. Pro* $\alpha + 1 \leq 0$ *(tedy* $\alpha \leq -1$*) nerovnice nemá řešení. Pro* $\alpha + 1 > 0$ *můžeme psát*

  $$x^2 < \alpha + 1 \;\Leftrightarrow\; x^2 - \alpha - 1 < 0 \;\Leftrightarrow\; (x - \sqrt{\alpha + 1})(x + \sqrt{\alpha + 1}) < 0.$$

  Řešením jsou proto všechna $x \in (-\sqrt{\alpha + 1}, \sqrt{\alpha + 1})$*.*

Celá soustava výše zmíněných nerovnic (a tedy i původní nerovnice) má proto (pro $\alpha > 0$) následující řešení:

- $\alpha \leq -1$*: žádné řešení.*
- $\alpha \in (-1, 1)$*:* $x \in (-\sqrt{\alpha+1}, \sqrt{\alpha+1})$.
- $\alpha \geq 1$*:* $x \in (-\sqrt{\alpha+1}, -\sqrt{\alpha-1}) \cup (\sqrt{\alpha-1}, \sqrt{\alpha+1})$.

Příklad 1.13 *Řešte v* $\mathbb{R}$ *rovnici*

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{1-x}} = 1 + \sqrt{x}.$$

(Řešení: $x \in \{1\}$ *)*
Postup řešení: Nejprve najdeme množinu přípustných hodnot x*. V odmocnině nesmí být záporné číslo. Dostáváme tak podmínky:*

$$x + 3 - 4\sqrt{1-x} \geq 0, \qquad 1 - x \geq 0, \qquad x \geq 0.$$

Druhá a třetí dávají omezení $x \in \langle 0, 1\rangle$*. První po úpravě a umocnění dává*

$$(x+3)^2 \geq 16(1-x) \Leftrightarrow x^2 + 22x - 7 \geq 0,$$

tedy $x \in (-\infty, -11 - 8\sqrt{2}) \cup (-11 + 8\sqrt{2}, +\infty)$*. Obor přípustných hodnot je* $x \in \langle -11 + 8\sqrt{2}, 1\rangle$*. Přejdeme nyní k řešení samotné nerovnice. Umocněním získáme*

$$\begin{aligned} x + 3 - 4\sqrt{1-x} &= 1 + 2\sqrt{x} + x, \\ 2\sqrt{1-x} + \sqrt{x} &= +1. \end{aligned}$$

Po opětovném umocnění dostáváme

$$4\sqrt{x(1-x)} = -3 + 3x.$$

Z této rovnice pozorujeme, že řešení musí splňovat podmínku $x \geq 1$ *(aby* $-3 + 3x \geq 0$*). Jediné možné řešení je tedy* $x = 1$ *o čemž se přesvědčíme dalším postupem. Opětovným umocněním dostáváme kvadratickou rovnici*

$$16x(1-x) = 9x^2 - 18x + 9$$

s řešením $x = 1$ *a* $x = \frac{9}{25}$*. Řešení* $x = \frac{9}{25}$ *nevyhovuje podmínce* $x \geq 1$*, a musíme ho tedy vyloučit. O jeho vyloučení se můžeme přesvědčit i zkouškou.*

Příklad 1.14 *Řešte v* $\mathbb{R}$ *rovnici*

$$\sqrt[3]{\frac{25-x}{3+x}} + 3\sqrt[3]{\frac{3+x}{25-x}} = 4.$$

(Řešení: $x \in \{11, -2\}$)

Postup řešení: Substitucí $y = \sqrt[3]{\frac{25-x}{3+x}}$ pro $x \notin \{-3, 25\}$ přejde původní rovnice na čitelnější tvar

$$y + \frac{3}{y} = 4.$$

Vynásobením y získáme kvadratickou rovnici, která má řešení $y_1 = 1$ a $y_2 = 3$. Zpětným dosazením do substituce získáme řešení $x_1 = 11$ a $x_2 = -2$.

Příklad 1.15 *Řešte v $\mathbb{R}$ rovnici*

$$\sqrt{x^2 + b^2} + b = x$$

s reálným parametrem b.
(Řešení: Pro $b = 0$ je $x \in \mathbb{R}_0^+$. Pro $b < 0$ je $x = 0$. Pro $b > 0$ nemá řešení.)
Postup řešení: Rovnici přepíšeme na tvar $\sqrt{x^2 + b^2} = x - b$. Aby měl výraz smysl, musí platit $x - b \geq 0$, tj. $x \geq b$. Je-li $b = 0$, pak řešením jsou $x \in \mathbb{R}_0^+$. Pro ostatní b si výraz umocněním upravíme na

$$x^2 + b^2 = x^2 + b^2 - 2bx.$$

Jediným možným řešením může (ale nemusí) být $x = 0$: Je-li $b < 0$, pak řešením je $x = 0$. Pokud $b > 0$, pak řešení $x = 0$ nevyhovuje podmínce $x \geq b$. Celkově tedy

- *$b = 0$ řešením je libovolné $x \in \mathbb{R}_0^+$*
- *$b < 0$ řešení $x = 0$.*
- *$b > 0$ řešení neexistuje.*

Příklad 1.16 *Pro která reálná čísla m bude mít rovnice*

$$4x^2 - 8mx - 6m + 9 = 0$$

jeden kořen roven trojnásobku druhého kořene?
(Řešení: $m \in \{1, -3\}$)
Postup řešení: Využijeme Vietovy vzorce. Pro vztahy mezi kořeny kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ platí

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a},$$
$$x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

(snadno se odvodí sečtením/vynásobením obecného vzorce pro kořeny). Dostáváme tak rovnice

$$x_1 = 3x_2,$$
$$x_1 + x_2 = \frac{8m}{4},$$
$$x_1 x_2 = \frac{-6m + 9}{4}.$$

Dosazením první rovnice do druhé a třetí obdržíme:

$$4x_2 = 2m,$$
$$3x_2^2 = \frac{-6m+9}{4} \Leftrightarrow \frac{3m^2}{4} = \frac{-6m+9}{4} \Leftrightarrow 3m^2 + 6m - 9 = 0.$$

Tato rovnice má dvě řešení $m_1 = 1$ *a* $m_2 = -3$*, což jsou řešení i naší úlohy.*

1.3 Logaritmy a logaritmické rovnice

Poznámka 1.2 *Jednodušší příklady:*

- *Zjednodušte:* $\log_{25} \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$*. Řešení: -1/6*
- *Zjednodušte* $\log_a \left[\left\{ a \left[a \left(a \right)^{\frac{1}{4}} \right]^{\frac{1}{3}} \right\}^{\frac{1}{2}} \right]$*. Řešení:* $\frac{17}{24}$

Příklad 1.17 *Řešte v* $\mathbb{R}$ *rovnici*

$$x^{\log^2 x^2 - 3\log(x) - \frac{9}{2}} = 10^{-2\log(x)}.$$

(Řešení: $x \in \left\{1, 10^{5/4}, 10^{-1/2}\right\}$ *)*

Postup řešení: Výrazy v zadání mají smysl pro $x > 0$*. Zlogaritmováním a použitím vztahů pro logaritmus dostaneme*

$$\left(\log^2 x^2 - 3\log(x) - \frac{9}{2} \right) \log x = -2 \log x \log 10.$$

Vidíme, že jedno řešení je $x_1 = 1$*. Pro* $x \neq 1$ *podělíme* $\log x$*, čímž získáme*

$$4\log^2 x - 3\log(x) - \frac{9}{2} = -2,$$

kde jsme využili vztahy $\log 10 = 1$ *a* $\log^2(x^2) = (\log(x^2))^2 = (2\log x)^2 = 4\log^2 x$*. Dostali jsme kvadratickou rovnici, kterou substitucí* $y = \log x$ *zjednodušíme na tvar*

$$4y^2 - 3y - \frac{5}{2} = 0.$$

Řešení jsou $y_2 = \frac{5}{4}$ *a* $y_3 = -\frac{1}{2}$*. Původní rovnice má tedy řešení* $x_2 = 10^{5/4}$ *a* $x_3 = 10^{-1/2}$*.*

Příklad 1.18 *Řešte v* $\mathbb{R}^2$ *soustavu rovnic*

$$log_5 x + 3^{log_3 y} = 7,$$
$$x^y = 5^{12}.$$

(Řešení: $(x, y) \in \{(125, 4), (625, 3)\}$ *)*

Postup řešení: Logaritmováním druhé rovnice logaritmem o základu 5 dostáváme

$$y \log_5 x = 12 \log_5 5 = 12.$$

Dosazením do první rovnice a využitím faktů, že logaritmus a exponenciála (o stejném základu) jsou navzájem inverzní funkce a že platí $y \neq 0$*, dostaneme*

$$\frac{12}{y} + y = 7.$$

Vynásobením y *dostaneme kvadratickou rovnici s řešením* $y_1 = 4$ *a* $y_2 = 3$*, kterým ze vztahu* $x = 5^{12/y}$ *odpovídají* $x_1 = 125$ *a* $x_2 = 625$*.*

1.4 Goniometrické rovnice

Příklad 1.19 *Řešte v* $\mathbb{R}$ *rovnici*

$$\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}.$$

(Řešení: $x \in \left\{\frac{5\pi}{12} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{12} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$ *)*

Postup řešení: Protože $\sqrt{3} = 2\frac{\sqrt{3}}{2} = 2 \cos \frac{\pi}{6}$ *můžeme levou stranu rovnice přepsat na*

$$\sin x + 2 \cos(\frac{\pi}{6}) \cos x = \sin x + 2 \left[\cos(x - \frac{\pi}{6}) - \sin(\frac{\pi}{6}) \sin x\right] = 2 \cos(x - \frac{\pi}{6}).$$

Řešenou rovnici lze tedy ekvivalentně vyjádřit ve tvaru

$$2 \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \cos(x - \frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{4} + 2k\pi)$$

s řešením

$$\begin{aligned} x_1 - \frac{\pi}{6} &= \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{5\pi}{12} + 2k\pi, \\ x_2 - \frac{\pi}{6} &= -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{\pi}{12} + 2k\pi. \end{aligned}$$

Příklad 1.20 *Řešte v* $\mathbb{R}$ *rovnici*

$$\frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = 2 \cos 2x.$$

(Řešení: $x \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{\pi}{12} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{7\pi}{12} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$ *)*

Postup řešení: Upravíme levou a pravou stranu:

$$\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x} = \frac{\frac{\cos x-\sin x}{\cos x}}{\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}} = \frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x},$$
$$2\cos 2x = 2(\cos^2 x - \sin^2 x) = 2(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x).$$

Tím dostáváme

$$\frac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x} = 2(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x).$$

Ihned vidíme řešení $\cos x = \sin x$, *tj.* $x = \frac{\pi}{4}+k\pi$. *Pro ostatní* $x \neq \frac{\pi}{4}+k\pi$ *můžeme rovnici vydělit* $\cos x - \sin x \neq 0$, *čímž získáme*

$$\frac{1}{2} = (\cos x+\sin x)^2 = 1+2\sin x\cos x = 1+\sin 2x \Leftrightarrow -\frac{1}{2} = \sin 2x.$$

Výsledná rovnice má řešení

$$2x = -\frac{\pi}{6}+2k\pi \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{\pi}{12}+k\pi,$$
$$2x = \frac{7\pi}{6}+2k\pi \quad \Rightarrow \quad x = \frac{7\pi}{12}+k\pi.$$

Příklad 1.21 *Řešte v* $\mathbb{R}$

$$|\cos x|^{\sin^2 x-\frac{3}{2}\sin x+\frac{1}{2}} = 1.$$

(Řešení: $x \in \left\{\frac{5\pi}{6}+2k\pi | k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6}+2k\pi | k\in\mathbb{Z}\right\} \cup \{k\pi | k\in\mathbb{Z}\}$ *)*

Postup řešení: Výraz má smysl pro $\cos(x) \neq 0$, *tj. pro* $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$, *kde* $k \in \mathbb{Z}$ *(jinak dostáváme nedefinovaný výraz* 0^0*). Rovnici zlogaritmujeme, čímž dostaneme*

$$\left(\sin^2 x - \frac{3}{2}\sin x + \frac{1}{2}\right)\log|\cos x| = 0.$$

Dostáváme součin dvou výrazů, který má být roven 0. První výraz po substituci $u = \sin(x)$ *přejde na tvar*

$$u^2 - \frac{3}{2}u + \frac{1}{2}$$

s kořeny $u_1 = 1$ *a* $u_2 = \frac{1}{2}$. *Po zpětném dosazení do substituce dostáváme*

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\pi}{2}+2k\pi,$$
$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x_2 = \frac{\pi}{6}+2k\pi \quad a \quad x_3 = \frac{5\pi}{6}+2k\pi.$$

Řešení x_1 *musíme vyloučit, neboť jsme se omezili na* $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$. *Další řešení plynou z podmínky* $\log|\cos(x)| = 0 \Leftrightarrow |\cos(x)| = 1 \Leftrightarrow \cos(x) = \pm 1$, *tj.* $x = k\pi$. *Řešení naší úlohy jsou*

$$x_1 = k\pi, \quad x_2 = \frac{\pi}{6}+2k\pi, \quad x_3 = \frac{5\pi}{6}+2k\pi, \qquad k\in\mathbb{Z}.$$

Příklad 1.22 *Řešte rovnici v* $\mathbb{R}$

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x = \cos x + \cos 2x + \cos 3x.$$

(Řešení: $x \in \left\{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{4}{3}\pi + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} | k \in \mathbb{Z}\right\}$ *)*

Postup řešení: Na členy s $1x$ *a* $3x$ *využijeme vzorce*

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right),$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

Tím dostaneme

$$2\sin\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right) + \sin(2x) = 2\cos\left(\frac{x+3x}{2}\right)\cos\left(\frac{x-3x}{2}\right) + \cos(2x)$$
$$2\sin(2x)\cos(-x) + \sin(2x) = 2\cos(2x)\cos(-x) + \cos(2x)$$

S využitím sudosti $\cos(x) = \cos(-x)$ *a faktorizací dostaneme rovnici*

$$[\sin(2x) - \cos(2x)]\,[2\cos(x) + 1] = 0.$$

Řešením rovnice $\cos(x) = -\frac{1}{2}$ *dostaneme* $x_1 = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi$ *a* $x_2 = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi$*. Další řešení získáme z podmínky* $\sin(2x) = \cos(2x) \Leftrightarrow \operatorname{tg}(2x) = 1 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{4} + k\pi$*, tj.* $x_3 = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}$*. Celkem*

$$x_1 = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, \quad x_2 = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi, \quad x_3 = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Příklad 1.23 *Řešte nerovnici v* $\mathbb{R}$

$$2\sin x \leq \frac{1}{\cos x}.$$

(Řešení: $x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\langle 0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \cup (\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi)\right] \cup \left\{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$ *)*

Postup řešení: Obě funkce jsou 2π *periodické. Stačí se tedy omezit na interval délky* 2π*, např.* $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$*. Na tomto intervalu má výraz smysl, pokud* $x \neq \frac{\pi}{2}$ *a* $x \neq \frac{3\pi}{2}$*. Nyní bychom chtěli nerovnici vynásobit* $\cos x$*. Musíme proto rozlišit případy, kdy je cosinus kladný a kdy záporný.*

- $\cos x > 0 \Leftrightarrow x \in \langle 0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$*. Vynásobením* $\cos x$ *dostaneme*

  $$2\sin x\cos x = \sin 2x \leq 1$$

  což platí vždy.

- $\cos x < 0 \Leftrightarrow x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$. *Vynásobením* $\cos x$ *dostaneme*

$$\sin 2x \geq 1.$$

Protože $\sin\alpha \leq 1$ *řešíme pouze případ* $\sin 2x = 1$, *tj.* $2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. *Což je to samé jako* $x \in \{\frac{\pi}{4} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. *Ve zkoumaném intervalu* $x \in (\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3\pi}{2} + 2k\pi)$ *leží pouze body* $x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$.

Celkem má množina řešení tvar

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \middle| (\exists k \in \mathbb{Z})(x \in \langle 0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \vee x \in (\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \vee x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi) \right\},$$

neboli

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[\langle 0 + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi) \cup (\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi) \cup \{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi\} \right].$$

Příklad 1.24 *Řešte v* $\mathbb{R}$

$$16^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{2\cos 2x} = 10.$$

(Řešení: $x \in \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, -\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{3} + k\pi, -\frac{\pi}{3} + k\pi | k \in \mathbb{Z} \right\}$ *)*

Postup řešení: Úpravami převedeme rovnici na tvar

$$2^{4\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{2\cos^2 x - 2\sin^2 x} = 2^{4\sin^2 x} + 4 \cdot 2^2 2^{-4\sin^2 x} = 10.$$

Použitím substituce $y = 2^{4\sin^2 x} \neq 0$ *dostaneme*

$$y + 16\frac{1}{y} = 10 \quad \Rightarrow \quad y^2 - 10y + 16 = 0.$$

Tato rovnice má řešení $y = 2$ *a* $y = 8$. *Zpětnou substitucí dostaneme pro* $y = 2$ *rovnici*

$$2 = 2^{4\sin^2 x} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{4} = \sin^2 x \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} = |\sin x|$$

s řešením $x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi$ *a* $x_2 = -\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. *V druhém případě pro* $y = 8$ *máme*

$$8 = 2^3 = 2^{4\sin^2 x} \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4} = \sin^2 x \quad \Rightarrow \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = |\sin x|.$$

Tato rovnice má řešení $x_3 = \frac{\pi}{3} + k\pi$ *a* $x_4 = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Příklad 1.25 *Určete všechna čísla* $x \in \mathbb{R}$ *tak, aby čtvrtý člen binomického rozvoje*

$$\left(x^{\frac{1}{2(1+\log x)}} + \sqrt[12]{x} \right)^6$$

byl roven 200.

(Řešení: $x \in \{10, 10^{-4}\}$ *)*

Postup řešení: Výraz má smysl pro $x > 0$ *a zároveň* $\log x \neq -1$*, tj.* $x \neq \frac{1}{10}$*. Binomická věta říká* $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$*. Čtvrtý člen získáme pro* $k = 3$*. Proto požadujeme*

$$\binom{6}{3} \left(x^{\frac{1}{2(1+\log x)}}\right)^3 \left(\sqrt[12]{x}\right)^3 = 200.$$

Po úpravě dostaneme

$$20 x^{\frac{3}{2(1+\log x)}} x^{\frac{1}{4}} = 200 \quad \Rightarrow \quad x^{\frac{3}{2(1+\log x)}+\frac{1}{4}} = 10.$$

Na rovnici aplikujeme dekadický logaritmus

$$\left(\frac{3}{2(1+\log x)} + \frac{1}{4}\right) \log x = 1$$

a zavedeme substituci $\log x = y$

$$\left(\frac{3}{2(1+y)} + \frac{1}{4}\right) y = 1.$$

Převedením na společného jmenovatele a ekvivalentními úpravami převedeme rovnici na kvadratickou

$$y^2 + 3y - 4 = 0,$$

která má kořeny $y_1 = 1$ *a* $y_2 = -4$*. Hledáme nyní* x *splňující* $y = \log x$*. Dostáváme*

$$\begin{aligned} \log x_1 = 1 \quad &\Rightarrow \quad x_1 = 10, \\ \log x_2 = -4 \quad &\Rightarrow \quad x_2 = 10^{-4}. \end{aligned}$$

Celkově tedy $x \in \{10, 10^{-4}\}$*.*

1.5 Komplexní čísla

Příklad 1.26 *Zapište číslo* $z = \frac{\boldsymbol{i}^{10}-1}{\boldsymbol{i}^5+1}$ *v goniometrickém tvaru.*
(Řešení: $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + \boldsymbol{i}\sin\frac{3}{4}\pi\right)$ *)*

Postup řešení: Nejprve číslo upravíme do algebraického tvaru, ze kterého snadno získáme tvar goniometrický. Platí

$$z = \frac{\boldsymbol{i}^{10}-1}{\boldsymbol{i}^5+1} = \frac{(\boldsymbol{i}^5-1)(\boldsymbol{i}^5+1)}{\boldsymbol{i}^5+1} = \boldsymbol{i}^5 - 1 = \boldsymbol{i} - 1.$$

Velikost čísla je $|z| = \sqrt{2}$ *a pro jeho úhel* φ *platí*

$$\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \ \wedge \ \cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{3}{4}\pi.$$

Číslo z v goniometrickém tvaru má proto tvar

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3}{4}\pi + \boldsymbol{i}\sin\frac{3}{4}\pi\right).$$

Příklad 1.27 *Řeště v $\mathbb{C}$:*

$$z^2 - 4\boldsymbol{i}z - 3 = 0.$$

(Řešení: $z \in \{\boldsymbol{i}, 3\boldsymbol{i}\}$)

Postup řešení: Diskriminant této kvadratické rovnice je roven

$$D = (-4\boldsymbol{i})^2 - 4\cdot(-3) = -4.$$

Řešení jsou tedy

$$z_{1,2} = \frac{4\boldsymbol{i} \pm \boldsymbol{i}\sqrt{|-4|}}{2} = \begin{cases} 3\boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{i} \end{cases}.$$

Alternativní řešení: pomocí Vietových vzorců přepíšeme rovnici na tvar

$$(z - 3i)(z - i) = 0,$$

ze kterého už rovnou vidíme kořeny.

(Hádání kořenů tímto způsobem zrychluje postup řešení kvadratických rovnic).

Příklad 1.28 *Řešte v $\mathbb{C}$:*

$$(5 - \frac{1}{\boldsymbol{i}})\overline{z} + 2z = 22\boldsymbol{i}.$$

(Řešení: $z \in \{1 - 7\boldsymbol{i}\}$)

Postup řešení: Úpravou $\frac{1}{\boldsymbol{i}} = -\boldsymbol{i}$ a dosazením $z = x + \boldsymbol{i}y$, kde $x, y \in \mathbb{R}$, dostaneme

$$\begin{aligned}(5 + \boldsymbol{i})x - \boldsymbol{i}(5 + \boldsymbol{i})y + 2x + \boldsymbol{i}2y &= 22\boldsymbol{i},\\ (7x + y) + (x - 3y)\boldsymbol{i} &= 0 + 22\boldsymbol{i}.\end{aligned}$$

Porovnáním reálných a imaginárních složek dostaneme dvě rovnice pro dvě neznáme $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}7x + y &= 0,\\ x - 3y &= 22.\end{aligned}$$

Soustava má řešení $x = 1$ a $y = -7$. Řešení původní rovnice je tedy $z = 1 - 7\boldsymbol{i}$.

Příklad 1.29 *V Gaussově rovině zakreslete množinu řešení v* $\mathbb{C}$ *rovnice*

$$(|z - \boldsymbol{i}| - |z + 3\boldsymbol{i}|)\,(|z| - 2) = 0.$$

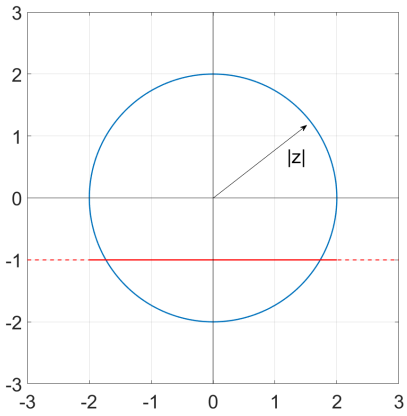
(Řešení: Na Obrázku 1.)
Postup řešení: Prvním řešení je množina bodů $|z| = 2$*, což v Gaussově rovině představuje kružnici se středem v počátku a poloměrem 2. V druhém případu dostáváme rovnici*

$$|z - \boldsymbol{i}| = |z + 3\boldsymbol{i}| \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y-1)^2} = \sqrt{x^2 + (y+3)^2},$$

kde $z = x + \boldsymbol{i}y$ *pro* $x, y \in \mathbb{R}$*. Po umocnění a roznásobení přejde rovnice na tvar*

$$-2y + 1 = 6y + 9$$

s jediným řešením $y = -1$ *(závislost na* x *vypadne). Toto řešení představuje v Gaussově rovině přímku, která je rovnoběžná s osou* x *a která prochází bodem* $[0, -1]$*, viz obrázek 1.*



Obrázek 1: Řešení rovnice $(|z - \mathbf{i}| - |z + 3\mathbf{i}|)\,(|z| - 2) = 0$ v $\mathbb{C}$

Příklad 1.30 *V* $\mathbb{C}$ *řešte rovnici*

$$z^4 - z^3 + z^2 - z + 1 = 0.$$

(Řešení: $z \in \left\{\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi | \varphi \in \left\{\frac{\pi}{5}, \frac{3\pi}{5}, \frac{7\pi}{5}, \frac{9\pi}{5}\right\}\right\}$ *)*

Postup řešení: jelikož číslo $z = -1$ *není řešení rovnice (jednoduše ověřitelné), můžeme rovnici vynásobit číslem* $(z + 1)$ *a získat*

$$z^5 = -1.$$

Tuto rovnici vyřešíme pomocí Moivrovy věty. Jelikož $z = |z|(\cos\varphi + \boldsymbol{i}\sin\varphi)$*, platí*

$$z^5 = |z|^5(\cos 5\varphi + \boldsymbol{i}\sin 5\varphi) = -1 = 1(\cos\pi + \boldsymbol{i}\sin\pi).$$

Nyní porovnáme velikost a úhel, které se musejí rovnat. Pro velikost dostáváme

$$|z| = 1$$

a pro úhel

$$5\varphi = \pi + 2k\pi.$$

Zde nesmíme zapomenout na periodu funkce cosinus. Z předcházející rovnice dostáváme pro různé volby $k \in \mathbb{Z}$ *celkem pět různých řešení:*

$$\varphi_0 = \frac{\pi}{5}, \quad \varphi_1 = \frac{3\pi}{5}, \quad \varphi_2 = \pi, \quad \varphi_3 = \frac{7\pi}{5}, \quad \varphi_4 = \frac{9\pi}{5}.$$

Nyní ale musíme vyloučit φ_2*, ten by totiž dával řešení* $z = -1$*, které jsme již vyloučili z oboru řešení a řešením původní rovnice být nemůže. Tohoto si lze všimnout, jelikož na počátku jsme měli rovnici čtvrtého řádu, musíme proto získat 4 různá řešení. Ne víc nebo méně.*

Poznámka: Jedná se o reciprokou rovnici 4. stupně. Pokud ji jako reciprokou rovnici budeme řešit (speciálními substitucemi), tak vyjdou kořeny $z = \frac{\pm\sqrt{5}-1}{4} \pm \frac{\sqrt{-1\pm 2\sqrt{5}}}{2}$.