Kapitola 1

Interference a ohyb

1.1 Michelsonův interferometr

Pojem interference,interference a ohyb, podmínka pro interferenci. Michelsonův interferometr, případy dokonalé koherence a nekoherence, viditelnost interferenčního jevu, určení koherenční doby.

Samozřejmým důsledkem linearity Maxwellových rovnic ve vakuu nebo lineárním prostředí a z nich plynoucích vlnových rovnic je princip superpozice: s danými dvěma řešeními je řešením i každá jejich lineární kombinace, speciálně jejich součet nebo rozdíl. U harmonických postupných vln stejné frekvence tak dochází v různých místech prostoru ke konstruktivní respektive destruktivní superpozici. Výsledné vlnění v prostoru má formu stojatého vlnění, v němž je energie přerozdělena s maximy a minimy intenzity. Tato **interferenční struktura** ve stacionárním světelném poli se na stínítku projeví určitým vzorem světlých a tmavých interferenčních proužků — **interferenčním jevem**. Objev interference světla Thomasem Youngem (1807) v uspořádání se dvěma štěrbinami (oddíl 8.3) byl považován za potvrzení vlnové podstaty světla.

Při detekci interferenčních jevů buď lidským okem nebo jinými detektory záření se registruje nikoliv okamžitá hodnota amplitudy, nýbrž intenzita, tj. časová střední hodnota kvadratické energetické veličiny s charakteristickou prostorovou modulací.

Uvedený obecný pojem interference vlnění je v optice obvyklé dělit na případy skládání vlnění z diskrétních bodových zdrojů (*interference v užším smyslu*) a skládání vlnění ze spojitě rozložených zdrojů (**ohyb** neboli **difrakce**).

Ve skutečných světelných polích, která nejsou monochromatická, ale v nejlepším případě kvazimonochromatická, je třeba zkoumat podmínky pro vznik interferenčních jevů. Hlavním činitelem, který ve stacionárním náhodném světelném poli může narušit realizaci interferenčního jevu, jsou nepředvídatelné náhodné změny fáze v čase a v prostoru. K popisu náhodných změn fáze v čase jsme v oddíle 7.4 zavedli pojem **časové koherence**.

Dobrým příkladem, na kterém lze ilustrovat roli časové koherence a vliv koherenční doby na realizaci interferenčního jevu, je Michelsonův interferometr (obr. 1.1). Svazek kvazimonochromatického světla z bodového zdroje Z dojde na dělič svazku (polopropustné

Obrázek 1.1: Michelsonův interferometr.

zrcadlo) D. Dva vzniklé svazky se odrážejí od zrcadel Z_1, Z_2 a po opětném dopadu na dělič D se registruje světlo přicházející k pozorovateli (okuláru) P. Světlo ze zdroje Z se tedy k pozorovateli P šíří po dvou cestách, jejichž celkové délky označme l_1, l_2. Tyto délky lze měnit posuvem zrcadel.

Zapíšeme-li složku kvazimonochromatického elektrického pole v místě zdroje

$$E(Z,t) = E_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi(t)\right),$$

můžeme elektrické pole svazků $i = 1, 2$ v bodě P vyjádřit pomocí příslušných retardovaných časů $t_i' = t - (l_i/c)$ a koeficientů zeslabení amplitud a_i:

$$E_i(P,t) = a_i E(Z,t_i') = a_i E_0 \cos\left(\omega_0 t - k_0 l_i + \varphi_i(t_i')\right).$$

K interferenčnímu jevu vede interferenční člen v kvadratickém výrazu pro intenzitu superpozice obou svazků

$$I = < \left[E_1(P,t) + E_2(P,t)\right]^2 >_r .$$

Pro objasnění vlivu časové koherence provedeme nejprve středování přes periodu $T_0 \ll \tau_{koh}$:

$$< \left[E_1(P,t) + E_2(P,t)\right]^2 >_{T_0} = I_1 + I_2 + I_{int}(t).$$

Interferenční člen

$$\begin{aligned} I_{int}(t) &= a_1 a_2 < 2E(Z,t_1')E(Z,t_2') >_{T_0} \\ &= a_1 a_2 E_0^2 < 2\cos\left(\omega_0 t_1' + \varphi(t_1')\right)\cos\left(\omega_0 t_2' + \varphi(t_2')\right) >_{T_0} \end{aligned}$$

se upraví pomocí vzorce $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b)$. Při středování přes T_0 dá člen $\cos(a+b)$ nulu a v členu $\cos(a-b)$ uvážíme, že $\varphi(t)$ se během jedné periody nemění, takže

$$I_{int}(t) = a_1 a_2 E_0^2 \cos\left(k_0(l_2 - l_1) + \varphi(t_1') - \varphi(t_2')\right).$$

Za předpokladu pozorování velmi pomalým přístrojem s reakční dobou $t_r \gg \tau_{koh}$ bude výsledný interferenční jev záviset na délce časového intervalu

$$\Delta t = |t_1' - t_2'| = \frac{|l_2 - l_1|}{c}$$

mezi vysláním signálů ze zdroje Z tak, aby oba dospěly k pozorovateli ve stejném okamžiku t.

1. *Případ dokonalé koherence.* Je-li $\Delta t \ll \tau_{koh}$, pak $\varphi(t_1') \doteq \varphi(t_2')$ a interferenční člen

$$I_{int}(t) = a_1 a_2 E_0^2 \cos\left(k_0(l_2 - l_1)\right)$$

se nemění s časem, je tedy roven intenzitě změřené velmi pomalým přístrojem. Jeho velikost závisí jen na dráhovém rozdílu $|l_2 - l_1| = c\Delta t$ a leží v intervalu

$$-a_1 a_2 E_0^2 \leq I_{int} \leq a_1 a_2 E_0^2.$$

Celková intezita v místě P je rovněž konstantní

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}E_0^2(a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos k_0(l_2 - l_1)) \\ &= I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos k_0(l_2 - l_1) \end{aligned}$$

a leží v intervalu

$$\left(\sqrt{I_1} - \sqrt{I_2}\right)^2 \leq I \leq \left(\sqrt{I_1} + \sqrt{I_2}\right)^2. \tag{1.1}$$

Podmínka $\Delta t \ll 10^{-9} s$ se pomocí dráhového rozdílu vyjádří jako $|l_2 - l_1| \ll 0,3\,m$.

Cvičení 1. Interferenční proužky pozorované v Michelsonově pokusu jsou způsobeny interferencí ne zcela rovnoběžných svazků přicházejících do místa pozorování. K tomu si spočtěte příklad 7.16 ze skript [**?**].

2. *Případ nekoherence.* Je-li $\Delta t \geq \tau_{koh}$, pak $\varphi(t_1') - \varphi(t_2')$ se zcela náhodně mění s časem. Vzhledem k tomu, že během velmi dlouhé doby t_r rozdíl fází nabývá se stejnou pravděpodobností všech hodnot v intervalu $< 0, 2\pi >$, bude přístroj registrovat

$$< I_{int}(t) >_r = \frac{1}{t_r}\int_0^{t_r} I_{int}(t)dt = 0,$$

tj. $I = I_1 + I_2$ a interferenční jev nevzniká.[1]

Popsané případy dokonalé časové koherence a nekoherence představují mezní situace, mezi nimiž se spojitě vyskytují připady *částečné koherence*. Přechod mezi nimi charakterizuje veličina

$$V = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

zvaná **viditelnost (kontrast)** interferenčního jevu. Při dokonalé koherenci nabývá viditelnost své maximální hodnoty

$$V_{max} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2}$$

(při $I_1 = I_2$ je $V_{max} = 1$), zatímco u nekoherentních signálů je $V = 0$. Koherenční čas τ_{koh} je pak z experimentální praxe konvečně definován hodnotou Δt, pro kterou V poklesne např. na $V_{max}/\sqrt{2}$ nebo na $0,1\,V_{max}$ apod.

[1] Tento výsledek se někdy vyjadřuje slovy, že "nekoherentní vlny spolu neinterferují". K tomu je třeba si připomenout zásadní roli předpokladu $t_r \gg \tau_{koh}$. Pro dostatečně rychlý přístroj $t_r \leq \tau_{koh} \leq \Delta t$ by se totiž fáze změnila během měření jen nepatrně, $\varphi(t_1') \approx \varphi(t_2')$, takže přístroj by stačil sledovat náhodné změny interferenčního jevu v čase.

Obrázek 1.2: Stinítko s otvorem. Doplňková stinítka A, B.

1.2 Babinetův princip

Doplňková stínítka; Babinetův doplňkový princip; Huygensova konstrukce; Fraunhoferova a Fresnelova difrakce.

Další obvyklé uspořádání pro pozorování interferenčních jevů je vyobrazeno na obr. 8.2: kvazimonochromatické světlo se střední vlnovou délkou λ se šíří prostorem od zdroje Z k pozorovateli P, přičemž mezi Z a P je umístěno stínítko s otvorem nebo jiné překážky, jejichž rozměry jsou poměrně velké vzhledem k vlnové délce λ. Nejjednodušší úlohy tohoto typu budou popsány v následujících oddílech této kapitoly. Pro jejich přeformulování do snadno řešitelné formy zásadní roli hraje **Babinetův doplňkový princip**.

Babinetův princip se vztahuje na případy doplňkových stínítek podle obr. 1.2. Říká téměr evidentní fakt, že součet elektrických polí $E_A(P)$ resp. $E_B(P)$ která vzniknou v bodě P v přítomnosti pouze stínítka A resp. pouze stínítka B, je roven elektrickému poli $E_\emptyset(P)$ v nepřítomnosti stínítek:

$$\boxed{E_A(P) + E_B(P) = E_\emptyset(P).} \tag{1.2}$$

Rovnici (1.2) lze porozumět z hlediska představy o funkci **neprůhledného stínítka** $A \cup B$. Pole $E_\emptyset$ ze zdroje Z totiž budí ve stínítku $A \cup B$ další indukované pole $E_A^{ind} + E_B^{ind}$, jež se za stínítkem přesně ruší s dopadajícím. Tuto situaci podle obr. 8.2a můžeme v místě P vyjádřit rovnicí

$$E_\emptyset(P) + E_A^{ind}(P) + E_B^{ind}(P) = 0. \tag{1.3}$$

Stejná úvaha použitá na situaci podle obr. 8.2b dává pro výsledné pole v místě P

$$E_\emptyset(P) + E_B^{ind}(P) = E_B(P). \tag{1.4}$$

Je-li překážkou pouze stínítko A, platí

$$E_\emptyset(P) + E_A^{ind}(P) = E_A(P).$$

Sečtením posledních dvou rovnic se přesvědčíme, že Babinetův doplňkový princip (1.2) je ekvivalentní rovnici (1.3) definující funkci neprůhledného stínítka.

Z rovnic (1.3) a (1.4) nyní vyplývá udivující výsledek

$$E_B(P) = -E_A^{ind}(P). \tag{1.5}$$

Z pohledu pozorovaných intenzit to znamená, že **intenzita $I_B(P)$ v situaci podle obr. 8.2b je stejná jako intenzita $I_A^{ind}(P)$ za stínítkem A, obr. 8.2c, pokud uvažujeme**

Obrázek 1.3: Schema Youngova pokusu.

pouze indukované pole ! Babinetův princip tedy (až na znaménko) úzce souvisí s **Huygensovou konstrukcí** světelného pole. Stačí si představit otvor ve stínítku B zaplněný bodovými Huygensovými zdroji, jež pohlcují dopadající světlo a vyzařují právě jen elementární indukovaná pole, jež v součtu vytvářejí pole $E_A^{ind}(P)$.

Cvičení 2. Pomocí Huygensovy konstrukce vlnoploch odvoďte zákony odrazu a lomu světla na rovinném rozhraní dvou prostředí s indexy lomu n_1, n_2.

V dalších oddílech budeme aplikovat důležitý výsledek (1.5) na speciální případy rovinného stínítka B s jednou nebo více štěrbinami. Praktickou realizací může být např. plátek staniolu nalepený na skle, z něhož vyřízneme úzké proužky.

Experimentální uspořádání pro studium ohybových jevů typu obr. 8.2 se v optice dělí do dvou kategorií:

1. **Fraunhoferova difrakce**, kde vzdálenosti zdroje i pozorovatele od stínítka jsou asymptotické, $L_Z \longrightarrow \infty$, $L_P \longrightarrow \infty$. Mluví se zde o vzdálené zoně světelného pole určené nerovností $L\lambda \gg D^2$, kde D je rozměr otvoru.

2. **Fresnelova difrakce**, kde alespoň jedna ze vzdáleností L_Z, L_P není asymptotická.

Fraunhoferův ohyb se vyznačuje snažší experimentální realizací i jednodušším teoretickým popisem. Všechny případy difrakce uvedené v těchto skriptech patří do této kategorie. Velké vzdálenosti L_Z, L_P znamenají, že paprsky od zdroje do všech bodů otvoru (a od všech bodů otvoru k pozorovateli) jsou prakticky rovnoběžné, takže je lze charakterizovat úhly. Abychom se při praktické realizaci vyhnuli poklesu intenzity na velké vzdálenosti, můžeme rovnoběžné paprsky soustředit tenkou čočkou do ohniskové roviny ve vzdálenosti f.

1.3 Youngův pokus a prostorová koherence

Uspořádání Youngova dvouštěrbinového pokusu. Fraunhoferův ohyb na dvojici rovnoběžných štěrbin — aplikace Babinetova principu. Interference vln v rovině ze dvou monochromatických bodových zdrojů. Vliv časové a prostorové koherence světla na viditelnost interferenčního jevu; kritérium pro boční koherenci.

Youngův interferenční pokus, který měl základní význam pro důkaz vlnové podstaty světla (Thomas Young 1807), používá dvě rovnoběžné štěrbiny P_1, P_2, na něž dopadá světlo z velmi úzké štěrbiny Z intenzivně osvětlené kvazimonochromatickým světlem (obr. 1.3). Štěrbiny jsou velmi tenké ($\sim 10^{-2}\,mm$) a jejich vzdálenost $d \sim 0,5\,mm$. Místo štěrbiny Z lze použit osvětlení laserem. Uspořádání pokusu má odpovídat Fraunhoferově difrakci, tj.

Obrázek 1.4: Interference kruhových vln ze dvou bodových zdrojů.

vzdálenosti L_Z, L_Q vyhovují $L\lambda \gg d^2$. Poloha pozorovaného bodu Q je určena úhlem ϑ,

$$y_Q = L_Q \mathrm{tg}\vartheta.$$

Cvičení 3. Vzdálená zona světelného pole je v blízkosti osy z určena podmínkou $|r_2 - r_1| \ll \lambda/2$. Při $y_Q = d/2$ platí $r_2^2 = r_1^2 + d^2$ a tedy

$$d^2 = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) \ll \frac{\lambda}{2} 2L_Q.$$

Zjistěte, zda je tato podmínka splněna při $L_Q \sim 5\,m$, jestliže $d = 0,5\,mm$, $\lambda = 500\,nm$.

Teoretická analýza pokusu se významně zjednoduší pomocí Babinetova principu: místo uspořádání podle obr. 8.4 stačí zkoumat pouze indukovaná pole vysílaná ze štěrbin P_1, P_2! V prvním přiblížení uvažujeme velmi tenké štěrbiny. Vliv jejich konečné šířky bude ukázán v oddíle 8.5. Jako zjednodušený model tedy předpokládejme rovinnou situaci podle obr. 1.4 se dvěma kvazimonochromatickými bodovými zdroji P_1, P_2 s dominantní úhlovou frekvencí ω. Z bodových zdrojů se šíří kruhové monochromatické vlny, jež obecně zapíšeme s různými amplitudami a fázovými konstantami:

$$\begin{aligned} E_1(Q,t) &= a_1 E_0 \cos(\omega t - k r_1 + \varphi_1), \\ E_2(Q,t) &= a_2 E_0 \cos(\omega t - k r_2 + \varphi_2). \end{aligned}$$

Intenzita každé vlny zvlášť je Interferenční jev je dán intenzitou superpozice vln v místě pozorování Q,

$$I(Q) = < [E_2(Q,t) + E_2(Q,t)]^2 >_T .$$

(Středujeme přes periodu T, protože se jedná o monochromatické vlny.) Stejným postupem jako v oddíle 8.1 pak dostaneme

$$I(Q) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos[k(r_2 - r_1) + \varphi_1 - \varphi_2]. \tag{1.6}$$

Opět tedy platí nerovnost (1.1). Při stejném osvětlení štěrbin máme $a_1 = a_2, \varphi_1 = \varphi_2, I_1 = I_2$, takže

$$I(Q) = 2I_1(1 + \cos[k(r_2 - r_1)]).$$

Poloha interferenčních maxim a minim záleží na rozdílu vzdáleností $r_2 - r_1$. Při pozorování ve vzdálené zoně můžeme spojnice P_1Q a P_2Q považovat za prakticky rovnoběžné a rozdíl $r_2 - r_1$ vyjádřit pomocí úhlu ϑ,

$$r_2 - r_1 \doteq d \sin\vartheta.$$

Obrázek 1.5: Graf intenzity $I(Q)$ jako funkce fázového rozdílu $kd\sin\vartheta$, dráhového rozdílu $d\sin\vartheta$ a $\sin\vartheta$).

Prostorové rozdělení intenzity $I(Q)$ je pak dáno vztahem

$$\boxed{I(Q) = 2I_1(1+\cos(kd\sin\vartheta)).} \tag{1.7}$$

Na obr. 1.5 vidíme, ve kterých směrech dochází podle rovnice (1.7) ke konstruktivní resp. destruktivní superpozici

$$\begin{aligned}(\sin\vartheta)_{max} &= 2m\frac{\lambda}{2d},\\ (\sin\vartheta)_{min} &= (2m+1)\frac{\lambda}{2d},\end{aligned}$$

kde $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; mluvíme o maximu centrálním (nultého řádu) a dále prvního, druhého, atd. řádu.

Youngův pokus dovolil určit vlnovou délku λ světla změřením polohy y_Q světlých proužků na pozorovacím stínítku,

$$(y_Q)_{max} = L_Q(\mathrm{tg}\vartheta)_{max} \doteq L_Q(\sin\vartheta)_{max} = mL_Q\frac{\lambda}{d},$$

kde $m = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ a předpokládáme $\vartheta \ll 1$. Vzdálenost sousedních proužků je

$$\Delta y \doteq L_Q\frac{\lambda}{d},$$

odkud lze určit vlnovou délku

$$\lambda \doteq \frac{d\Delta y}{L_Q}.$$

Cvičení 4. Odvoďte vztah (1.6). Jak se změní graf průběhu (1.7) na obr. 1.5, když $\varphi_1 \neq \varphi_2, I_1 \neq I_2$?

Interferenční jev na obr. 1.5 byl odvozen za tří hlavních zjednodušujících předpokladů:

1. aproximace velmi tenkých štěrbin,
2. monochromatické světlo,
3. dokonalá koherence světla ve štěrbinách P_1, P_2.

V prvním případě je třeba vzít v úvahu vliv Fraunhoferova ohybu na štěrbinách konečné šířky, který bude studován v oddíle 8.5. Další dva předpoklady souvisí s koherencí světla.

Obrázek 1.6: K pojmům podélné a boční prostorové koherence.

Obrázek 1.7: Vliv konečné šířky tepelného zdroje na boční koherenci ve štěrbinách P_1, P_2.

Při použití tepelného zdroje je světlo kvazimonochromatické s koherenční dobou $\tau_{koh} \approx 10^{-9}\,s$. Geometrie pokusu je ovšem taková, že je splněna nerovnost

$$|r_2 - r_1| = d\,|\sin\vartheta| \approx 0,5\,mm \ll c\tau_{koh} \approx 30\,cm,$$

takže časová koherence nemá vliv na výsledný interferenční jev.

Koherence světla ve štěrbinách P_1, P_2 má však jiný charakter. Pro viditelnost interferenčního jevu na pozorovacím stínítku je třeba, aby pole $E_1(P_1, t)$, $E_2(P_2, t)$ byla dokonale koherentní *ve stejném časovém okamžiku*. To odpovídá definici prostorové koherence:

Pole $E_1(P_1, t)$, $E_2(P_2, t)$ v různých bodech P_1, P_2 jsou **dokonale prostorově koherentní**, jestliže znalost pole E_1 v místě P_1 v čase t dovoluje přesně předpovědět pole E_2 v místě P_2 ve stejném čase. Nazveme je **prostorově nekoherentní**, jestliže znalost jednoho z polí nedává žádnou informaci o druhém.

V případě kvazimonochromatického bodového zdroje Z se prostorová koherence mezi body P_2, P_3 na obr. 1.6 nazývá **podélnou**. Nebudeme ji uvažovat, protože ji lze jednoznačně převést na časovou: pole v bodě P_3 v čase t je totiž jednoznačně určeno polem v P_2 v retardovaném čase $t - (l/c)$. Stačí tedy porovnávat pole v bodě P_2 v různých časech t, $t - (l/c)$.

Prostorovou koherenci světla mezi body P_1, P_2, do nichž sférická vlnoplocha dorazí ve stejném časovém okamžiku t, nazýváme **boční**. K boční nekoherenci v bodech P_1, P_2 a tím ke snížení viditelnosti interferenčních proužků v Youngově pokusu může dojít, když tepelný zdroj není bodový. Uvažujme proto Youngovo experimentální uspořádání s tepelným zdrojem konečné šířky d_Z (obr. 1.7) Takový zdroj je soustavou nezávislých zářičů, u nichž fáze záření v daném čase se náhodně mění s polohou ve zdroji a v daném místě zdroje se náhodně mění s časem. Na obr. 1.7 každý z elementárních zářičů mezi body Z_1, Z_2 by na pozorovacím stínítku způsobil jasné interferenční proužky. Centrální maxima zdrojů Z_1, Z_2 budou v bodech Q_1, Q_2. [2] Při pozorování okem nebo jiným pomalým detektorem s rozlišovací dobou $t_r \gg \tau_{koh}$ nekoherentní vlny pocházející z různých míst zdroje spolu neinterferují a *výsledná intenzita bude součtem intenzit jednotlivých zářičů*. Výsledný interferenční obrazec bude velmi málo porušen pouze tehdy, když vzdálenost d_Q bude velmi malá vzhledem ke vzdálenosti $\Delta y \doteq L_Q\lambda/d_P$ sousedních interferenčních maxim, $d_Q \ll \triangle y$. V případě $d_Q \geq \Delta y$ se viditelnost interference blíží nule.

[2] Ukažte, že nulté maximum od zdroje Z_1 bude určeno podmínkou $r_1 + s_1 - r_2 - s_2 = 0$, tj. $r_1 - r_2 = s_2 - s_1 = d\sin\vartheta_1$.

Obrázek 1.8: Uspořádání pro pozorování difrakce světla na optické mřížce.

Obrázek 1.9: Interference vln z N zdrojů.

Podmínku dokonalé prostorové koherence ve štěrbinách P_1, P_2 lze podle předchozí úvahy a obr. 1.7 vyjádřit následujícími ekvivalentními způsoby:

$$d_Q \ll \Delta y \quad \Leftrightarrow \quad \delta\vartheta \ll \frac{\lambda}{d_P} \quad \Leftrightarrow \quad d_Z d_P \ll \lambda L_Z. \tag{1.8}$$

Cvičení 5. Jaká by musela být vzdálenost štěrbin d, aby při jejich osvětlení přímým slunečním světlem byla splněna podmínka dokonalé koherence? [3]

1.4 Difrakční mřížka

Optická mřížka. Interference vln z N zdrojů. Průběh interferenční intenzity. Spektrální rozklad světla. Rayleighovo kritérium rozlišení spektrálních čar.

Optická mřížka je obvykle skleněná destička s nanesenou měkkou vrstvou např. hliníku, do níž jsou pomocí diamantového nástroje vyryty rovnoběžné vrypy. Musí být přesně stejně široké a přesně stejně navzájem vzdálené, většinou $0,25$ až 6000 vrypů na 1 mm. Vzdálenost středů sousedních vrypů d se nazývá **mřížková konstanta**.

Dopadá-li na mřížku rovnoběžný svazek kvazimonochromatického světla (obr. 1.8), vrypy vyzařují cylindrické vlny a na stínítku pozorujeme interferenční proužky. Na rozdíl od Youngova pokusu se dvěma štěrbinami se na pozorovacím stínítku vytvoří velmi ostré tenké světlé čáry na tmavém pozadí.

Abychom pochopili funkci mřížky, nahradíme uspořádání na obr. 1.8 pomocí Babinetova principu soustavou zdrojů v místech vrypů. Na obr. 1.9 je zjednodušená soustava N bodových zdrojů $P_1, P_2, \ldots, P_N$, jejichž vzdálenosti jsou d a všechny vyzařují v rovině kvazimonochromatické světlo se stejnou amplitudou E_0, stejnou střední úhlovou frekvencí ω a stejnou fázovou konstantou φ_0. [4] Pozorovací bod Q je tak daleko, že úhel ϑ je přibližně stejný pro všech N zdrojů. Pak ve vzdáleném bodě Q v blízkosti osy z je superpozice polí z N zdrojů

$$E(Q,t) = aE_0\cos(\omega t'_1 + \varphi_0) + \ldots + aE_0\cos(\omega t'_N + \varphi_0)$$

určena koeficientem zeslabení $a < 1$ a retardovanými časy $t'_i = t - (r_i/c)$, $i = 1, \ldots, N$, jež odpovídají vzdálenostem $r_1, \ldots, r_N$ od bodů $P_1, \ldots, P_N$ k bodu Q,

[3] Viz [**?**], př. 7.2: průměr Slunce 700 tisíc km, vzdálenost Slunce 150 milionů km.

[4] Předpokládáme, že na celé šířce mřížky je splněno kritérium boční koherence.

Obrázek 1.10: Graf intenzity $I(Q)$ jako funkce fázového rozdílu $kd\sin\vartheta$, dráhového rozdílu $d\sin\vartheta$ a $\sin\vartheta$.

Obrázek 1.11: Graf intenzity $I(Q)$ jako funkce $\sin\vartheta$ pro $N = 2, 3, 4$ a velké N.

Pro další výpočet vyjádříme pole $E(Q,t)$ jako reálnou část sumy komplexních členů

$$E(Q,t) = \sum_{i=1}^{N} aE_0 \cos(\omega(t - \frac{r_i}{c}) + \varphi_0) = \mathrm{Re} \sum_{i=1}^{N} aE_0 e^{i(\omega t - kr_i + \varphi_0)}.$$

Protože sousední vzdálenosti r_i, r_{i+1} splňují s dobrou přesností vztahy

$$r_2 - r_1 = d\sin\vartheta,\ r_3 - r_2 = d\sin\vartheta,\ \ldots,\ r_N - r_{N+1} = d\sin\vartheta,$$

můžeme pole $E(Q,t)$ upravit na reálnou část konečné komplexní geometrické řady s kvocientem $q = \exp(-ikd\sin\vartheta)$:

$$\begin{aligned} E(Q,t) &= \mathrm{Re}\left\{aE_0 e^{i(\omega t - kr_1 + \varphi_0)}\left(1 + q + q^2 + ... + q^{N-1}\right)\right\} \\ &= \mathrm{Re}\left\{aE_0 e^{i(\omega t - kr_1 + \varphi_0)} \frac{e^{-iNkd\sin\vartheta} - 1}{e^{-ikd\sin\vartheta} - 1}\right\}. \end{aligned}$$

Zlomek dále upravíme vytknutím faktorů $\exp\left(-\frac{1}{2}iNkd\sin\vartheta\right)$ z čitatele a $\exp\left(-\frac{1}{2}ikd\sin\vartheta\right)$ z jmenovatele na podíl sinů, takže výsledný vztah můžeme napsat ve tvaru součinu modulované amplitudy a nosné vlny:

$$E(Q,t) = aE_0 \frac{\sin\left(\frac{1}{2}Nkd\sin\vartheta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}kd\sin\vartheta\right)} \cos\left(\omega t - kr_1 - \frac{1}{2}(N-1)kd\sin\vartheta + \varphi_0\right).$$

Hledaný interferenční jev má následující průběh intenzity na stínítku (stačí středovat přes jednu periodu):

$$I(Q) = < E(Q,t)^2 >_T = \frac{a^2E_0^2}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}Nkd\sin\vartheta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}kd\sin\vartheta\right)}\right)^2. \tag{1.9}$$

Graf funkce (1.9) na obrázcích 1.10 a 1.11 se v jednom ohledu podobá grafu intenzity pro Youngův pokus ($N = 2$) na obr. 1.5: funkce $I(Q)$ jsou v obou případech *periodické* s periodou 2π v proměnné $kd\sin\vartheta$. Polohy interferenčních maxim jsou proto určeny stejným vztahem jako u Youngova pokusu,

$$(\sin\vartheta)_{max} = m\frac{\lambda}{d}, \qquad m = 0, \pm1, ..., \pm\left[\frac{d}{\lambda}\right]. \tag{1.10}$$

Obrázek 1.12: Spektrální čáry λ_1, λ_2 jsou podle Rayleigha právě rozlišeny, když maximum intezity jedné čáry leží právě v prvním minimu intenzity druhé čáry.

Maxima jsou však daleko užší, neboť např. centrální maximum prochází první nulou v bodech $\frac{1}{2}Nkd\sin\vartheta = \pm\pi$, tj.

$$\sin\vartheta = \pm\frac{\lambda}{Nd}.$$

Tato veličina se bere jako míra úhlové šířky maxima: maximum má úhlovou šířku λ/Nd ve výšce $4I_0/\pi^2 \doteq 0,41\, I_0$, kde $I_0 = N^2a^2E_0^2/2$. Čím je počet vrypů N větší, tím jsou maxima ostřejší. To je důležité při spektrálním rozkladu světla mřížkou.

Dopadá-li na mřížku světlo složené, např. bílé světlo žárovky, bude centrální maximum bílé, avšak již v 1. řádu budeme pozorovat příspěvky různých barev spektra pod různými úhly ϑ. Základní vlastností difrakční mřížky je tedy schopnost rozložit dopadající světlo do různých směrů podle vlnových délek, tj. provést jeho **spektrální rozklad**. Praktický význam optické spektroskopie je v tom, že každá látka vyzařuje jistý, pro ni charakteristický soubor **spektrálních čar** (viz kap. 12). Lze tak získat informace o složení látek a např. v astronomii i o složení vzdálených objektů (planet, komet, hvězd, galaxií apod.).

Protože spektrální čáry mohou mít velmi blízké vlnové délky, vzniká otázka, jaké vlastnosti musí mřížka mít, abychom takové čáry ve spektru zřetelně rozlišili. Podle **Rayleighova kritéria** (obr. 1.12) jsou dvě blízké kvazimonochromatické spektrální čáry λ_1, λ_2 rozlišeny v mřížkovém spektru 1. řádu, když úhlová vzdálenost středů maxim je větší nebo rovna úhlové šířce maxim:

$$\left|\frac{\lambda_1}{d} - \frac{\lambda_2}{d}\right| \geq \frac{\lambda_{str}}{Nd},$$

kde $\lambda_{str} = (\lambda_1 + \lambda_2)/2 \doteq \lambda_{1,2}$. Po vykrácení d dostaneme podmínku

$$\frac{|\lambda_1 - \lambda_2|}{\lambda_{str}} \geq \frac{1}{N},$$

která říká, že spektrální rozlišení mřížky je tím lepší, čím je počet vrypů N větší ! U maxim vyššího řádu $|m|$ je vzdálenost maxim $|m|$–krát větší, získá se tedy $|m|$–krát lepší rozlišení[5]. Situaci však zhoršuje ohybový jev způsobený konečnou šířkou vrypů, který vede k zeslabení intenzity ve vyšších řádech (viz oddíl 8.5).

Cvičení 6. Známé žluté světlo plamene znečištěného kuchyňskou solí obsahuje spektrální čáry $\lambda_1 = 589,6\,nm$ a $\lambda_2 = 589,0\,nm$. Kolik vrypů musí mít mřížka, aby v 1. řádu právě rozlišila tento sodíkový dublet?

[5]**Rozlišovací schopnost mřížky** se definuje podílem $R = \lambda_{str}/\,|\lambda_1 - \lambda_2| = |m|N$.

Obrázek 1.13: Fraunhoferova difrakce na štěrbině šířky D. Převážná část intenzity je vyzařována do oblasti o úhlové šířce $\delta \approx \lambda/D$.

1.5 Ohyb na štěrbině

Fraunhoferova difrakce na štěrbině a na kruhovém otvoru. Vliv omezení svazku světla na difrakční rozbíhavost; rozlišovací schopnost optických přístrojů; ostrost zraku.

Vlnová povaha světla má závažné důsledky při Fraunhoferově difrakci na štěrbině konečné šířky. Předpokládejme, že na štěrbinu šířky D dopadá rovnoběžný svazek kvazimonochromatického světla o vlnové délce $\lambda < D$. Uspořádání dle obr. 1.13 lze pomocí Babinetova principu nahradit ekvivalentní soustavou zdrojů *spojitě rozložených* v ploše štěrbiny a vyzařujících se stejnou fází.

Se soustavou ekvidistantních *diskrétních zdrojů* jsme se setkali v oddíle 8.4 u difrakční mřížky. Intenzitu světla na pozorovacím stínítku lze u štěrbiny šířky D snadno odvodit ze vzorce (1.9) pro mřížku pomocí limity $N \to \infty$. V limitním přechodu ke spojitě rozloženým zdrojům musíme současně předpokládat zmenšování mřížkové konstanty $d \to 0$, aby celková šířka $D = (N-1)d \doteq Nd$ zůstávala konstantní. Pro provedení limity vztah (1.9) rozšíříme

$$I(Q) = \lim_{N\to\infty} \frac{a^2 E_0^2}{2} \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}kD\sin\vartheta\right)\frac{1}{2}k\frac{D}{N}\sin\vartheta}{\sin\left(\frac{1}{2}k\frac{D}{N}\sin\vartheta\right)\frac{1}{2}k\frac{D}{N}\sin\vartheta} \right)^2$$

a využijeme toho, že

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{2}k\frac{D}{N}\sin\vartheta\right)}{\frac{1}{2}k\frac{D}{N}\sin\vartheta} = 1.$$

Aby při $N \gg 1$ vyšla konečná výsledná intenzita, musí ještě $E_0 \to 0$, aby veličina

$$I_0 = \frac{1}{2}a^2 E_0^2 N^2$$

zůstala konstantní. Výsledek limity je pak

$$\boxed{I(Q) = I_0 \left(\frac{\sin\left(\frac{1}{2}kD\sin\vartheta\right)}{\frac{1}{2}kD\sin\vartheta} \right)^2 .} \tag{1.11}$$

Je zřejmé, že intenzita $I(Q)$ již není periodickou funkcí $\sin\vartheta$, jako byla u mřížky (vztah (1.9)). Na rozdíl od obr. 1.10 na pozorovacím stínítku zůstane pouze centrální maximum se středem $\vartheta = 0$ a s prakticky stejným průběhem jako u mřížky s velkým počtem vrypů. Za míru δ úhlové šířky interferenčního maxima bereme úhel od středu maxima po první nulovou hodnotu intenzity při $\frac{1}{2}kD\sin\delta = \pi$, tj. $\sin\delta = \lambda/D$. Pří $\lambda \ll D$ píšeme

$$\boxed{\delta \approx \frac{\lambda}{D}.} \tag{1.12}$$

Obrázek 1.14: Průběh intenzity pro Youngův pokus se štěrbinami konečné šířky $D < d$.

Na obr. 1.13 je vyšrafována oblast této úhlové šířky, kam dopadá převážná část intenzity.

Získané výsledky, které jsou přímým důsledkem vlnové povahy světla, mají zásadní význam pro konstrukci optických přístrojů a posouzení oblasti jejich použitelnosti. Zjistili jsme, že prostorové omezení svazku světla má za následek jeho **difrakční rozbíhavost**: vlnový vektor $\boldsymbol{k}$ již nemá stálý směr jako před štěrbinou — světlo za štěrbinou obsahuje směry $\boldsymbol{k}$ převážně v oblasti o úhlové šířce $\delta \approx \lambda/D$ (velikost $|\boldsymbol{k}| = 2\pi/\lambda$ je dána vlnovou délkou). Pro *difrakci světla na kruhovém otvoru*[6] se uvádí difrakční rozbíhavost

$$\boxed{\delta \approx 1,22\frac{\lambda}{D}.} \tag{1.13}$$

V optických přístrojích je šíření světla omezeno do tubusů, jejichž rozměry jsou dány velikostí optických elementů — čoček, zrcadel, kolimátorů. Světlo se proto uvnitř nešíří přesně ve směrech paprsků určených pravidly geometrické optiky (viz kap. 9). Vykazuje vždy jistou **úhlovou rozbíhavost**, která posléze způsobuje nepřesnost ideálního geometrického zobrazení. Každý optický přístroj lze pak charakterizovat jeho **rozlišovací schopností**, tj. schopností rozlišit jemné dataily struktury pozorovaného předmětu.

Důležitým příkladem optického přístroje je **lidské oko**. Každý, kdo navštvil očního lékaře, zažil určení úhlové rozlišovací schopnosti svých očí. Pozorujeme–li milimetrové měřítko na vzdálenost $2\,m$, zjistíme, že již sotva rozlišíme sousední čárky. Ve větší vzdálenosti vám tyto čárky úplně splynou. Jako maximální ostrost zraku normálního lidského oka při vidění uprostřed zorného pole se uvádí schopnost rozlišit dvě značky $3\,mm$ od sebe na vzdálenost $10\,m$. To odpovídá úhlovému rozlišení jedné obloukové minuty

$$\delta \approx \frac{3.10^{-3}}{10} \approx 3.10^{-4}\,rad \approx 1'$$

(encyklopedie [**?**] uvádí 1'—3'). Porovnejme tuto skutečnost s teoretickým výpočtem podle vztahu (1.13). Je-li $\lambda \approx 6.10^{-7}\,m$ (světlo žluté barvy) a průměr panenky $D \approx 2\,mm$, vychází

$$\delta \approx \frac{5.10^{-7}}{2.10^{-3}} \approx 3.10^{-4}\,rad,$$

což je na dolní mezi udaných experimentálních hodnot.

Cvičení 7. Pro Youngův pokus se dvěma štěrbinami konečné šířky $D < d$ odvoďte interferenční obrazec modulovaný ohybem, obr. 1.14. Uvažte, že každá ze štěrbin osvětluje stínítko podle obr. 1.13 (viz [**?**], př. 7.7).

[6] Při cylindrické symetrii je funkce $\sin(\frac{1}{2}kD\sin\vartheta)$ nahrazena cylindrickou (Besselovou) funkcí $J_1(\frac{1}{2}kD\sin\vartheta)$, která prochází nulou při $J_1(1,22\pi) = 0$.

Obrázek 1.15: Grafy intenzity $I(Q)$ jako funkce $\sin\vartheta$ pro $N = 1, 2, 3, 4$ štěrbin konečné šířky $D < d$.