Kapitola 1

Polarizace

1.1 Popis polarizace monochromatické elektromagnetické vlny

Obecný tvar monochromatické vlny. Polarizace lineární, kruhová, a eliptická. Komplexní zápis.

V kapitole 6 jsme viděli, že vektory $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ v elektromagnetické rovinné vlně jsou vzájemně kolmé a tvoří se směrem šíření $\boldsymbol{s}$ pravotočivou trojici vektorů. Proto říkáme, že elektromagnetická vlna je příčná. V rovině kolmé ke směru šíření ovšem existují dva nezávislé příčné směry, např. určené jednotkovými vektory $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{y}_0$; v této souvislosti mluvíme o dvou nezávislých polarizačních stavech. Polarizační stav vlny stačí udávat elektrickým vektorem $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$, neboť magnetický vektor $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)$ je elektrickým jednoznačně určen.

Uvažujme postupnou vlnu monochromatického světla s danou úhlovou frekvencí ω ve vakuu nebo homogenním nevodivém prostředí ε, μ. Jak jsme se zmínili v odstavci 6.4, lze např. sférickou vlnu v dostatečně malé oblasti prostoru aproximovat rovinnou vlnou. Takovou vlnu s elektrickým vektorem

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_0 \cos(\omega t - \boldsymbol{k}\boldsymbol{r} + \varphi)$$

jsme si uvedli v odstavci 6.1, rovnice (**??**). Vzhledem k tomu, že Maxwellovy rovnice v prázdném prostoru jsou *lineární*, bude obecná monochromatická rovinná vlna (postupující např. ve směru osy z) dána superpozicí vln harmonicky kmitajících ve dvou nezávislých směrech $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{y}_0$:

$$\boldsymbol{E}(z, t) = \boldsymbol{x}_0 E_1 cos(\omega t - kz + \varphi_1) + \boldsymbol{y}_0 E_2 cos(\omega t - kz + \varphi_2). \tag{1.1}$$

Amplitudy E_1, E_2 a fázové konstanty φ_1, φ_2 jsou nezávislé konstanty; obě vlny v superpozici (1.1) mají stejnou úhlovou frekvenci ω; z vlnové rovnice plyne

$$\omega = vk.$$

Obrázek 1.1: Časový vývoj vektoru $\boldsymbol{E}(0,t)$.

Obrázek 1.2: Lineární polarizace ($\mathrm{tg}\vartheta = \frac{E_2}{E_1}$).

Pro získání představy o možných polarizačních stavech stačí zkoumat vlnu (1.1) v počátku O

$$\boldsymbol{E}(0,t) = \boldsymbol{x}_0 E_1 cos(\omega t + \varphi_1) + \boldsymbol{y}_0 E_2 cos(\omega t + \varphi_2). \tag{1.2}$$

Podle obr. 1.1 časový vývoj vektoru $\boldsymbol{E}(0,t)$ vzniká skládáním harmonických kmitů ve dvou kolmých směrech

$$\begin{aligned} E_x(0,t) &= E_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ E_y(0,t) &= E_2 \cos(\omega t + \varphi_2) \end{aligned}$$

se stejnými frekvencemi. Vektor $\boldsymbol{E}(0,t)$ proto opisuje Lissajousovu křivku, jež je obecně elipsou v rovině xy se středem v počátku.[1] Příslušný polarizační stav nazýváme **eliptickou polarizací**.

Mezi polarizačními stavy světla mají zvláštní důležitost dva typy polarizace: polarizace lineární a kruhová.

Lineární polarizace odpovídá situaci, kdy vektor $\boldsymbol{E}(0,t)$ kmitá stále ve stejném směru. Tento případ lze charakterizovat hodnotami rozdílu fázových konstant $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$ nebo π. Tehdy totiž podíl

$$\frac{E_y(0,t)}{E_x(0,t)} = \pm\frac{E_2}{E_1} = \mathrm{tg}\vartheta$$

zůstává konstantní (viz obr. 1.2, 1.3). Vlny lineárně polarizované ve směrech $\boldsymbol{x}_0$ a $\boldsymbol{y}_0$ vystupovaly v (1.1), (1.2) jako složky rozkladu obecně elipticky polarizované vlny.

[1] K důkazu si stačí uvědomit, že rovnice

$$\begin{aligned} E_x(0,t) &= E_1(\cos\omega t\cos\varphi_1 - \sin\omega t\sin\varphi_1) \\ E_y(0,t) &= E_2(\cos\omega t\cos\varphi_2 - \sin\omega t\sin\varphi_2) \end{aligned}$$

dovolují vypočítat $\cos\omega t$, $\sin\omega t$ jako lineární kombinace E_x, E_y:

$$\begin{aligned} \cos\omega t &= aE_x + bE_y \\ \sin\omega t &= cE_x + dE_y. \end{aligned}$$

Potom $\cos^2\omega t + \sin^2\omega t = (aE_x + bE_y)^2 + (cE_x + dE_y)^2 = 1$ je rovnicí kuželosečky. Musí to být elipsa (nebo její degenerované případy), protože E_x a E_y jsou omezené !

Obrázek 1.3: Lineární polarizace ($\mathrm{tg}\vartheta = -\frac{E_2}{E_1}$).

Obrázek 1.4: Eliptická polarizace.

Kruhová polarizace vzniká jako superpozice (1.2) vln lineárně polarizovaných ve směrech $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{y}_0$ se stejnými amplitudami, ale fázově posunutými o $90°$,

$$E_1 = E_2, \quad \varphi_1 - \varphi_2 = \pm\frac{\pi}{2}.$$

Vektor $\boldsymbol{E}(0,t)$ se nyní pohybuje po kružnici o poloměru E_1 v rovině xy podle vztahů

$$\begin{aligned} E_x(0,t) &= E_1 \cos(\omega t + \varphi_1) \\ E_y(0,t) &= \pm E_1 \sin(\omega t + \varphi_1). \end{aligned}$$

Horní znamení odpovídá pohybu proti směru hodinových ručiček a konvenčně se nazývá *levotočivá kruhová polarizace*; dolní znamení pak odpovídá *pravotočivé kruhové polarizaci.* Všimněte si, že při určování smyslu otáčení vektoru $\boldsymbol{E}(0,t)$ míří osa z — směr šíření světla $\boldsymbol{s}$ — k pozorovateli P (obr. 7.1).

Závěr. Podle podaného výkladu superpozicí dvou lineárně polarizovaných vln se stejnou úhlovou frekvencí se směry polarizace $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{y}_0$ a s různými fázemi vznikne elipticky polarizovaná vlna (viz obr. 1.4). Obecný tvar (1.1), (1.2) monochromatické elektromagnetické vlny s úhlovou frekvencí ω, směrem šíření $\boldsymbol{s} = (0,0,1)$ a libovolnými konstantami E_1, E_2, φ_1, φ_2 proto znamená, že *každá taková vlna je polarizovaná.* V oddíle 7.4 se budeme snažit vysvětlit skutečnost, že ne každé světlo je polarizované. Uvědomte si ještě, že pro určitý typ polarizace není rozhodující celková intenzita záření, úměrná

$$\langle \boldsymbol{E}^2 \rangle_T = \frac{1}{2}\left(E_1^2 + E_2^2\right),$$

ani hodnoty fázových konstant φ_1, φ_2, ale jen jejich rozdíl $\varphi_1 - \varphi_2$.

Polarizace v komplexním zápisu. Tvar (1.1) vektoru $\boldsymbol{E}(z,t)$ lze elegantně vyjádřit jako reálnou část komplexní vektorové funkce

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \mathrm{Re}\left[\widehat{\boldsymbol{E}_0} e^{i(\omega t - kz)}\right],$$

s komplexní amplitudou

$$\widehat{\boldsymbol{E}_0} = \boldsymbol{x}_0 E_1 e^{i\varphi_1} + \boldsymbol{y}_0 E_2 e^{i\varphi_2} \in C^2$$

představující obecný dvojrozměrný komplexní vektor. Množinu monochromatických vln (1.1) lze tedy vzájemně jednoznačně zobrazit na lineární prostor C^2 vektorů $\widehat{\boldsymbol{E}_0}$. Daný polarizační stav pak odpovída podmnožině monochromatických vln, jejichž amplitudy jsou násobky rE_1, rE_2 a fáze $\varphi_1+\alpha$, $\varphi_2+\alpha$ pro libovolné $r > 0$, $\alpha \in R$. V komplexním zápisu tyto množiny $\{re^{i\alpha}\widehat{\boldsymbol{E}_0} \mid r \in R_+ \wedge \alpha \in R\}$ jsou komplexní přímky v C^2 procházející počátkem (jednorozměrné komplexní podprostory v C^2). Množina polarizačních stavů je tedy ekvivalentní množině jednorozměrných podprostorů v C^2, která se nazývá komplexní projektivní prostor CP^1. Lze ukázat, že prostor CP^1 je geometricky ekvivalentní dvojrozměrné sféře S^2.

Komplexní zápis rovněž dovoluje algebraickým způsobem určit parametry polarizační elipsy v rovině xy. Nejprve si všimneme, že kvadrát $\widehat{\boldsymbol{E}_0}$ je obecně komplexní číslo

$$\widehat{\boldsymbol{E}_0}^2 = \widehat{\boldsymbol{E}_0}\widehat{\boldsymbol{E}_0} = De^{-2i\delta} \in C.$$

Vynásobením $e^{i\delta}$ dostaneme tedy z $\widehat{\boldsymbol{E}_0}$ komplexní vektor $\boldsymbol{d} = \widehat{\boldsymbol{E}_0}e^{i\delta}$ s reálným kvadrátem

$$\boldsymbol{d}^2 = \left(\widehat{\boldsymbol{E}_0}e^{i\delta}\right)^2 = D > 0.$$

Rozložíme-li $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{d_1} + i\boldsymbol{d_2}$ kde $\boldsymbol{d_1}$, $\boldsymbol{d_2}$ jsou reálné vektory, dostaneme podmínku

$$\boldsymbol{d}^2 = \boldsymbol{d_1}^2 - \boldsymbol{d_2}^2 + 2i\boldsymbol{d_1}\boldsymbol{d_2} = D \in R,$$

čili

$$\boldsymbol{d_1} \cdot \boldsymbol{d_2} = 0.$$

Vztah $\widehat{\boldsymbol{E}_0} = (\boldsymbol{d_1} + i\boldsymbol{d_2})\, e^{-i\delta}$ nyní vede na vektor $\boldsymbol{E}(z,t)$ jako superpozici kmitů ve směrech $\boldsymbol{d_1}$, $\boldsymbol{d_2}$ splňujících $\boldsymbol{d_1} \cdot \boldsymbol{d_2}$:

$$\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{d_1} \cos(\omega t - kz - \delta) - \boldsymbol{d_2} \sin(\omega t - kz - \delta).$$

Zvolíme-li nové osy x', y' tak, že osa x' míří ve směru $\boldsymbol{d_1}$, pak

$$\begin{aligned} E_{x'} &= d_1 \cos(\omega t - kz - \delta) \\ E_{y'} &= \pm d_2 \sin(\omega t - kz - \delta), \end{aligned}$$

kde dvě znaménka u $E_{y'}$ odpovídají vektoru $\boldsymbol{d_2}$ ve směru nebo proti směru osy y'. Vektor $\boldsymbol{E}(0,t)$ opisuje elipsu s poloosami d_1, d_2, neboť

$$\frac{E_{x'}^2}{d_1^2} + \frac{E_{y'}^2}{d_2^2} = 1.$$

Kruhová polarizace nastává při $d_1 = d_2$, lineární při $d_1 = 0$ nebo $d_2 = 0$.

Cvičení 1. Odvoďte komplexní amplitudy $\widehat{\boldsymbol{E}_0}$ pro levotočivě a pravotočivě kruhově polarizované vlny.

Obrázek 1.5: Vysílací a přijímací dipólové antény.

1.2 Určení polarizačního stavu měřením souboru intenzit

Dipólová anténa jako vysílač a přijímač. Soubor měřených intenzit. Měření pomocí dvou antén.

V oddíle 6.5 bylo popsáno elektromagnetické pole záření kmitajícího elektromagnetického dipólu. Podle vyzařovacího diagramu na obr. 6.5 je maximální intenzita vyzařována ve směrech kolmých k dipólu. Podle obr. 6.4 je toto záření lineárně polarizované ve směru rovnoběžném s dipólem. Možnou realizaci představuje ***vysílací dipólová anténa*** napájená střídavým napětím o frekvenci $\nu = \omega/2\pi$ schematicky znázorněná na obr. 1.5. Je-li délka antény l malá vzhledem k vlnové délce záření $\lambda = c/\nu$, lze použít vztahy z oddílu 6.5.

Stejnou anténu lze použít jako ***přijímač*** dopadajícího elektromagnetického záření, jehož energii selektivně odebíráme z rezonančního obvodu. Přijímací vlastnosti antény jsou stejné jako při vysílání: jelikož napětí indukované v anténě $U = \int_{-l/2}^{l/2} \boldsymbol{E}.\boldsymbol{dl}$ je určeno složkou $\boldsymbol{E}$, která je rovnoběžná s anténou, maximální příjem nastane, když záření dopadá kolmo na anténu. Maximální citlivost při příjmu tedy přesně odpovídá podmínkám pro maximální vysílaný výkon.

Nechť se zkoumané monochromatické záření šíří ve směru osy $+z$ a v místě O, kde platí (1.2), chceme určit jeho polarizační stav měřením souboru vhodně definovaných intenzit. Těmto intenzitám je posléze úměrný výkon přicházející z antény do rezonančního obvodu. Pro výběr intenzit je směrodatné, že při určení polarizačního stavu nás nezajímá ani celková intenzita ani přesná hodnota fázových konstant φ_1, φ_2 ve výrazu (1.2) pro $\boldsymbol{E}(0,t)$. Potřebujeme ovšem zjistit relativní hodnoty E_1, E_2, $\varphi_1 - \varphi_2$. K jejich určení stačí provést *relativní měření čtyř intenzit* definovaných časovými středními hodnotami (u monochromatického záření stačí středovat přes jednu periodu T)

$$
\begin{aligned}
< E_x^2 >_T &= E_1^2 < \cos^2(\omega t + \varphi_1) >_T = \frac{E_1^2}{2}, \\
< E_y^2 >_T &= E_2^2 < \cos^2(\omega t + \varphi_2) >_T = \frac{E_2^2}{2}, \\
< 2E_xE_y >_T &= E_1E_2 < 2\cos(\omega t + \varphi_1)\cos(\omega t + \varphi_2) >_T \\
&= E_1E_2 < \cos(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) + \cos(\varphi_1 - \varphi_2) >_T \\
&= E_1E_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2), \\
< 2E_x(\omega t - \frac{\pi}{2})E_y(\omega t) >_T &= E_1E_2 < 2\sin(\omega t + \varphi_1)\cos(\omega t + \varphi_2) >_T \\
&= E_1E_2 < \sin(2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) + \sin(\varphi_1 - \varphi_2) >_T
\end{aligned}
$$

$$= \quad E_1 E_2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2). \tag{1.3}$$

Vidíme, že změřením intenzit $< E_x^2 >_T$, $< E_y^2 >_T$, $< 2E_x E_y >_T$ a $< 2E_x(\omega t - \frac{\pi}{2})E_y(\omega t) >_T$ dostaneme úplnou informaci o amplitudách E_1, E_2 a rozdílu fázových konstant $\varphi_1 - \varphi_2$. [2]

Měření lze u rozhlasových vln realizovat pomocí dvou přijímacích dipólových antén A_1, A_2:

1. Anténu A_1 orientujeme ve směru osy x a měříme časovou střední hodnotu přijímaného výkonu úměrnou $< E_x^2 >_T = E_1^2/2$.

2. Anténu A_2 orientujeme podél osy y a měříme $< E_y^2 >_T = E_2^2/2$.

3. Obě antény připojíme ke společnému rezonančnímu obvodu stejně dlouhým vedením a tak, aby do rezonančního obvodu přicházel součet napětí od antén (sériové zapojení). Měříme pak $< (E_x + E_y)^2 >_T = < E_x^2 >_T + < E_y^2 >_T + < 2E_x E_y >_T$, odkud se již snadno určí $< 2E_x E_y >_T$ a $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$.

4. Antény připojíme sériově ke společnému rezonančnímu obvodu vedeními různé délky tak, aby anténa A_1 měla přípojku delší o $\lambda/4$, dávající zpoždění $T/4$. Přijímaný výkon pak bude úměrný $< (E_x(\omega t - \frac{\pi}{2}) + E_y(\omega t))^2 >_T = < E_x^2 >_T + < E_y^2 >_T + < 2E_x(\omega t - \frac{\pi}{2})E_y(\omega t) >_T$ a odtud se již snadno určí $\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$.[3]

Viditelné světlo má vlnové délky kratší než 1 mikrometr a tak je nelze detekovat pomocí antén. K určení jeho polarizačního stavu měřením uvedených čtyř intenzit lze však využít speciálních optických vlastností některých transparentních látek, jak uvidíme v oddíle 7.3.

1.3 Polarizované elektromagnetické vlny v látkách

Polarizační filtry, Malusův zákon, polaroid, polarizace odrazem. Dvojlom, vlnové destičky, nikol. Měření polarizace. Optická aktivita. Fotoelastický jev, jevy elektrooptické a magnetooptické.

V oddílech 6.5 a 7.2 jsme viděli, že vysílací dipólová anténa napájená střídavým napětím o frekvenci $\nu = \omega/2\pi$ budí ve velké vzdálenosti sférickou *lineárně polarizovanou* elektromagnetickou vlnu. K buzení lineárně polarizovaného světla však nemáme k dispozici pevně

[2]Při úpravách jsme použili vzorce $2\cos a \cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b), 2\sin a \cos b = \sin(a+b) + \sin(a-b)$.

[3]Je-li z_0 délka přípojky antény A_2, pak napětí přicházející do rezonančního obvodu v čase t vyšlo z antény A_1 v retardovaném čase $t - (z_0 + \frac{\lambda}{4})/c$, zatímco z antény A_2 v čase $t - (z_0/c)$. Měřená elektrická intenzita je tedy součtem $E_x(t - (z_0 + \frac{\lambda}{4})/c) + E_y(t - (z_0/c))$. Protože výsledky středování nezávisí na společném posunu z_0/c, můžeme měřené intenzity psát ve tvaru $< (E_x(t - (T/4)) + E_y(t))^2 >_T$ neboli $< (E_x(\omega t - \frac{\pi}{2}) + E_y(\omega t))^2 >_T$.

Obrázek 1.6: Polarizační filtr z rovnoběžných vodičů.

orientované dipólové antény atomárních rozměrů. Lineárně polarizované světlo proto obvykle získáváme pomocí selektivní absorpce.

Optické přístroje, založené na různých principech, které propouštějí z dopadajícího světla jen část polarizovanou lineárně v určitém pevném směru, se nazývají ***polarizační filtry***. Označíme-li tento pevný směr — ***osu propustnosti*** filtru — jednotkovým vektorem $\boldsymbol{e}$, můžeme vztah mezi vstupujícím a vystupujícím elektrickým polem zapsat jako vektorový vztah

$$\boldsymbol{E}_{\text{výst}} = \boldsymbol{e}(\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{vst}}), \tag{1.4}$$

který vyjadřuje projekci vektoru $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{vst}}$ do směru $\boldsymbol{e}$. Je-li $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{vst}} \parallel \boldsymbol{e}$, světlo prochází (u skutečných filtrů dochází k malému zeslabení absorpcí). Je-li $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{vst}} \perp \boldsymbol{e}$, světlo neprochází (ve skutečnosti je téměř úplně pohlceno). Pro intenzity vstupujícího a vystupujícího světla z (1.4) plyne vztah

$$\boxed{I_{\text{výst}} = I_{vst} \cos^2 \vartheta} \tag{1.5}$$

kde ϑ je úhel mezi $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{vst}}$ a osou propustnosti. Rovnice (1.5) je známa jako ***Malusův zákon***.[4] (Při jeho použití u skutečných polarizačních filtrů za I_{vst} klademe intenzitu, která projde filtrem při $\vartheta = 0$, tedy vstupní intenzitu zeslabenou případnou absorpcí.)

Moderní typy polarizačních filtrů fungují na principu husté mřížky z tenkých rovnoběžných vodičů podle obr. 1.6. Zatímco složka $E_x(0,t)$ vlny (7.2) prakticky neinteraguje s elektrony ve vodičích a prochází beze změny, složka $E_y(0,t)$ s nimi silně interaguje a její energie je disipována vodivostními proudy.[5]

Snadnější výrobu polarizačních filtrů nabídla chemie polymerů. Při tažení plastových fólií, jež obsahují dlouhé řetězce uhlovodíkových makromolekul, se molekuly převážně napřímí do směru tažení (nebo válcování). Chemicky vázaný jod poskytuje makromolekulám vodivostní elektrony, které se mohou pohybovat jen ve směru makromolekul. Výsledný materiál, ***polaroid*** vynalezený v 30. letech E.H. Landem[6], pak má vlastnosti polarizačního filtru pro viditelné světlo, jehož osa propustnosti leží v rovině filtru kolmo ke směru tažení fólie.

Ke klasickému polarizačnímu filtru — Nicolovu hranolu — se vrátíme při výkladu dvojlomu. Zde se ještě zmíníme o ***polarizaci světla odrazem***. Při dopadu světla na rozhraní dvou prostředí s indexy lomu n_1, n_2 vzniká vlna odražená a vlna prošlá podle obr. 1.7. Intenzity vzniklých vln (tj. odrazivost $\mathcal{R}$ a propustnost $\mathcal{T}$) závisí nejen na úhlu dopadu ϑ_1, ale též na polarizaci dopadající vlny. Z Fresnelových vzorců pro $\mathcal{R}$ ([**?**], kap. 9) vyplývá,

[4] Etienne–Louis Malus (1775 – 1812) objevil polarizaci světla v r. 1808.

[5] Pro viditelné světlo byla takto fungující mřížka vyrobena napařením zlata na difrakční mřížku z umělé hmoty s cca 2000 vrypy na 1 mm [**?**].

[6] Edwin H. Land (1909–1991). Původní polaroidy byly celuloidové desky pokryté asi 0,1 mm silnou vrstvou tvořenou orientovanými krystalky herapatitu (síran jodchininový).

Obrázek 1.7: Polarizace odrazem. Brewsterův úhel.

že pro dopadající *vlnu lineárně polarizovanou v rovině dopadu* existuje tzv. ***Brewsterův úhel*** ϑ_{1B}, při němž je odrazivost $\mathcal{R}^{\parallel}(\vartheta_{1B}) = 0$. Dobrou pomůckou pro zapamatování je skutečnost, že při $\vartheta_1 = \vartheta_{1B}$ svírají směry odražené a prošlé vlny úhel 90°. Můžeme si k tomu představit, že příčně kmitající elektrony v látce, které vysílají prošlou vlnu, nevysílají ve směru svých kmitů, takže odražená vlna nevzniká. Ze vztahu

$$\vartheta_1 + \vartheta_2 = \frac{\pi}{2}$$

a ze Snelliova zákonu lomu

$$n_1 \sin\vartheta_1 = n_2 \sin\vartheta_2$$

dostaneme vyloučením ϑ_2 vzorec pro Brewsterův úhel

$$\boxed{\mathrm{tg}\vartheta_{1B} = \frac{n_2}{n_1}.}$$

Složka dopadající vlny polarizovaná kolmo k rovině dopadu se odrazí, $\mathcal{R}^{\perp}(\vartheta_{1B}) \neq 0$, takže výsledné odražené světlo je lineárně polarizované kolmo k rovině dopadu. Naopak nulový odraz při polarizaci v rovině dopadu lze využít k bezztrátovému průchodu polarizovaného světla ($\mathcal{T}^{\parallel}(\vartheta_{1B}) = 1$) rozhraním.

V přírodě existují transparentní ***opticky anizotropní látky***, u nichž průchod světla podstatně závisí na jeho polarizaci. Jsou to látky vyskytující se v krystalické formě, jejichž elektrická anizotropie je určena tenzorem elektrické permitivity ε_{jk}.[7] Rozmanitost krystalických forem byla klasifikována do 32 krystalografických tříd ([**?**], kap. 6). Krystalová optika, která zkoumá průchod rovinných monochromatických vln, rozlišuje mezi nimi — podle typu Fresnelova elipsoidu $\sum_{j,k} \varepsilon_{jk} x_j x_k = 1$ — jen 3 třídy opticky anizotropních látek [**?**]:

- dvojosé (poloosy elipsoidu jsou vzájemně různé),
- jednoosé (rotační elipsoid, v hlavních osách $\varepsilon_1(x_1^2 + x_2^2) + \varepsilon_3 x_3^2 = 1$),
- izotropní ($\varepsilon_{jk} = \varepsilon\delta_{jk}$, elipsoid je sférou).

Krystaly se středem symetrie (např. krystaly NaCl, KCl, CaF_2, jež patří ke kubické soustavě) se z optického hlediska chovají jako izotropní prostředí. O izotropním prostředí již víme, že každá rovinná monochromatická vlna je v něm obecně elipticky polarizovaná. *V opticky jednoosých nebo dvojosých krystalech (se symetrií nižší než kubické soustavy) tomu*

[7] Existují též magneticky anizotropní krystaly. Vzhledem k tomu, že magnetizace není schopna sledovat velmi vysoké optické frekvence, jejich anizotropie se projevuje u mikrovln.

Obrázek 1.8: Průchod svazku světla krystalem vápence. Optická osa je $\overline{K_1K_2}$. Spolu s dopadajícím paprskem $\overline{AB}$ určuje hlavní řez, v němž leží paprsek řádný o (ordinarius) a mimořádný e (extraordinarius).

Obrázek 1.9: Vlnová destička tloušťky d, s optickou osou $\boldsymbol{n}$.

tak není, všechny rovinné monochromatické vlny jsou lineárně polarizované ve směrech určených optickými osami.

Zde se zmíníme o některých ***jednoosých krystalech***; jejich optická osa je osou symetrie Fresnelova rotačního elipsoidu. Známé jsou krystaly tzv. islandského vápence ($CaCO_3$), krystalizující v šesterečné soustavě ve formě klence (rombu) podle obr. 1.8. Svazek dopadajícího světla se v krystalu rozdělí na dva lineárně polarizované svazky, které leží v rovině hlavního řezu určené dopadajícím svazkem a optickou osou. Dochází k ***dvojlomu***. ***Paprsek mimořádný*** e má elektrický vektor v hlavním řezu, ***paprsek řádný*** o kolmo k hlavnímu řezu.

Situace se zjednoduší pro destičku vyříznutou z jednoosého krystalu tak, aby optická osa $\boldsymbol{n}$ ležela v rovině destičky. Dopadá-li svazek monochromatického světla kolmo na destičku, nedojde k oddělení směrů šíření obou paprsků (obr. 7.8). Ovšem i když se oba paprsky šíří stejným směrem, jsou lineárně polarizované ve vzájemně kolmých směrech (pro paprsek mimořádný $\boldsymbol{E} \parallel \boldsymbol{n}$, pro paprsek řádný $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{n}$) a mají různé indexy lomu n_e, n_o a tedy i různé fázové rychlosti $v_e = c/n_e$, $v_o = c/n_o$. Taková destička funguje jako ***zpožďovací destička*** (též ***vlnová destička***), neboť v ní dochází k fázovému posunutí $\Delta\varphi$ mezi oběma paprsky v závislosti na tloušťce destičky d.

Indexy lomu některých jednoosých krystalů pro žlutou spektrální čáru sodíku o vlnové délce $\lambda = 589\ nm$ udává následující tabulka. [8]

	$\boldsymbol{n_e}$	$\boldsymbol{n_o}$
křemen	1,553	1,544
vápenec	1,4864	1,6583
led při 0^oC	1,310	1,309
turmalin	1,619	1,637

Dopadá-li na destičku podle obr. 1.9 monochromatická rovinná elektromagnetická vlna (1.1), bude mít na vstupu $z = 0$ elektrický vektor (1.2)

$$\boldsymbol{E_{vst}}(0,t) = \boldsymbol{x_0} E_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + \boldsymbol{y_o} E_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Uvnitř destičky se její složky, lineárně polarizované ve směrech $\boldsymbol{x_0} = \boldsymbol{n}$ a $\boldsymbol{y_0} \perp \boldsymbol{n}$, šíří různými

[8] Krystaly s $n_e > n_o$ se nazývají pozitivní, s $n_e < n_o$ negativní.

Obrázek 1.10: Změna polarizačního stavu pro $\Delta\varphi = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$.

Obrázek 1.11: Polarizační hranoly. a) Nicolův hranol, b) Wollastonův hranol. Šipky značí směry optických os.

fázovými rychlostmi v_e, v_o, takže na výstupu $z = d$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_{v\acute{y}st}(d,t) &= \boldsymbol{x_0} E_{vst\,x}(0, t - \frac{d}{v_e}) + \boldsymbol{y_0} E_{vst\,y}(0, t - \frac{d}{v_o}) \\
&= \boldsymbol{x_0} E_1 \cos(\omega t - k_e d + \varphi_1) + \boldsymbol{y_0} E_2 \cos(\omega t - k_o d + \varphi_2).
\end{aligned}$$

V destičce se počáteční rozdíl fází obou složek $\varphi_2 - \varphi_1$ změní na $\varphi_2 - \varphi_1 + (k_e - k_o)d$. Přídavný fázový posuv $\Delta\varphi$ vzniklý v destičce lze vyjádřit pomocí vlnové délky λ ve vakuu a indexů lomu n_e, n_o vzorcem [9]

$$\boxed{\Delta\varphi = (k_e - k_o)d = \frac{2\pi}{\lambda}(n_e - n_o)d.}$$

Možnost změnit fázový rozdíl a tedy i polarizační stav světla se nejčastěji využívá u ***čtvrtvlnové destičky***, v níž vzniká fázový rozdíl $\pi/2$. Dopadá-li lineárně polarizované světlo na $\lambda/4$-destičku z pozitivního krystalu ($n_e > n_o$) orientovanou podle obr. 1.10a, pak na výstupu dostaneme pravotočivě kruhově polarizované světlo (obr. 1.10b). Změny polarizačního stavu po dalších čtvrtvlnových posunech jsou znázorněny na obr. 1.10c, d.

Cvičení 2. Plátky průhledné slídy (muskovitu) jsou dvojosými krystaly a mají pro $\lambda = 589\ nm$ indexy lomu $n_1 = 1,594$, $n_2 = 1,589$. Spočítejte tloušťku slídové $\lambda/4$-destičky pro $\lambda = 589\ nm$ ([**?**],př. 6.36). Její tloušťka není $\lambda/4$, ale $d \doteq 0,027\ mm$!

Využití dvojlomného vápence ke konstrukci polarizačního filtru představuje ***Nicolův hranol***, obr. 1.11a.

Je vyroben z krystalu vápence ve třech krocích: sbroušením z původního úhlu 71° v klenci na 68°, rozříznutím, aby druhý vyznačený úhel byl 90° a slepením obou dílů kanadským balzámem, jehož index lomu 1,55 leží mezi indexy lomu vápence $n_e \doteq 1,49$ a $n_o \doteq 1,66$. Při dopadu světla podle obr. 1.11a se řádný paprsek na rozhraní vápence a lepidla totálně odráží, protože příslušný mezní úhel je 69°10' ($\sin 69°10' = 1,55/1,66$). Z nikolu vychází jen mimořádný paprsek se známou lineární polarizací ve svislém směru.

Cvičení 3. Promyslete si konstrukci a funkci dalšího polarizačního hranolu na obr. 1.11b [**?**].

Umístíme-li dva otočné polarizační filtry do svazku světla na optické lavici, nazývá se první z nich ***polarizátor***, druhý ***analyzátor***. Je-li orientace analyzátoru kolmá na

[9] $k_o = \omega/v_o = n_o\omega/c = n_o 2\pi/\lambda$ a stejně pro k_e.

Obrázek 1.12: Babinetův kompenzátor. Optické osy klínů jsou označeny šipkami. Jeden z klínů je posuvný ve směru x.

orientaci polarizátoru, světlo podle Malusova zákona neprochází; říkáme, že *polarizační filtry jsou zkřížené.*

Cvičení 4. Vložíme-li mezi zkřížené polarizační filtry vlnovou destičku a otáčíme jí v bílém dopadajícím světle, dochází na stínítku ke krásným barevným efektům. Vysvětlete !

Měření polarizace světla. Na konci oddílu 7.2 jsme uvedli, že k určení polarizačního stavu monochromatického viditelného světla měřením intenzit (1.3) je nutné použít speciální optické elementy. Měření souboru čtyř intenzit lze realizovat *pomocí polarizačního filtru a čtvrtvlnové destičky* následujícím způsobem:

1. Osu propustnosti polarizátoru orientujeme ve směru osy x a podle (1.1), (1.5) měříme intenzitu prošlého světla $< E_x^2 >_T = E_1^2/2$.

2. Polarizátor orientujeme podél osy y a měříme $< E_y^2 >_T = E_2^2/2$.

3. Osu propustnosti $\boldsymbol{e}$ polarizátoru orientujeme pod úhlem 45^o mezi osami x, y, tj. $\boldsymbol{e} = (\boldsymbol{x_0} + \boldsymbol{y_0})/\sqrt{2}$. Měříme pak intenzitu prošlého světla $< (\frac{E_x}{\sqrt{2}} + \frac{E_y}{\sqrt{2}})^2 >_T = \frac{1}{2} < E_x^2 >_T + \frac{1}{2} < E_y^2 >_T + < E_x E_y >_T$; odtud se již snadno určí $< 2E_x E_y >_T$ a $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$.

4. K určení $\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$ z intenzity $< 2E_x(\omega t - \frac{\pi}{2}) E_y(\omega t) >_T$ se v uspořádání s polarizačním filtrem podle bodu 3. použije ještě čtvrtvlnová destička umístěná *před* polarizačním filtrem. Je-li např. z pozitivního krystalu, orientuje se podle obr. 1.9 s optickou osou $\boldsymbol{n}$ ve směru osy x, aby způsobila dodatečný fázový posuv $\Delta\varphi = \pi/2$.

Babinetův kompenzátor (obr. 1.12) je přístroj sloužící k určení fázového posunutí $\Delta\varphi$ zpožďovací destičky neznámé tloušťky. Sestává ze dvou křemenných klínů K_1, K_2 (pevný a posuvný) podle obr. 1.12 s optickými osami vyznačenými šipkami. Klíny způsobují fázová posunutí opačného znaménka, uprostřed je výsledné fázové posunutí nulové. Je-li kompenzátor při monochromatickém světle vložen mezi zkřížené polarizační filtry orientované pod úhlem 45^o k optickým osám x, y, objeví se podél osy x tmavé proužky na místech, kde výsledné fázové posunutí má hodnoty $\Delta\varphi = 0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, ...$ Kompenzátor se okalibruje odečtením počtu n mikrometrických dílků, o něž se musí posunout posuvný klín (ve směru x), aby tmavé proužky přešly přesně do sousedních původních poloh. Pak lze změřit fázový posuv destičky neznámé tloušťky. Mezi zkřížené polarizátory ještě vložíme destičku neznámé tloušťky s optickou osou ve směru x nebo y. Tím se tmavé proužky posunou. Mikrometrickým posunem kompenzátoru (o n_1 dílků) vrátíme proužky do původní polohy. Velikost fázového posunutí je pak $\Delta\varphi = 2\pi n_1/n$.

Optická aktivita je schopnost látky stáčet směr polarizace procházejícího lineárně polarizovaného světla. Vykazuje ji řada látek, především křemen, a dále vodní roztoky

Obrázek 1.13: Stáčení směru polarizace lineárně polarizovaného světla v látce P. Určuje se v uspořádání s polarizátorem N_1 a analyzátorem N_2.

Obrázek 1.14: Enantiomorfismus krystalů křemene.

cukru, kyseliny hroznové a pod. V polarimetrickém uspořádání podle obr. 1.13 lze např. přesně určit koncentraci cukru v roztoku P.

V důsledku optické aktivity dojde po průchodu monochromatického světla roztokem v nádobce P o délce l k otočení směru polarizace o úhel

$$\varphi = \varphi_0 \frac{w}{100} l,$$

kde φ_0 je tzv. měrná otáčivost a w je hmotnostní zlomek (koncentrace) aktivní látky v roztoku v procentech. Měrná otáčivost závisí na vlnové délce a teplotě.

Vlastnost optické aktivity roztoků souvisí s prostorovou strukturou molekul rozpuštěné látky, jež se vyskytují ve dvou prostorově odlišných formách (např. s asymetricky vázaným uhlíkem), jež se dají ztotožnit pouze zrcadlením. Podobné zrcadlové (enantiomorfní) tvary vykazují i krystaly křemene, obr. 1.14.

Ukážeme si, že optickou aktivitu lze považovat za *dvojlom vzhledem ke kruhové polarizaci*. Lineárně polarizované monochromatické světlo vstupující do opticky aktivního prostředí se dá zapsat ve tvaru superpozice pravotočivě a levotočivě kruhově polarizovaného světla (obr. 1.15) s nulovou relativní fází

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}(0,t) &= \boldsymbol{x_0} E_0 \cos \omega t = \boldsymbol{E}^+(0,t) + \boldsymbol{E}^-(0,t) \\ &= \frac{E_0}{2}(\boldsymbol{x_0} \cos \omega t - \boldsymbol{y_0} \sin \omega t) + \frac{E_0}{2}(\boldsymbol{x_0} \cos \omega t + \boldsymbol{y_0} \sin \omega t). \end{aligned}$$

Předpokládáme-li, že se složky $\boldsymbol{E}^+$, $\boldsymbol{E}^-$ šíří s indexy lomu $n^+ \neq n^-$, v prostředí o délce l dojde ke vzniku fázového posunutí

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n^+ - n^-) l.$$

Z obr. 1.16 je patrné, že nový směr polarizace vznikne půlením úhlu $2\alpha + \Delta\varphi$ mezi $\boldsymbol{E}^+$ a $\boldsymbol{E}^-$. Vidíme, že úhel $\alpha + \varphi$ mezi $\boldsymbol{E}^+$ a $\boldsymbol{E}^-$ je současně roven $(2\alpha + \Delta\varphi)/2 = \alpha + (\Delta\varphi/2)$ a tedy stočení směru polarizace φ činí přesně polovinu fázového posunutí,

$$\varphi = \frac{\Delta\varphi}{2}.$$

Cvičení 5.: Co se stane, když lineárně polarizované světlo projde opticky aktivním prostředím, je odraženo zrcadlem a projde prostředím zpět? Uvažte, že levotočivá složka

Obrázek 1.15: Rozklad lineárně polarizovaného světla na dvě kruhově polarizované složky.

Obrázek 1.16: Stočení φ směru polarizace lineárně polarizovaného světla v opticky aktivním prostředí.

$\boldsymbol{E}^-$ se po odrazu stane pravotočivou $\boldsymbol{E}^+$, neboť smysl rotace se odrazem nezmění, ale vlna se šíří opačným směrem !

Indukovaná optická anizotropie. V předchozím příkladu jsme si uvedli dva hlavní projevy anizotropie optického prostředí — dvojlom a optickou aktivitu. Přirozená anizotropie látek je dána buď anizotropií krystalů nebo asymetrií molekul. Indukovaná optická anizotropie je způsobena působením vnějších sil na původně izotropní prostředí. Příslušné optické efekty mají vesměs důležité praktické aplikace. Podle druhu fyzikálního působení mluvíme o fotoelastickém jevu a jevech elektrooptických a magnetooptických.

Fotoelastický jev je vznik dvojlomu v původně izotropních látkách (sklo, plexisklo apod.) vyvolaný mechanickým namáháním, s nímž je spojena vnitřní deformace prostředí. Pro malá elastická napětí je rozdíl indexů lomu řádné a mimořádné vlny uměrný tlaku p, tj.

$$\Delta n = |n_e - n_o| = kp.$$

Konstanta k se nazývá Brewsterův součinitel; např. pro sklo $k \approx 10^{-11} m^2 N^{-1}$.

Elektrooptické jevy mají velký praktický význam pro regulaci a modulaci svazku světla, rychlé spínání obvodů a pod. Podle závislosti Δn na vnějším elektrickém poli $\boldsymbol{E}$ rozlišujeme lineární resp. kvadratický elektrooptický jev. Kvadratický ***Kerrův jev*** (J. Kerr, 1875) je dvojlom indukovaný příčným elektrickým polem $\boldsymbol{E}$ v polárních kapalinách, např. v nitrobenzenu nebo sirouhlíku. Tyto kapaliny získávají v důsledku orientace polárních molekul vlastnosti jednoosých krystalů s optickou osou $\boldsymbol{n} \parallel \boldsymbol{E}$. Vzhledem k tomu, že rozdíl indexů lomu

$$\Delta n = n_e - n_o = \lambda B E^2,$$

dochází na délce l k fázovému posuvu

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta n l = 2\pi B l E^2.$$

Největší Kerrovu konstantu $B = 2,4.10^{-12} m/V^2$ má nitrobenzen (udaná hodnota je při $\lambda = 550$ nm a teplotě 20^{o}C). Lineární ***Pockelsův jev*** (F. Pockels, 1894) našel široké uplatnění po objevu laserů. Je založen na vlastnosti některých jednoosých krystalů, že se ve vnějším elektrickém poli stanou dvojosými. Při podélně přiloženém elektrickém poli je fázový rozdíl na délce l dán vztahem

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} n_o^3 R E l$$

a je tedy úměrný přiloženému napětí $U = El$. Pro často užívaný elektrooptický krystal ADP (dihydrogenfosfát amonia, $NH_4H_2PO_4$ je při $\lambda = 550\ nm$ index lomu pro řádný paprsek $n_o = 1,53$. Místo konstanty R se udává půlvlnové napětí $U_{\lambda/2} = 9,2\ kV$, které způsobuje fázový posuv $\Delta\varphi = \pi$. (Pro krystal KDP, KH_2PO_4, je $n_o = 1,51$ a $U_{\lambda/2} = 7,5\ kV$).

Magnetooptické jevy jsou rovněž lineární a kvadratické. Kvadratický ***Cottonův–Moutonův jev*** se pozoruje např. v nitrobenzenu nebo sirouhlíku, které v příčném magnetickém poli $\boldsymbol{H}$ získají vlastnosti pozitivních jednoosých krystalů s $\boldsymbol{n} \parallel \boldsymbol{H}$. Vzhledem k tomu, že ve vztahu

$$\Delta n = n_e - n_o = \lambda C H^2$$

je konstanta C velmi malá, nenašel tento jev praktické uplatnění. Lineární ***Faradayův jev*** (M. Faraday, 1845) je stáčení směru lineární polarizace světla v původně opticky neaktivní látce, je-li vložena do podélného magnetického pole. Indexy lomu pro kruhově levotočivě a pravotočivě polarizované světlo se stávají rozdílnými a úhel stočení směru polarizace lineárně polarizovaného světla je dán vztahem

$$\varphi = \frac{\Delta\varphi}{2} = \frac{\pi}{\lambda}(n^+ - n^-)l = VlH,$$

kde Verdetova konstanta V závisí na vlnové délce λ , hustotě látky a teplotě. Zajímavé využití Faradayova jevu představuje ***optický izolátor***. Je uspořádán podle obr. 1.13, kde P je solenoid, jehož skleněné jádro má velkou Verdetovu konstantu a polarizační filtry N_1, N_2 jsou vzájemně otočeny o $\pm 45^o$. Proud v solenoidu budí takové magnetické pole, aby stočení $\varphi = 45^o$. Na rozdíl od přirozeně opticky aktivních látek dochází v případě Faradayova jevu při zpětném průchodu odraženého záření k dalšímu stočení směru polarizace ve stejném smyslu, v našem případě o dalších 45^o, celkem tedy 90^o. Zpětný svazek proto neprojde polarizátorem N_1 zpět. V laserové technice optické izolátory chrání poslední stupně optických kvantových zesilovačů před jejich případnou destrukcí zářením odraženým zpět od terče.

1.4 Časová koherence a polarizace

Kvazimonochromatické záření z tepelných zdrojů. Pojem časové koherence: světlo dokonale koherentní a nekoherentní, koherenční čas. Světlo dokonale polarizované, nepolarizované a částečně polarizované. Stokesovy parametry.

Při výkladu polarizačních jevů jsme zatím vycházeli z předpokladu oddílu 7.1, že elektromagnetické vlny jsou monochromatické. Viděli jsme, ža každá taková vlna je polarizovaná. Jak se potom máme vyrovnat s faktem, že se v praxi nejčastěji setkáváme se světlem nepolarizovaným?

K tomu si musíme na prvním místě uvědomit, že skutečné zdroje elektromagnetického záření nikdy nevyzařují přesně monochromatické vlny. Monochromatičnost je idealizace, která se nikdy v přírodě v dokonalé formě nevyskytuje. U *tepelných světelných zdrojů* světlo je vysíláno mnoha nezávislými atomárními zdroji a výsledné pole vzniká jejich složením.

Jako model tepelného zdroje můžeme uvažovat soubor velkého počtu oscilátorů (Thomsonových atomů), z nichž každý nezávisle a nahodile vysílá vlnový balík (**??**) exponenciálně tlumený v čase s typickou časovou konstantou $\tau \approx 10^{-8} s$. Výsledné záření tedy nebude monochromatické. Jestliže všechny atomární oscilátory mají stejnou vlastní úhlovou frekvenci ω_0, bude spektrum jejich záření soustředěno do jistého intervalu šířky $\Delta\omega$ okolo **střední (dominantní) frekvence** ω_0. V případě $\Delta\omega \ll \omega_0$ pak mluvíme o *zdroji kvazimonochromatického záření*. Vzhledem ke vztahu (**??**) mezi šířkou signálu a šířkou jeho spektra bude platit

$$\Delta\omega.\tau \approx 2\pi,$$

tj. $\Delta\nu \approx 10^8\, Hz \ll \nu_0 \approx 10^{15}\, Hz$.

Z uvedeného vyplývá, že tepelný signál vysílaný tepelným zdrojem je **náhodným (stochastickým) procesem**. V daném místě v okamžiku t neumíme přesně určit vektor $\boldsymbol{E}(t)$, ale můžeme ho popsat jistým pravděpodobnostním rozložením. Celkově pak lze náhodný proces charakterizovat souborem statistických středních hodnot. Jsou-li tyto střední hodnoty konstantní v čase, mluvíme o **stacionárním** náhodném procesu.

U kvazimonochromatického signálu $\boldsymbol{E}(t)$ si můžeme představit, že u složky

$$E(t) = E_0(t)\cos\left(\omega_0 t + \varphi(t)\right), \tag{1.6}$$

amplituda $E_0(t)$ a fáze $\varphi(t)$ nezůstávají konstantní, ale náhodně se mění s časovou konstantou $\tau \gg T_0$. Během jedné periody T_0 nebo malého počtu period můžeme $E_0(t)$ a $\varphi(t)$ ovšem považovat za konstanty jako u monochromatického signálu.

Signál (1.6) můžeme posuzovat z hlediska **časové koherence**. Nechť jsou dána náhodná pole $E_1(t)$, $E_2(t)$ v témže bodě a časový interval Δt. Lze-li pole $E_2(t+\Delta t)$ přesně určit ze znalosti $E_1(t)$, říkáme, že pole $E_1(t)$ a $E_2(t+\Delta t)$ jsou **dokonale (úplně) koherentní**. Nelze-li pole $E_2(t+\Delta t)$ předpovědět na základě znalosti $E_1(t)$, říkáme, že tato pole jsou **nekoherentní**.

Příklad. Nechť $E_0(t) = E_0 = konst.$ (konstantní intenzita) a $\varphi(t)$ se pomalu náhodně mění s časovou konstantou $\tau \gg T_0$. Potom pole

$$E_1(t) \equiv E(t) = E_0\cos\left(\omega_0 t + \varphi(t)\right),$$

a

$$E_2(t+\Delta t) \equiv E(t+\Delta t) = E_0\cos\left(\omega_0 t + \omega_0\Delta t + \varphi(t+\Delta t)\right)$$

jsou dokonale koherentní pro $\Delta t \ll \tau$, protože $\varphi(t+\Delta t) = \varphi(t)$, a pro $\Delta t \geq \tau$ nekoherentní, protože $\varphi(t+\Delta t)$ již nelze předpovědět ze znalosti $\varphi(t)$.

Jako v tomto příkladě i obecně existuje tzv. **koherenční čas** τ_{koh}, který odděluje situace dokonalé koherence ($\Delta t \ll \tau_{koh}$) a nekoherence ($\Delta t \geq \tau_{koh}$). Užívá se celá řada konvencí, jak τ_{koh} definovat. My se přidržíme vlastnosti kvazimonochromatických tepelných zdrojů, kde

$$\tau_{koh} \approx \tau \approx \frac{2\pi}{\Delta\omega} \approx 10^{-8}\ s.$$

Jinou mírou časové koherence je bezrozměrný **stupeň monochromatičnosti** $\Delta\nu/\nu_0$, který je nepřímo úměrný koherenčnímu času,

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx \frac{2\pi}{\omega_0\tau_{koh}} \approx \frac{10^{-15}}{10^{-8}} = 10^{-7}.$$

Názornou mírou časové koherence je **koherenční délka**

$$l_{koh} = c\tau_{koh} \approx 3\ m,$$

která představuje délku vlny vyslané za čas τ_{koh}.

Cvičení 6. Vypočítejte vlastnosti časové koherence pro výbojku, kde atomy vykonávají tepelný pohyb s nerelativistickou střední rychlostí $v \approx 10^2\ m/s$. **Dopplerův jev** způsobuje maximální změny frekvence registrované pozorovatelem při pohybu zdrojů ve směru k němu resp. od něho podle vztahu

$$\nu'_{\pm} = \frac{c}{c \pm v}\nu_0.$$

Potom stupeň monochromatičnosti

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{|\nu'_+ - \nu'_-|}{\nu_0} = 2\left|\frac{c}{c \pm v} - 1\right| = 2\frac{v}{c} \approx 10^{-6}$$

je o řád větší než hodnota 10^{-7}. Odpovídající **dopplerovské rozšíření spektrální čáry** proto vede na šířku spektra

$$\Delta\nu \approx 10^9\ Hz,$$

tj. je desetkrát větší než tzv. **přirozená šířka spektrální čáry**. Koherenční čas vychází $\tau_{koh} \approx 10^{-9}\ s$ a koherenční délka $l_{koh} \approx 0,3\ m$.

Při popisu polarizace kvazimonochromatického světla vznikajícího ve výbojce předpokládáme, že ve vztahu pro elektrické pole rovinné vlny pro $z = 0$

$$\boldsymbol{E}(0,t) = \boldsymbol{x_0}E_1(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_1(t)) + \boldsymbol{y_0}E_2(t)\cos(\omega_0 t + \varphi_2(t)) \tag{1.7}$$

veličiny $E_1(t), E_2(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t)$ již nejsou konstanty jako ve vztahu (1.2), ale pomalu se náhodně mění s koherenční dobou $\tau_{koh} \gg T_0$. Vypočteme-li čtyři intenzity (1.3), které nám slouží k určení polarizačního stavu, se středováním přes jednu periodu délky T_0,

$$\begin{aligned}
< E_x^2 >_{T_0} &= \frac{1}{2}E_1(t)^2, \qquad (1.8)\\
< E_y^2 >_{T_0} &= \frac{1}{2}E_2(t)^2,\\
< 2E_xE_y >_{T_0} &= E_1(t)E_2(t)\cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)),\\
< 2E_x(\omega t - \frac{\pi}{2})E_y(\omega t) >_{T_0} &= E_1(t)E_2(t)\sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t)),
\end{aligned}$$

vidíme, že získané střední hodnoty se budou pomalu měnit. Kdybychom měli rychlý přistroj s **rozlišovací dobou** $t_r \ll \tau_{koh}$, mohli bychom pomalé změny středních hodnot zachytit.

Každé takové měření by poskytlo soubor okamžitých hodnot $E_1(t), E_2(t), \varphi_1(t) - \varphi_2(t)$, které určují polarizované světlo. Jeho polarizace by se ovšem s časem měnila v časových intervalech délky řádu $\tau_{koh} \approx 10^{-9}\ s$, tj. nanosekund.

Obvyklé detektory intenzity světla mají rozlišovací dobu delší než τ_{koh}, zvláště pak klasický detektor — *lidské oko* — s rozlišovací dobou $t_r \approx 0,1\ s$. Intenzity (1.3) se středováním přes rozlišovací dobu přístroje $t_r \gg \tau_{koh}$,

$$< E_x^2 >_r,\ < E_y^2 >_r,\ < 2E_xE_y >_r,\ < 2E_x(\omega t - \frac{\pi}{2})E_y(\omega t) >_r,$$

by se daly získat dodatečným středováním pomalu se měnících intenzit (1.8), avšak výsledek bude záviset na konkrétní souhře náhodných změn veličin $E_1(t)$, $E_2(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$.

Nepolarizované světlo. Uvažujme obvyklý případ zcela náhodných změn $E_1(t)$, $E_2(t)$, $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ během rozlišovací doby $t_r \gg \tau_{koh}$, kdy se fáze mění navzájem nezávisle a amplitudy nabývají náhodně hodnot v intervalu $0 \leq E_{1,2}(t) \leq E_0$ při konstantní celkové intenzitě $E_1(t)^2 + E_2(t)^2 = E_0^2$. Středováním posledního vztahu dostaneme

$$< E_x^2 >_r = < E_y^2 >_r = \frac{1}{2}E_0^2.$$

Středování intenzit (1.8) úměrných $\cos(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))$ a $\sin(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))$ dává v tomto případě nulové hodnoty

$$< 2E_xE_y >_r = 0 = < 2E_x(\omega t - \frac{\pi}{2})E_y(\omega t) >_r,$$

neboť za dobu $t_r \gg \tau_{koh}$ rozdíl fází $\varphi_1(t) - \varphi_2(t)$ projde se stejnou pravděpodobností všemi hodnotami v intervalu $< 0, 2\pi >$. Světlo těchto vlastností registrované pomalým přístrojem nazýváme **nepolarizované.** Všimněte si, že dané výsledky měření středních hodnot

1. nezávisí na konkrétní volbě os x, y,

2. nelze vyjádřit pomocí konstant E_1, E_2, $\varphi_1 - \varphi_2$ (neboť $\cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ a $\sin(\varphi_1 - \varphi_2)$ nikdy nemohou být současně rovny nule).

Pokud u kvazimonochromatického světla intenzity (1.8) naměřené pomalým přístrojem lze vyjádřit vztahy (1.3) s konstantami E_1, E_2, $\varphi_1 - \varphi_2$, říkáme, že světlo je **dokonale (úplně) polarizované**. Takové světlo získáme např. po průchodu nepolarizovaného světla polarizačním filtrem.

Mezi dokonale polarizovaným a nepolarizovaným světlem se nacházejí stavy **částečné polarizace**, u nichž náhodné změny veličin $E_1(t), E_2(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t)$ mohou být nějak vzájemně závislé. Pro jejich popis se používají **Stokesovy parametry**

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{< E_x^2 >_r - < E_y^2 >_r}{< E_x^2 >_r + < E_y^2 >_r}, \qquad (1.9) \\ P_2 &= \frac{< 2E_xE_y >_r}{< E_x^2 >_r + < E_y^2 >_r}, \\ P_3 &= \frac{< 2E_x(\omega t - \frac{\pi}{2})E_y >_r}{< E_x^2 >_r + < E_y^2 >_r}, \end{aligned}$$

které nezávisí na celkové intenzitě a tedy popisují pouze polarizační stav.

Cvičení 7. Ověřte, že pro dokonale polarizované světlo platí $P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = 1$, kdežto pro nepolarizované světlo máme $P_1 = P_2 = P_3 = 0$. Jaké Stokesovy parametry má kruhově polarizované světlo?

Obecně lze dokázat nerovnost

$$\boxed{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 \leq 1.} \tag{1.10}$$

Mezi extrémními stavy úplně polarizovaného světla (rovnost v (1.10)) a nepolarizovaného světla ($P_1 = P_2 = P_3 = 0$) jsou tedy stavy částečné polarizace. Geometricky se dají možné polarizační stavy znázornit body (P_1, P_2, P_3) v kouli jednotkového poloměru: stavy úplně polarizovaného světla odpovídají bodům na povrchu koule, nepolarizované světlo odpovídá středu a ostatní vnitřní body odpovídají částečně polarizovanému světlu. Mírou polarizace světla je **stupeň polarizace** definovaný jako délka vektoru $\boldsymbol{P} = (P_1, P_2, P_3)$. Nabývá hodnot:

$|\boldsymbol{P}| = 0$ pro nepolarizované světlo,

$0 < |\boldsymbol{P}| < 1$ pro částečně polarizované světlo,

$|\boldsymbol{P}| = 1$ pro úplně polarizované světlo.

Nerovnost (1.10) se snadno dokáže v komplexním vyjádření kvazimonochromatické vlny

$$\boldsymbol{E}(0,t) = \mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{x_0} E_1(t) e^{i(\omega_0 t + \varphi_1(t))} + \boldsymbol{y_0} E_2(t) e^{i(\omega_0 t + \varphi_2(t))}\right\}$$

kde $E_1(t), E_2(t), \varphi_1(t), \varphi_2(t)$ jsou pomalé náhodné funkce času (s koherenčním časem τ_{koh}). Podobně jako v oddíle 7.1 má komplexní vektor $\widehat{\boldsymbol{E_0}}$ složky

$$E_{0x}(t) = E_1(t) e^{i\varphi_1(t)}, \quad E_{0y}(t) = E_2(t) e^{i\varphi_2(t)}. \tag{1.11}$$

V oddíle 7.2 jsme viděli, že polarizační stav monochromatického světla lze určit měřením čtyř intenzit (1.3). U kvazimonochromatického světla je doba, přes kterou středujeme, dána dlouhou rozlišovací dobou měřícího přístroje $t_r \gg \tau_{koh}$. Ukážeme si nejprve, že čtyři intenzity (1.3) získané středováním přes t_r, lze kompaktně zapsat ve formě komplexní hermitovské matice

$$J = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} \\ J_{yx} & J_{yy} \end{pmatrix},$$

jejíž prvky jsou střední hodnoty

$$J_{ab} = < E_{0a}(t) \overline{E_{0b}(t)} >_r .$$

Dosazením (1.11) do J_{ab} dostaneme

$$\begin{aligned}
J_{xx} &= < E_{0x} \overline{E_{0x}} >_r = < E_1(t)^2 >_r = 2 < E_x^2 >_r \\
J_{yy} &= 2 < E_y^2 >_r \\
J_{xy} &= < E_{0x} \overline{E_{0y}} >_r = < E_1(t) E_2(t) e^{i(\varphi_1(t) - \varphi_2(t))} >_r \\
&= < 2E_x E_y >_r + i < 2E_x(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}) E_y(\omega_0 t) >_r = \overline{J_{yx}}.
\end{aligned}$$

Celkovou intenzitu a Stokesovy parametry lze tedy zapsat pomocí prvků matice J:

$$I = \frac{1}{2}(J_{xx} + J_{yy}), P_1 = \frac{J_{xx} - J_{yy}}{J_{xx} + J_{yy}}, P_2 = \frac{J_{xy} + J_{yx}}{J_{xx} + J_{yy}}, P_3 = \frac{J_{xy} - J_{yx}}{i(J_{xx} + J_{yy})}.$$

Obráceně se komplexní hermitovská matice J dá vyjádřit pomocí čtyř nezávislých reálných parametrů I, P_1, P_2, P_3:

$$J = I \begin{pmatrix} 1 + P_1 & P_2 + iP_3 \\ P_2 - iP_3 & 1 - P_1 \end{pmatrix}.$$

V dalším budeme potřebovat její determinant

$$detJ = I^2(1 - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2).$$

Při středování přes *statistický soubor* velkého počtu N realizací náhodných veličin $E_{0a}^{(n)}, n \in \hat{N}, a \in \{x, y\}$, jsou střední hodnoty J_{ab} rovny

$$J_{ab} =< E_{0a}\overline{E_{0b}} >_N = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} E_{0a}^{(n)} \overline{E_{0b}^{(n)}}.$$

Potom pro determinant

$$detJ = J_{xx}J_{yy} - |J_{xy}|^2 = \frac{1}{N^2} \sum_m \left| E_{0x}^{(m)} \right|^2 \sum_n \left| E_{0y}^{(n)} \right|^2 - \frac{1}{N^2} \left| \sum_n E_{0x}^{(n)} \overline{E_{0y}^{(n)}} \right|^2$$

vzhledem ke Schwartzově nerovnosti v C^N

$$\left| \sum_n x_n \overline{y_n} \right|^2 \leq \sum_n |x_n|^2 \sum_n |y_n|^2$$

platí nerovnost

$$detJ = I^2(1 - P_1^2 - P_2^2 - P_3^2) \geq 0.$$

Na závěr je třeba poznamenat, že intenzity jsou správně definovány jako střední hodnoty přes statistický soubor. Jejich vyjádření pomocí časových středních hodnot je založeno na obvykle splněném předpokladu o **ergodičnosti** stochastického procesu, což zhruba znamená, že během dostatečně dlouhé doby systém projde v blízkosti všech možných stavů realizovaných ve statistickém souboru.