Kapitola 1

Energie vlnění

1.1 Energetické veličiny pro strunu

Hustota kinetické, potenciální a celkové energie na struně. Vektor toku energie. Zákon zachvání energie. Energie pro superpozici vln. Amplituda a intenzita.

Z mechaniky víte, že celková energie $E_{kin} + E_{pot}$ *izolované soustavy* hmotných bodů při působení *konservativních sil* mezi hmotnými body se zachovává, tj. během pohybu se nemění. To ovšem neplatí pro jednotlivé částice izolované soustavy: energie se uvnitř soustavy přelévá.[1] Ukážeme si, jak se tato skutečnost dá matematicky vyjádřit pro nejjednodušší vlnící se prostředí - strunu.

Pro odvození vzorců pro energetické veličiny na struně si pomůžeme diskretní aproximací z oddílu 1.3 a spojitou limitou. Kinetická energie krátkého úseku struny $< z, z+dz >$ je součtem kinetických energií všech hmotných bodů řetízku, které leží v intervalu $< z, z + dz >$:

$$E_{kin}(z, z + dz) = \frac{1}{2} \sum_{z \leq na \leq z+dz} M \dot{\psi}_n^2 . \tag{1.1}$$

Vyjádříme-li levou stranu (1.1) pomocí ***hustoty kinetické energie*** $\kappa(z, t)$ a na pravé straně nahradíme všechna $\dot{\psi}_n(t)$ hodnotou spojité funkce $\frac{\partial \psi}{\partial t}(z, t)$, dostaneme

$$\kappa(z, t) dz = \frac{1}{2} M \frac{dz}{a} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}(z, t) \right)^2 .$$

Součinitel dz/a zde vyjadřuje počet členů sumy v (1.1). Ve spojité limitě $a \to 0$ musí $M \to 0$, aby hustota $\rho = M/a$ zůstala konstantní, takže

$$\boxed{\kappa(z, t) = \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right)^2} \tag{1.2}$$

[1] Rovněž to neplatí při působení disipativních sil (tření).

Pro určení hustoty potenciální energie vyjdeme z potenciální energie $U_{n,n+1}$, kterou získá pružinka spojující sousední hmotné body n, $n+1$ řetízku při vychýlení z rovnovážné polohy. Při natažení z počáteční délky a na konečnou délku l bude

$$U_{n,n+1} = -\int_a^l (-Kz')dz' = \frac{1}{2}K(l^2 - a^2) = \frac{1}{2}K(\psi_{n+1} - \psi_n)^2,$$

takže potenciální energie úseku $< z, z + dz >$ bude rovna

$$E_{pot}(z, z + dz) = \frac{1}{2} \sum_{z \le na \le z+dz} K(\psi_{n+1} - \psi_n)^2. \tag{1.3}$$

Levou stranu (1.3) lze vyjádřit pomocí ***hustoty potenciální energie*** $u(z,t)$. Na pravé straně ve spojité limitě $a \to 0$, $K \to \infty$, aby síla napínající strunu $T = Ka$ zůstala konstantní. Současně nahradíme ve všech sčítancích

$$\frac{\psi_{n+1}(t) - \psi_n(t)}{a} \approx \frac{\partial \psi}{\partial z}(z,t),$$

takže při počtu dz/a sčítanců

$$u(z,t)dz = \frac{1}{2}K\frac{dz}{a}\left(a\frac{\partial \psi}{\partial z}(z,t)\right)^2$$

a v limitě $a \to 0$ dostaneme

$$\boxed{u(z,t) = \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2.} \tag{1.4}$$

Celková energie na jednotku délky — ***hustota energie*** $\varepsilon(z,t)$ — je součtem $\kappa + u$,

$$\boxed{\varepsilon(z,t) = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2.} \tag{1.5}$$

Dovoluje v každém okamžiku t zapsat energii vlnění zvoleného úseku struny $< a, b >$ jako integrál

$$E_{<a,b>}(t) = \int_a^b \varepsilon(z,t)dz, \tag{1.6}$$

který se obecně mění s časem. Tyto změny energie v intervalu $< a, b >$ jsou nutně kompenzovány tokem energie přes hranice intervalu $< a, b >$. K vyjádření toku energie uvažujme dvojici bodů n, $n+1$ a zkoumejme, jak velká energie se při vlnění přenáší za 1 sekundu z bodu n na bod $n+1$. Tento výkon koná síla, kterou n-tý bod působí na bod $n+1$. Podle obr. **??** a **??** je rovna

$$-F_{2x} = -|\boldsymbol{F_2}|\sin(\vartheta_2) \approx -T\tan(\vartheta_2) = -T\frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{a} \approx -T\frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

Výkon, který tato síla koná na bodu $n+1$, dostaneme vynásobením rychlostí $\dot{\psi}_{n+1} \approx \partial\psi/\partial t$:

$$\boxed{S_z(z,t) = -T\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial t}.} \tag{1.7}$$

Veličina S_z o rozměru Js^{-1} (watt) představuje tok energie místem z ve směru $+z$. Protože má charakter vektorové veličiny, zavádíme vektor toku energie

$$\boxed{\mathbf{S}(z,t) = -T\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial t}\mathbf{z_0},} \tag{1.8}$$

kde $\boldsymbol{z_0}$ je jednotkový vektor ve směru osy z.

Abychom vyjádřili bilanci energie v daném intervalu $< a, b >$, zapíšeme úbytek energie (1.6) za jednotku času

$$-\frac{dE_{<a,b>}}{dt} = -\int_a^b \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}dz = -\int_a^b \left[\rho\frac{\partial\psi}{\partial t}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + T\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial^2\psi}{\partial t\partial z}\right]dz. \tag{1.9}$$

Jestliže v prvním členu integrandu vyjádříme $\partial^2\psi/\partial t^2$ pomocí vlnové rovnice, dostaneme po snadné úpravě

$$-\frac{dE_{<a,b>}}{dt} = \int_a^b \frac{\partial}{\partial z}\left(-T\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)dz = S_z(b) - S_z(a). \tag{1.10}$$

Jako důsledek pohybové rovnice jsme tedy obdrželi zákon zachování energie v integrálním tvaru.

Cvičení: Odvoďte diferenciální tvar zákona zachování energie, který má formu jednorozměrné rovnice kontinuity pro energii

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial S_z}{\partial z} = 0.$$

Zapamatujte si, že energetické veličiny κ, u, ε, $\boldsymbol{S}$ jsou **kvadratické** ve výchylkách ψ. Pro výchylku ψ víme, že platí **princip superpozice**, který plyne z linearity vlnové rovnice: jsou-li ψ_1, ψ_2 řešení vlnové rovnice, pak i jejich součet $\psi = \psi_1 + \psi_2$ je řešením. Z hlediska vzniku vlnění na struně můžeme předpokládat, že vlny ψ_1 resp. ψ_2 jsou buzeny silami $F_1(t)$ resp. $F_2(t)$ působícími na počátku polonekonečné struny. Při skládání vlnění se aditivně skládají i derivace

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \frac{\partial\psi_2}{\partial t}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = \frac{\partial\psi_1}{\partial z} + \frac{\partial\psi_2}{\partial z}.$$

Pro kvadratické veličiny to ovšem neplatí, např.

$$\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 = \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right)^2 + 2\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\frac{\partial\psi_2}{\partial t} \neq \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right)^2.$$

Přídavný **interferenční člen** vytváří dojem, že vzniká další energie, nebo se ztrácí. Z hlediska buzení vlny ψ součtem sil $F(t) = F_1(t) + F_2(t)$ však tento paradox mizí: výkon dodávaný na strunu

$$P(t) = F(t)\frac{\partial\psi}{\partial t}(0,t) = (F_1 + F_2)\left(\frac{\partial\psi_1}{\partial t} + \frac{\partial\psi_2}{\partial t}\right) \neq F_1\frac{\partial\psi_1}{\partial t} + F_2\frac{\partial\psi_2}{\partial t} = P_1(t) + P_2(t)$$

není roven součtu výkonů sil F_1, F_2 !

Poznámka k terminologii: Výraz **amplituda** jsme použili pro označení kladné konstanty A v harmonické vlně. V širším smyslu se často používá k označení veličiny **lineární** v ψ. Výraz **intenzita** se pak v tomto širším smyslu používá pro veličiny, které jsou kvadratické v ψ nebo v derivacích ψ. (V užším smyslu intenzita znamená časovou střední hodnotu toku energie v postupné vlně.) **Amplitudy vyhovují principu superpozice, intenzity nikoliv.**

1.2 Energetické poměry v postupné vlně

Energetické veličiny v postupné vlně a jejich vzájemný vztah. Časové a prostorové střední hodnoty pro harmonické postupné vlny.

V postupné vlně $\psi(z,t) = F(z - vt)$, která se šíří po struně ve směru $+z$, platí speciální vztah mezi derivacemi

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = -vF'(z - vt), \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} = F'(z - vt) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial\psi}{\partial t} = -v\frac{\partial\psi}{\partial z}.} \tag{1.11}$$

V důsledku vztahu (1.11) dostáváme rovnost hustoty kinetické a hustoty potenciální energie v libovolném místě a čase

$$\kappa = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial\psi}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\rho\left(-v\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 = u,$$

takže

$$\varepsilon = 2\kappa = 2u. \tag{1.12}$$

Tok energie lze pak jednoduše zapsat

$$S_z = -T\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -T\frac{\partial\psi}{\partial z}\left(-v\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) = vT\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2 = \varepsilon v. \tag{1.13}$$

Poslední vztah můžeme interpretovat podle obr. 4.1: za čas Δt bodem z projde energie z vyšrafované oblasti $\varepsilon v\Delta t$, tedy za jednotku času εv.

Zavedené energetické veličiny κ, u, S_z budeme ilustrovat na harmonické postupné vlně

$$\psi(z,t) = A\cos(\omega t - kz + \alpha).$$

Obrázek 1.1: Přenos energie v postupné vlně

Intenzity

$$\begin{aligned} \kappa(z,t) &= \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t - kz + \alpha), \\ u(z,t) &= \frac{1}{2}Tk^2 A^2 \sin^2(\omega t - kz + \alpha), \\ S_z(z,t) &= Tk\omega A^2 \sin^2(\omega t - kz + \alpha) \end{aligned} \tag{1.14}$$

jsou všechny úměrné kvadrátu $A^2 \sin^2(\omega t - kz + \alpha)$.

V praxi, vzhledem k vysokým frekvencím, obvykle měříme střední hodnoty těchto veličin. V daném místě pak určujeme časovou střední hodnotu. Časová střední hodnota integrabilní funkce $f(t)$ v intervalu $t_1 \le t \le t_2$ je definována integrálem

$$< f(t) >= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t)dt.$$

Pro periodický děj $f(t+T) = f(t)$ se střední hodnota počítá přes interval o délce jedné periody T:

$$< f(t) >_T = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f(t)dt. \tag{1.15}$$

Pro harmonické kmity jsou užitečné vzorce (odvoďte!)

$$< \cos(\omega t + \alpha) >_T = 0, \quad < \cos^2(\omega t + \alpha) >_T = \frac{1}{2} \tag{1.16}$$

a analogické vzorce pro sinus. Odtud ihned plyne, že

časové střední hodnoty intenzit pro harmonické postupné vlny nezávisí na z, t a jsou rovny polovině jejich maximálních hodnot.

Cvičení: Definujte prostorové střední hodnoty a odvoďte vzorce analogické (1.16)

$$< \cos(kz + \beta) >_\lambda = 0, \quad < \cos^2(kz + \beta >_\lambda = \frac{1}{2}.$$