Kapitola 1

Vlny v disperzním prostředí

1.1 Disperze světla v látkách

Jev disperze světla. Klasický model disperzního prostředí. Disperze elektromagnetických vln v plazmatu, aplikace na ionosféru. Rozlišení prostředí: disperzní — nedisperzní, transparentní — reaktivní. Plazma a řetízek atomů jako příklady reaktivních prostředí. Kvazimonochromatické vlnové balíky: vztah mezi šířkou vlnového balíku a šířkou jeho spektra, šíření vlnového balíku v disperzním prostředí, grupová rychlost. Fourierova transformace.

Důsledky disperze neboli rozkladu světla dobře znáte: např. duhu nebo rozklad světla skleněným hranolem. V druhém efektu (obr. 1.1) je bílé světlo lomem na dvou rozhraních rozloženo na viditelné spektrum sahající od červené až po fialovou barvu. O mechanismu vzniku duhy si přečtěte v [**?**].

V kap. 6 si podrobněji ukážeme, že světlo je elektromagnetické vlnění, které se šíří ve vakuu s fázovou rychlostí $c = 3.10^8\,m/s$. V dielektrickém prostředí o permitivitě ε a permeabilitě μ je jeho *fázová rychlost*

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\,. \tag{1.1}$$

Pro vakuum platí vztah $c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$. *Index lomu prostředí* n je pak definován vztahem

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}} = \sqrt{\varepsilon_r\mu_r} \doteq \sqrt{\varepsilon_r}\,, \tag{1.2}$$

kde $\varepsilon = \varepsilon_0\varepsilon_r$, $\mu = \mu_0\mu_r$. Pro obvyklá průhledná prostředí jsme položili $\mu_r \doteq 1$, protože μ_r se od jedničky liší až na třetím resp. šestém desetinném místě (pro paramagnetické, resp. diamagnetické látky).

Obrázek 1.1: Rozklad světla hranolem

Obrázek 1.2: Snellův zákon lomu

Obrázek 1.3: Sklo jako disperzní prostředí

Průchod světla hranolem se řídí Snellovým zákonem lomu (obr. 1.2)

$$n_1 \sin\vartheta_1 = n_2 \sin\vartheta_2 \ ,$$

kde n_1, n_2 jsou indexy lomu po obou stranách rozhraní. Vlnové délky viditelného světla sahají od 400 do 800 nm a odpovídají barvám od fialové po červenou. Při rozkladu světla hranolem je tedy světlo rozloženo na *monochromatické (harmonické) vlny.* Protože $n_{vzduch} = 1$, znamená to, že index lomu skla a tudíž i fázová rychlost světla ve skle jsou závislé na (vakuové) vlnové délce neboli ekvivalentně na úhlové frekvenci ω, $v(\omega) = c/n(\omega)$. Vzhledem k tomu, že $v = \omega/k$, dá se tato vlastnost skla vyjádřit *nelineárním disperzním vztahem*

$$v(\omega) = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega = \frac{c}{n(\omega)}k. \tag{1.3}$$

Z tohoto hlediska model struny z kapitol 1 a 2 představuje *nedisperzní prostředí*, v němž

$$\frac{\omega}{k} = v = \sqrt{\frac{T}{\varrho}} = konst. \tag{1.4}$$

a harmonické vlny s libovolnými frekvencemi se šíří touž fázovou rychlostí! Důsledkem pak je i šíření vlny libovolné formy beze změny tvaru fázovou rychlostí $v = \sqrt{T/\varrho}$. Disperzní křivka pro sklo je nelineární, pro ilustraci je na obr. 1.3 vynesena závislost indexu lomu na úhlové frekvenci v oboru viditelného světla (tzv. normální disperze).

Nejjednodušší *model disperzního prostředí*, který popisuje základní rysy disperze, vychází z elektronové teorie látek. Stačí k tomu sto let stará představa *J.J.Thomsona*, že elektrony v atomech se v klidu nacházejí v rovnovážných polohách a po vychýlení (vlivem srážek) vykonávají malé kmity a vyzařují se speciálními vlastními frekvencemi charakteristickými pro daný atom. Disperze světla, které dopadá na látku, pak vzniká jako odezva látky na dopadající elektromagnetickou vlnu.

Reakce látky je součtem (lineárních) reakcí jednotlivých elektronů. Elektron s vlastní frekvencí ω_0 pod vlivem elektromagnetického pole dopadající vlny o úhlové frekvenci $\omega < \omega_0$ má pohybovou rovnici

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} + m\omega^2\boldsymbol{r} = e\boldsymbol{E}\,(t) = e\boldsymbol{E}_{\,0}\cos\omega t \tag{1.5}$$

vynucených kmitů ($m \doteq 9,1.10^{-31}\,kg$, $e = -1,6.10^{-19}\,C$, magnetickou část Lorentzovy síly lze zanedbat — proč?). *Ustálené kmity* elektronu jsou dány partikulárním řešením

$$\boldsymbol{r}\,(t) = \frac{e}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\boldsymbol{E}_{\,0}\cos\omega t\,.$$

Lineární odezva látky vzniká součtem indukovaných elektrických dipólových momentů jednotlivých elektronů

$$\boldsymbol{p}\,(t) = e\boldsymbol{r}\,(t) = \frac{e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}\boldsymbol{E}\,(t)\,. \tag{1.6}$$

Výsledný vektor polarizace $\boldsymbol{P}\,(t)$ je dipólovým momentem objemové jednotky látky

$$\boldsymbol{P} = N\boldsymbol{p}\ , \tag{1.7}$$

kde N je počet elektronů (typu ω_0) v $1\,m^3$. Index lomu lze nyní vypočítat ze vztahu

$$\boldsymbol{D}\,(t) = \varepsilon_0\boldsymbol{E}\,(t) + \boldsymbol{P}\,(t) = \varepsilon\boldsymbol{E}\,(t)$$

dosazením (1.6), (1.7):

$$\varepsilon_0\left(1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}\right)\boldsymbol{E}\,(t) = \varepsilon\boldsymbol{E}\,(t)\,,$$

tedy

$$n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{1 + \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}}\ . \tag{1.8}$$

Graf této závislosti (obr.1.3) ukazuje, že frekvence ω_0 leží v ultrafialové oblasti. Vzorec (1.8) se dá zapsat pro elektrony více typů ω_k s hustotami N_k ve formě

$$n(\omega) = \sqrt{1 + \sum_k \frac{N_k e^2}{\varepsilon_0 m(\omega_k^2 - \omega^2)}}\ .$$

Pro látky s malou hustotou elektronů se vzorec (1.8) aproximuje podle $(1+x)^{1/2} \approx 1 + \frac{1}{2}x,\ x \ll 1$,

$$n(\omega) \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}\ . \tag{1.9}$$

V této formě jej naleznete v příkladech [**?**], kap. 4. Singularity vzorců při rezonančních frekvencích se dají odstranit v přesnějším popisu elektronu vyzařujícího s *radiačním útlumem* [**?**], kap. 9.

Šíření elektromagnetické vlny v disperzním prostředí se tedy řídí příslušným disperzním vztahem

$$\omega = \omega(k)\,.$$

Prostředí je pro tyto vlny *transparentní*. Podle disperzního vztahu však dobře definovanou fázovou rychlost $v = \omega(k)/k$ mají pouze monochromatické (harmonické) postupné vlny

$$\psi(z,\,t) = A\cos(\omega t - kz + \varphi)\,.$$

Všimněte si, že dosazení tohoto ψ do vlnové rovnice (**??**) vede díky rovnostem

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\omega^2\psi, \qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -k^2\psi \tag{1.10}$$

právě k disperznímu vztahu $\omega^2 = v^2k^2$.

1.2 Elektromagnetické vlny v plazmatu

Plazma, zvané též čtvrté skupenství hmoty, je ionizovaný plyn, tedy soustava volně se pohybujících elektronů a kladně nabitých iontů. Vzhledem k velkým hmotnostem iontů lze zkoumat pohyb elektronového podsystému. Abychom zjistili odezvu plazmatu na dopadající elektromagnetickou vlnu, vyjdeme (jako v odstavci 3.1) z pohybové rovnice jednoho elektronu

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} = e\boldsymbol{E}\,(t) = e\boldsymbol{E}_0 \cos \omega t\,.$$

Vidíme, že je to rovnice (1.5) pro $\omega_0 = 0$, takže můžeme převzít výsledek (1.8)

$$n(\omega) = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{1 - \frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m \omega^2}}\,, \tag{1.11}$$

kde N je počet elektronů v objemové jednotce plazmatu.

Pro šíření elekromagnetických vln v plazmatu je důležitá veličina

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{m\varepsilon_0}}$$

zvaná *plazmová frekvence.* Vztah (1.11) pak lze psát

$$\omega^2 n^2 = \omega^2 - \omega_p^2\,.$$

S využitím $n = c/v$ a $\omega/v = k$ dospějeme k *disperznímu vztahu pro plazma*

$$\boxed{\omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2} \tag{1.12}$$

Při $\omega > \omega_p$ je plazma *transparentním disperzním prostředím.* Jak se plazma chová k elektromagnetickým vlnám s úhlovými frekvencemi $\omega < \omega_p$? K tomu nejprve pomocí (1.10) zapíšeme vlnovou rovnici pro plazma, která pro harmonické vlny vede právě na disperzní vztah (1.12):

$$-\omega^2\psi = -\omega_p^2\psi - c^2k^2\psi \overset{(1.10)}{\Longrightarrow} \boxed{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = -\omega_p^2\psi + c^2\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}}. \tag{1.13}$$

Zkoumejme řešení (1.13) jako ustálené vynucené kmity, tj. položme

$$\psi(z,\,t) = X(z)\cos(\omega t + \varphi)\,. \tag{1.14}$$

Po dosazení (1.14) do (1.13) dostaneme obyčejnou diferenciální rovnici pro $X(z)$,

$$X'' + \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} X = 0\,. \tag{1.15}$$

Při jejím řešení musíme rozlišovat dva případy, které se od sebe kvalitativně liší:

1. $\omega > \omega_p$, $\quad X'' + k^2 X = 0, \quad \omega^2 = \omega_p^2 + c^2 k^2$,
2. $\omega < \omega_p$, $\quad X'' - \kappa^2 X = 0, \quad \omega^2 = \omega_p^2 - c^2 \kappa^2$.

Rozbor druhého případu dává odpověď na chování prostředí při $\omega < \omega_p$. Na rozdíl od fundamentálního systému $\{e^{ikz}, e^{-ikz}\}$, který vede na netlumené kmity v transparentním případě, máme ve druhém případě fundamentální systém $\{e^{\kappa z}, e^{-\kappa z}\}$ vyjadřující útlum vln s frekvencemi $\omega < \omega_p$. Prostředí pak nazýváme *reaktivní.*

Zaujímá-li prostředí např. poloprostor $z \geq 0$, bude mít řešení při $\omega < \omega_p$ formu ustálených vynucených kmitů

$$\psi(z, t) = A e^{-\kappa z} \cos(\omega t + \varphi), \qquad z \in \langle 0, +\infty), \tag{1.16}$$

jejichž amplituda $A e^{-\kappa z}$ s rostoucím z exponenciálně klesá. Rychlost zeslabení charakterizujeme *hloubkou pronikání* $\delta = 1/\kappa$. Pro každou frekvenci $\omega < \omega_p$ se konstanta útlumu určí z disperzního vztahu (1.12). Zde je na místě zdůraznit, že útlum kmitů v prostředí není způsoben disipací energie, ale neschopností prostředí přenášet vlny s frekvencemi $\omega < \omega_p$.

Případy 1. a 2. tedy odpovídají transparentní a reaktivní oblasti. Velice důležitou praktickou aplikací těchto poznatků je *šíření elektromagnetických vln v ionosféře.* Plazmová frekvence není konstantní, ale je různá podle denních a ročních období, kdy se vlivem slunečního záření mění počet elektronů N v objemové jednotce. Udávají se hodnoty $\nu_p = \omega_p/2\pi$ v rozmezí od 10 do 30 MHz. Televizní stanice a radiové stanice v oblasti frekvenčně modulovaných (tj. velmi krátkých) vln pracují na frekvencích řádu 100 MHz a vyšších, ionosféra je pro ně tedy transparentní. Pro nízké frekvence řádu 1 MHz, na kterých pracují rozhlasové stanice s amplitudovou modulací (pásma dlouhých, středních a krátkých vln), je ionosféra reaktivním prostředím a odráží tyto vlny zpět k Zemi.

1.3 Řetízek atomů jako reaktivní prostředí

Pro řetízek atomů jsme si odvodili disperzní vztah (**??**)

$$\omega = \omega_{max} \sin \frac{ka}{2}, \qquad \omega_{max} = 2\sqrt{\frac{K}{M}}.$$

Z průběhu této závislosti v intervalu $0 \leq \frac{ka}{2} \leq \frac{\pi}{2}$ je patrné, že řetízek je transparentní jen pro úhlové frekvence od 0 do ω_{max}. Jak se řetízek chová při $\omega > \omega_{max}$?

Vodítkem nám bude řešení (1.16) v odstavci 3.2, které ve spojitém případě exponenciálně klesá směrem do prostředí. Odpovídá tomu fyzikální představa, že následující atomy při kmitech o vysokých frekvencích již nestačí sledovat pohyb předcházejících atomů a amplitudy výchylek klesají s rostoucím n. Exponenciální pokles dává v diskretním případě předpokládaný tvar ustálených vynucených kmitů[1]

$$\psi_n(t) = A(-1)^n e^{-\kappa n a} \cos(\omega t + \varphi). \tag{1.17}$$

[1]Faktor $(-1)^n$ zaručuje stejná limitní řešení při $\omega \to \omega_{max}+$ a $\omega \to \omega_{max}-$.

Dosazením (1.17) do pohybových rovnic řetízku

$$M\ddot{\psi}_n = K(\psi_{n+1} - 2\psi_n + \psi_{n-1})$$

dostaneme

$$-M\omega^2\psi_n = K(-\mathrm{e}^{-\kappa a} - 2 - \mathrm{e}^{\kappa a})\,\psi_n\,,$$

odkud plyne *disperzní vztah v reaktivní oblasti* $\omega > \omega_{max}$,

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}}\left(\mathrm{e}^{\frac{\kappa a}{2}} + \mathrm{e}^{-\frac{\kappa a}{2}}\right) = \omega_{max}\cosh\frac{\kappa a}{2}\,. \tag{1.18}$$

Kdykoliv v prostředí nastává exponenciální útlum a přitom nikoli v důsledku tření a přeměny energie v teplo, nazýváme prostředí *reaktivní.* Do reaktivního prostředí $0 \le z < +\infty$ energie neproudí, vlna dopadající z oblasti $-\infty < z \le 0$ se odráží. V optice analogická situace nastává při *totálním odrazu.* Má-li však reaktivní prostředí konečnou tloušťku L, odraz není totální, nýbrž částečný: vlna projde se zeslabenou amplitudou $A\mathrm{e}^{-\kappa L}$. V kvantové fyzice se tento vlnový jev nazývá průnik potenciálovou bariérou (tunelový jev) a vysvětluje se jím například radioaktivita α.

1.4 Vlnové balíky

Kvaziharmonické kmity, kvazimonochromatické vlny a vlnové balíky. Vztah mezi šířkou vlnového balíku a šířkou jeho spektra.

Skutečné kmity oscilujících soustav se málokdy blíží ideálnímu čistě harmonickému průběhu

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \delta)\,, \qquad -\infty < t < +\infty\,. \tag{1.19}$$

V některých případech a zvláště v optice je užitečný pojem *kvaziharmonických kmitů,* které se v dostatečně dlouhých časových úsecích $\tau \gg T_0$ velmi málo odlišují od harmonického průběhu (1.19) Znamená to, že v časovém intervalu délky τ zůstávají parametry A, ω_0, δ prakticky konstantní.

Důležitým příkladem jsou kmity elektronu v Thomsonově modelu atomu. Elektron s vlastní frekvencí ω_0, rozkmitaný v čase $t = 0$ srážkou atomů, vykonává velmi slabě tlumené kmity, neboť ztrácí energii vyzařováním elektromagnetických vln (viz odd. 6.5 a [**?**], kap. 9). Jako jednorozměrný model nám poslouží struna natažená od $z = 0$ do $+\infty$, která má na počátku $z = 0$ připojený harmonický oscilátor. Je-li v čase $t = 0$ oscilátor vychýlen, $x(0) = A$, $\dot{x}(0) = 0$, začne kmitat. Protože však ztrácí energii tím, jak koná na struně práci, budou jeho kmity tlumené. (Zkuste odvodit průměrné tlumení metodou [**?**], úloha 9.10 !)

Za předpokladu velmi slabého útlumu bude oscilátor vykonávat kvaziharmonické kmity

$$x(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0 \\ A\mathrm{e}^{-\frac{t}{2\tau}}\cos\omega_0 t & \text{pro } t \ge 0 \end{cases}\,, \tag{1.20}$$

Obrázek 1.4: Časový průběh velmi slabě tlumených kmitů, $T_0 \ll \tau$

Obrázek 1.5: Prostorový průběh kvazimonochromatické vlny

neboť $\tau \gg T_0 = 2\pi/\omega_0$ (obr. 1.4). Energie oscilátoru klesá též exponenciálně s časovou konstantou τ:

$$E(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t < 0 \\ E(0)\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} & \text{pro } t \geq 0 \end{cases} . \tag{1.21}$$

V důsledku rozkmitání počátku struny $\psi(0,\, t) = x(t)$ podle (1.20) vzniká na struně, jak víme z kapitoly 2, postupná vlna

$$\psi(z,\, t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } z > vt \\ A\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\tau}(t-\frac{z}{v})}\cos(\omega_0 t - k_0 z) & \text{pro } z \leq vt \end{cases} \tag{1.22}$$

postupující ve kladném směru $+z$ s fázovou rychlostí $v = \omega_0/k_0 = \sqrt{T/\varrho}$. Při $\tau \to +\infty$ by (1.22) byla harmonická postupná vlna. Pro $\tau \gg T_0$ se přidržíme názvosloví z optiky a budeme mluvit o *kvazimonochromatické postupné vlně.* Tato vlna má v některém časovém okamžiku $t_1 > 0$ *čelo* v místě $z = vt_1$.

Na prostorovém grafu vlny (obr. 1.5) je kvazimonochromatičnost vyjádřena podmínkou $v\tau \gg vt_0 = \lambda_0$. Pro kmitající elektron byla z Maxwellových rovnic odvozena časová konstanta radiačního útlumu energie $\tau \approx 10^{-8}\, s$. Během tohoto, z našeho hlediska velmi krátkého časového intervalu, optické záření vykoná řádově 10^7 kmitů s periodou $T_0 \approx 10^{-15}\, s$. V prostorovém průběhu se na vzdálenosti $c\tau \approx 3\, m$ vejde řádově 10^7 vlnových délek viditelného světla ($400 -- 800\, nm$).

Vlna vyzářená elektronem má další důležitou vlastnost: za krátký časový interval, řekněme $10\tau \approx 10^{-7}$s se rychle utlumí na zanedbatelný zlomek $\mathrm{e}^{-5} \doteq 1/150$ počáteční amplitudy. V prostoru je odpovídající vzdálenost $10c\tau \doteq 30\, m$. Vlna je tedy v prostorovém i časovém průběhu ohraničená. Taková vlna se nazývá *vlnový balík.* Vlnový balík vyzářený elektronem je kvazimonochromatický.

Kvazimonochromatický vlnový balík lze získat jako *spojitou superpozici* monochromatických vln ($\omega = vk$)

$$\psi(z,\, t) = \int_0^{+\infty} B(\omega)\cos(\omega t - kz + \delta(\omega))\mathrm{d}\omega\ . \tag{1.23}$$

Ukážeme si to na velmi jednoduchém příkladě (viz obr. 1.6, 1.7 a [?], př. 4.11), v němž volíme

$$\delta(\omega) = 0, \qquad B(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pro } \omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2} \leq \omega \leq \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \\ 0 & \text{pro ostatní } \omega \end{cases} . \tag{1.24}$$

Obrázek 1.6: Spektrum signálu

Obrázek 1.7: Časový průběh signálu se spektrem z obr. 1.6

Uvidíme, že za předpokladu, že *šířka spektra* $\Delta\omega$ je malá vůči *dominantní frekvenci* ω_0, $\Delta\omega \ll \omega_0$ bude $\psi(z, t)$ opět kvazimonochromatický vlnový balík!

Integrál (1.23) s použitím (1.24) a označením $t' = t - (z/v)$ se snadno postupně upraví

na výsledný tvar

$$\psi(z,\, t) = \frac{1}{t'} 2 \sin\left(\frac{\Delta\omega}{2} t'\right) \cos(\omega_0 t - kz)\,. \tag{1.25}$$

Výsledkem je *amplitudově modulovaná vlna* s *nosnou vlnou* o vlnové délce λ_0. Časový průběh signálu v místě $z = 0$ (obr. 1.7)

$$\psi(0,\, t) = \Delta\omega \frac{\sin \frac{\Delta\omega}{2} t}{\frac{\Delta\omega}{2} t} \cos \omega_0 t \tag{1.26}$$

má amplitudovou modulaci typu $\sin x/x$. Pro určení *šířky signálu* jsou směrodatné body $x_{1,2} = \frac{\Delta\omega}{2} t_{1,\,2} = \pm\pi$, kde modulační funkce poprvé prochází nulou. Zvolíme-li za míru šířky signálu $\Delta t = t_1$, platí

$$\boxed{\Delta\omega \Delta t \approx 2\pi.} \tag{1.27}$$

Podobný vztah mezi šířkou signálu a šířkou jeho spektra lze odvodit i pro prostorový průběh signálu (v čase $t = 0$)

$$\psi(z,\, 0) = v\Delta k \frac{\sin \frac{\Delta k}{2} z}{\frac{\Delta k}{2} z} \cos k_0 z\,, \tag{1.28}$$

kde jsme označili $\Delta k = \Delta\omega/v$. Stejná definice šířky signálu $\Delta z = z_1$, kde $\frac{\Delta k}{2} z_1 = \pi$, dává

$$\boxed{\Delta k \Delta z \approx 2\pi.} \tag{1.29}$$

Vztahy (1.27) a (1.29) vyjadřují *univerzální vlastnost* kvazimonochromatických vlnových balíků: čím jsou rozměry balíků menší, tím je jeho spektrum frekvencí širší a naopak. Tuto důležitou vlastnost musíme bezpodmínečně brát v úvahu při návrzích soustav, které přenášejí signál nesoucí informace. Aby nedošlo k neopravitelnému zkreslení, musí přenosová soustava být schopna přenést celé spektrum o šířce $\Delta\omega$.

Vraťme se ještě k příkladu na začátku tohoto oddílu, kde je časová šířka vlnového balíku $\Delta t \approx \tau$. Ze vztahu (1.27) zde vyplývá, že hlavní spektrální příspěvky ke kvaziharmonickému signálu $x(t)$ pocházejí ze spojitého pásma frekvencí o šířce $\Delta\omega \approx 2\pi/\tau$ kolem dominantní frekvence ω_0. (Porovnejte s výsledky příkladů 4.9 — 4.13 v [**?**], kap.4).

1.5 Fourierova transformace

Fourierova transformace přímá a inverzní. Parsevalova rovnost a její fyzikální obsah.

V oddílu 3.4 jsme vlnový balík vyjádřili ve formě 'spojité superpozice' (1.23) monochromatických vln. V místě $z = 0$ je příspěvek od intervalu frekvencí $(\omega,\, \omega + \mathrm{d}\omega)$ dán výrazem $A(\omega)\cos(\omega t + \delta(\omega))\mathrm{d}\omega$, který představuje *spektrální složku* balíku. Vidíme, že $A(\omega)$ je amplituda vztažená na jednotkový interval frekvencí.

Matematickým vyjádřením přechodu od signálu $x(t)$ k jeho spektrálním složkám a naopak jsou vzorce *Fourierovy transformace*

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \int_0^\infty A(\omega)\cos(\omega t + \delta(\omega))\,\mathrm{d}\omega = \\
&= \int_0^\infty \Big[a(\omega)\cos(\omega t) + b(\omega)\sin(\omega t)\Big]\,\mathrm{d}\omega
\end{aligned}
\tag{1.30}
$$

a

$$
\begin{aligned}
a(\omega) &= A(\omega)\cos\delta(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t\,, \\
b(\omega) &= -A(\omega)\sin\delta(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}
\tag{1.31}
$$

Formule (1.30) a (1.5) udávají inverzní a přímou Fourierovu transformaci. Všimněte si podobnosti se vzorci oddílu 1.2.3 pro Fourierovy řady. Rozdíl je v tom, že Fourierovy řady jsou definovány pouze pro *periodické* funkce, zatímco Fourierovu transformaci lze použít pro obecné *neperiodické* signály $x(t)$, $-\infty < t < +\infty$.

Vzorce Fourierovy transformace mají elegantní jednoduchou formu, vyjádříme-li kosinus a sinus pomocí Eulerových vztahů. Nejprve upravíme

$$
a(\omega)\cos(\omega t) + b(\omega)\sin(\omega t) = c(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t} + \overline{c(\omega)}\mathrm{e}^{-i\omega t}\,,
\tag{1.32}
$$

kde

$$
c(\omega) = \frac{1}{2}\Big[a(\omega) - ib(\omega)\Big].
\tag{1.33}
$$

Ze vzorců (1.5) plyne, že $a(\omega)$ je sudou funkcí ω, $b(\omega)$ lichou funkcí ω. To nám dovolí formálně rozšířit definiční obor funkce $c(\omega)$ do záporných hodnot ω vztahem

$$
c(-\omega) = \overline{c(\omega)}
\tag{1.34}
$$

Inverzní Fourierova transformace (1.30) se upraví pomocí (1.32) a (1.34) a po substituci $\omega' = -\omega$ ve druhém integrálu

dostaneme výsledný vzorec pro *inverzní Fourierovu transformaci* $c(\omega) \mapsto x(t)$

$$
\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}\mathrm{d}\omega.}
\tag{1.35}
$$

Vzorce (ref3*.13) *přímé Fourierovy transformace* $x(t) \mapsto c(\omega)$ se spojí pomocí (1.33)

$$c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)(\cos \omega t - i \sin \omega t) \mathrm{d}t$$

na výsledný vzorec [2]

$$\boxed{c(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \mathrm{e}^{-i\omega t} \mathrm{d}t} \tag{1.36}$$

Pro spektrální rozklad energetických veličin (intenzit) má velký význam *Parsevalova rovnost*

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \Big[x(t)\Big]^2 \mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) \mathrm{e}^{i\omega t} \mathrm{d}\omega \right) \mathrm{d}t = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \mathrm{e}^{i\omega t} \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}\omega = \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} c(\omega) c(-\omega) \mathrm{d}\omega = \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |c(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega.
\end{aligned} \tag{1.37}$$

Vyjadřuje celkovou energii signálu jako superpozici příspěvků k intenzitě od jednotlivých spektrálních složek. (Z matematického hlediska vztah (1.5) říká, že kvadraticky integrabilní signál $x(t)$ má kvadraticky integrabilní spektrum $c(\omega)$.)

1.6 Šíření vlnového balíku v disperzním prostředí

Dva hlavní efekty: grupová rychlost a rozplývání grupového balíku.
Přenos informace modulovanou vlnou.

Zkoumejme řešení kvazimonochromatického vlnového balíku (1.23) (bez újmy na obecnosti s $\delta(\omega) = 0$) v disperzním prostředí $\omega = \omega(k)$.

Vlnový balík (1.23) můžeme (po substituci $\omega = \omega(k)$) vyjádřit jako integrál přes k,

$$\psi(z,\, t) = \int_0^{\infty} B(k) \cos(\omega(k)t - kz) \, \mathrm{d}k \,.$$

Pro další úpravy je užitečný komplexní zápis ($\psi = \mathrm{Re}\, \hat{\psi}$)

$$\hat{\psi}(z,\, t) = \int_0^{\infty} B(k) \mathrm{e}^{i(\omega(k)t - kz)} \mathrm{d}k. \tag{1.38}$$

---

[2]Vzorce (1.35), (1.36) Fourierovy transformace se obvykle zapisují v symetrickém tvaru

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \mathrm{e}^{i\omega t} \mathrm{d}\omega \,, \\
X(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \mathrm{e}^{-i\omega t} \mathrm{d}t \,,
\end{aligned}$$

který dostaneme, položíme-li $X(\omega) = \sqrt{2\pi} c(\omega)$.

Obrázek 1.8: Disperzní vztah prostředí a spektrum kvazimonochromatického vlnového balíku

Vzhledem k tomu, že spektrum signálu je podle obr.1.8 soustředěno v úzké oblasti šířky $\Delta k \ll k_0$ kolem dominantního vlnového čísla k_0, můžeme disperzní vztah s dobrou přesností vyjádřit Taylorovým rozvojem v bodě k_0 do 2. řádu

$$\omega(k) \doteq \omega(k_0) + \omega'(k_0)(k-k_0) + \frac{1}{2}\omega''(k_0)(k-k_0)^2. \tag{1.39}$$

Signál (1.38) snadno upravíme dosazením (1.39) na tvar

$$\hat{\psi}(z,\, t) \doteq \mathrm{e}^{i(\omega(k_0)t-k_0z)} \int_0^\infty B(k)\mathrm{e}^{-i(k-k_0)[z-\omega'(k_0)t]}\mathrm{e}^{\frac{i}{2}\omega''(k_0)(k-k_0)^2 t}\mathrm{d}k\,. \tag{1.40}$$

Exponenciální faktor před integrálem představuje *nosnou vlnu* s dominantní frekvencí $\omega(k_0)$. Samotný signál představuje *modulaci amplitudy a fáze nosné vlny* a závisí na proměnných z, t v kombinaci $F(z-\omega'(k_0)t,\, t)$. Vlnový balík se tedy pohybuje jako celek $F(z-\omega'(k_0)t,\, .\,)$ *grupovou rychlostí*

$$\boxed{v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}(k_0)} \tag{1.41}$$

a mění přitom s časem svůj tvar $F(\,.\,,\, t)$. Nosná vlna má fázovou rychlost $v_0 = \omega(k_0)/k_0$, která obecně není rovna grupové rychlosti v_g.

Změna tvaru signálu s časem v praxi znamená jeho *zkreslení, deformaci* během přenosu disperzním prostředím. Následující velice hrubá úvaha ukazuje, že toto zkreslení má charakter *rozplývání vlnového balíku s časem.*

Je-li $(\Delta t)_0$ doba potřebná k vyslání balíku, pak jeho šířka právě po vyslání bude zřejmě $(\Delta z)_0 \approx v_g(\Delta t)_0$. Na počátku platí též vztah $(\Delta z)_0 \Delta k \approx 2\pi$. Abychom viděli, jak rychle se balík ψ bude v disperzním prostředí rozplývat, rozpůlíme jeho pásmo vlnových čísel $(k_0 - \frac{\Delta k}{2},\, k_0 + \frac{\Delta k}{2})$ na dva půlintervaly $(k_0 - \frac{\Delta k}{2},\, k_0)$ a $(k_0,\, k_0 + \frac{\Delta k}{2})$. Spektra v půlintervalech dávají dva signály ψ_-, ψ_+, jejichž součet je roven našemu ψ, $\psi_- + \psi_+ = \psi$. Signály $\psi_\pm$ mají rozdílná dominantní vlnová čísla $k_0 \pm \frac{\Delta k}{4}$ a tedy i různé grupové rychlosti

$$v_{g\pm} = \omega'(k_0 \pm \frac{\Delta k}{4}).$$

Na počátku se sice překrývaly, ale s časem se jejich středy budou vzdalovat úměrně rozdílu grupových rychlostí

$$\Delta v_g = |v_{g+} - v_{g-}| \doteq \frac{\mathrm{d}v_g}{\mathrm{d}k}(k_0)\frac{\Delta k}{2} = \omega''(k_0)\frac{\Delta k}{2}\,.$$

Proto i šířka balíku ψ poroste s časem přibližně podle vztahu

$$(\Delta z)_t \doteq (\Delta z)_0 + \Delta v_g t \doteq (\Delta z)_0 + \frac{1}{2}\omega''(k_0)\Delta k t > (\Delta z)_0 \,.$$

Pro rozplývání balíku je v této aproximaci rozhodující nenulovost druhé derivace $\omega''(k_0)$, stejně jako v integrálu (1.40).

Důležitým důsledkem efektu rozplývaní je korekce vztahů (1.27), (1.29) mezi šířkou signálu a šířkou jeho spektra na *nerovnosti*

$$(\Delta z)_t \Delta k \gtrsim 2\pi \,, \qquad (\Delta t)_t \Delta\omega \gtrsim 2\pi \,.$$

Druhá nerovnost vyplývá z první, neboť $\Delta\omega \approx \omega'(k_0)\Delta k = v_g \Delta k$ a dále $(\Delta z)_t \approx v_g(\Delta t)_t$, protože celý balík projde daným bodem rychlostí v_g za čas $(\Delta t)_t$.

Na závěr je nutná poznámka k některým případům tzv. anomální disperze ($n < 1$), jako např. v případě plazmatu s disperzním vztahem $\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2$. Snadná úvaha zde dává ([**?**], př. 4.4) nerovnosti $v > c$, $v_g < c$. Tato skutečnost, že fázová rychlost v může převýšit c, vyvolala obavy o příčinnost již brzy po vytvoření speciální teorie relativity. Problém byl značně diskutován kolem r. 1910 a posléze v r. 1914 vyřešen A. Sommerfeldem a L. Brillouinem (viz [**?**], str. 101) v tom smyslu, že ne každé řešení Maxwellových rovnic představuje signál schopný přenášet informace. Tak např. rovinná monochromatická vlna (s fázovou rychlostí $v > c$) homogenně vyplňující celý prostor není signálem přenášejícím informace. Naopak vlnový balík s prostorovou nehomogenitou je signálem, který přenáší informace grupovou rychlostí $v_g < c$.