Kapitola 1

Kmity soustav hmotných bodů

1.1 Netlumené malé kmity kolem stabilní rovnovážné polohy

Soustavy s jedním stupněm volnosti; linearita a princip superpozice. Mechanické soustavy s n stupni volnosti; pojem rovnovážné konfigurace; módy; normální souřadnice.

Soustavy s jedním stupněm volnosti Základem vlnových jevů jsou netlumené kmity především lineárních soustav. S kmity se setkáváme ve všech fyzikálních oborech. Namátkou uveďme molekulární spektra, elektrické kmitavé obvody, akustiku, vlny na vodě, seismické vlny. Zopakujme si nejprve několik příkladů netlumených kmitavých soustav s jedním stupněm volnosti.

Příklad 1. *Těleso na pružině.* Těleso o hmotnosti m, které se pohybuje pod vlivem pružiny o tuhosti k bez tření po vodorovné podložce, má pohybovou rovnici

$$m\ddot{x} = -kx, \tag{1.1}$$

kde x je výchylka tělesa z rovnovážné polohy.

Příklad 2. *Torzní kmity.* Těleso zavěšené na vlákně vykonává netlumené otáčivé torzní kmity podle pohybové rovnice

$$I\,\ddot{\varphi} = -\alpha\varphi, \tag{1.2}$$

kde φ je úhel otočení tělesa z rovnovážné polohy $\varphi = 0$, I je moment setrvačnosti tělesa vzhledem k ose otáčení a α je konstanta.

Obrázek 1.1: Těleso na pružině

Obrázek 1.2: Torzní kmity

Obrázek 1.3: LC-obvod

Příklad 3. *LC-obvod.* Podle II. Kirchhoffova zákona platí pro napětí na kondenzátoru a cívce rovnost

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -\frac{Q}{C}, \tag{1.3}$$

kde náboj na kondenzátoru $Q = CU = \int i\mathrm{d}t$. Zderivováním rovnice (1.3) podle času tedy dostaneme

$$L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{i}{C}. \tag{1.4}$$

Uvedené příklady vykazují matematickou zákonitost stejného typu, tzv. *matematickou analogii* úloh různé fyzikální podstaty. Všechny pohybové rovnice jsou typu obyčejné diferenciální rovnice, *lineární,* 2. řádu, s konstantními koeficienty:

$$\ddot{\psi} + 2\delta\dot{\psi} + \omega^2\psi = 0. \tag{1.5}$$

Nulová hodnota konstanty tlumení $\delta = 0$ vyjadřuje zanedbání odporu prostředí.

Význačnou vlastností řešení $\psi(t)$ lineární rovnice (1.5) je **princip superpozice:**

> *Jsou-li ψ_1, ψ_2 dvě řešení (1.5), je řešením i každá jejich lineární kombinace $c_1\psi_1 + c_2\psi_2$, kde c_1, c_2 jsou libovolné konstanty.*

Obecné řešení diferenciální rovnice

$$\boxed{\ddot{\psi} + \omega^2\psi = 0,} \tag{1.6}$$

tj. řešení závislé na 2 libovolných reálných konstantách, se obvykle zapisuje v jedné ze tří ekvivalentních forem

$$\begin{aligned} \psi(t) &= A\cos(\omega t + \varphi) && (1.7)\\ &= a\cos\omega t + b\sin\omega t && (1.8)\\ &= C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}. && (1.9) \end{aligned}$$

Mezi konstantami se snadno odvodí vztahy (odvoďte!):

$$A = \sqrt{a^2+b^2},\ \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \sin\varphi = -\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \tag{1.10}$$

Obrázek 1.4: Matematické kyvadlo

$$C_1 = \frac{a - ib}{2} = \bar{C}_2. \tag{1.11}$$

Konkrétní hodnoty dvojice libovolných integračních konstant se určují ze dvou počátečních podmínek, obvykle v čase $t = 0$:

$$\psi(0) = x_0 \tag{1.12}$$

$$\dot{\psi}(0) = v_0. \tag{1.13}$$

Cvičení. Vypočtěte A, φ pomocí x_0, v_0 !
Zopakujte si názvosloví:

$$\begin{array}{lllll} A & = & & & \text{amplituda kmitů} \\ \omega & = & & & \text{úhlová frekvence}\,[s^{-1}] \\ \nu & = & \omega/2\pi & = & \text{frekvence}\,[Hz] \\ T & = & 1/\nu & = & \text{perioda}\,[s] \\ \varphi & = & & & \text{fázová konstanta [bezrozměrná].} \end{array}$$

Všimněte si, že velikost $\omega^2 = k/m$ v Př. 1 může být slovy vyjádřena jako *vratná síla vztažená na jednotkové posunutí a jednotkovou hmotnost.*

Příklad 4. *Matematické kyvadlo.* Pohybová rovnice pro úhel ψ

$$Ml\ddot{\psi} = -Mg\sin\psi \tag{1.14}$$

je nelineární, ale pro malé výchylky $\psi << 1$ kolem rovnovážné polohy $\psi = 0$ může být rovnice linearizována, tj. přibližně nahrazena lineární rovnicí

$$\ddot{\psi} + \frac{g}{l}\psi = 0. \tag{1.15}$$

Matematická poznámka. Obyčejná diferenciální rovnice

$$\boxed{\ddot{x} + \omega^2 x = 0} \tag{1.16}$$

je lineární s konstantními koeficienty. Řešení diferenciálních rovnic tohoto typu vychází z vlastnosti funkce e^t,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^t = \mathrm{e}^t. \tag{1.17}$$

1. Předpokládaný tvar řešení

$$x(t) = \mathrm{e}^{\lambda t} \tag{1.18}$$

dosadíme do (1.16),

$$(\lambda^2 + \omega^2)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0. \tag{1.19}$$

2. Charakteristická rovnice
$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \tag{1.20}$$
má kořeny
$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega, \quad \omega > 0. \tag{1.21}$$

3. Získali jsme **fundamentální systém** lineárně nezávislých řešení rovnice (1.16)
$$\{\mathrm{e}^{i\omega t}, \mathrm{e}^{-i\omega t}\}. \tag{1.22}$$

4. Obecné řešení (závislé na 2 libovolných reálných konstantách) obdržíme pomocí principu superpozice
$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{i\omega t} + C_2\mathrm{e}^{-i\omega t}, \quad C_2 = \bar{C}_1. \tag{1.23}$$

Mechanické soustavy s n stupni volnosti. Budeme studovat netlumené kmity, které vznikají při malých výchylkách konservativní soustavy z její stabilní rovnovážné konfigurace.

Uvažujme tedy konservativní soustavu o n stupních volnosti, jejíž potenciál U je funkcí (kartézských) souřadnic $x_1, \ldots, x_n$. Pohybové rovnice soustavy zapíšeme ve tvaru
$$m_i\ddot{x}_i = F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \tag{1.24}$$
kde m_i jsou hmotnostní konstanty příslušné souřadnicím x_i. Soustava je podle definice v konfiguraci $x_{01}, \ldots, x_{0n}$ v *rovnováze,* jestliže síly na ni působící jsou v této *rovnovážné konfiguraci* rovny nule,
$$F_i|_{\text{rovn. konfig.}} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}(x_{01}, \ldots, x_{0n}) = 0. \tag{1.25}$$
To znamená, že v rovnovážné konfiguraci nabývá U stacionární (extremální) hodnoty. Rovnovážná konfigurace se nazývá *stabilní,* jestliže pohyb vlivem malé poruchy neopustí jisté okolí rovnovážné konfigurace (z nestabilní konfigurace se soustava při malém vychýlení vychyluje dále). Rovnováha je stabilní v těch stacionárních bodech potenciálu U, které odpovídají *lokálnímu ostrému minimu.* Při malých výchylkách z rovnovážné polohy potenciální energie roste a síla vrací systém do rovnovážné polohy. Pohyb vlivem malé poruchy pak nevyjde z malého okolí rovnovážné konfigurace soustavy. Není-li extrém ostrým minimem, existují směry výchylek, v nichž se potenciální energie nezvětšuje; v těchto směrech se soustava může při malé poruše neomezeně vzdalovat.

Jelikož chceme pohybové rovnice soustavy linearisovat v bezprostředním okolí rovnovážné konfigurace $x_{01}, \ldots, x_{0n}$, použijeme Taylorův rozvoj funkce U n proměnných kolem bodu $(x_{01}, \ldots, x_{0n})$ do 2. řádu včetně:
$$\begin{aligned} U(x_1, \ldots, x_n) &= U(x_{01}, \ldots, x_{0n}) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial U}{\partial x_i}(x_{01}, \ldots, x_{0n})(x_i - x_{0i}) + \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}(x_{01}, \ldots, x_{0n})(x_i - x_{0i})(x_j - x_{0j}) + \ldots, \end{aligned} \tag{1.26}$$

Zde člen lineární ve výchylkách $x_i - x_{0i}$ je podle (1.25) roven nule a nultý člen můžeme položit rovným nule (volba bodu nulového potenciálu). Při zanedbání členů od 3. řádu můžeme tedy potenciál přibližně zapsat jako kvadratickou formu

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} U_{ij} \xi_i \xi_j \tag{1.27}$$

v proměnných $\xi_i = x_i - x_{0i}$ s konstantními koeficienty

$$U_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}(x_{01}, \ldots, x_{0n}) = U_{ji}, \tag{1.28}$$

které tvoří *symetrickou matici* (U_{ij}). Podmínka minima znamená, že matice (U_{ij}) je *positivně definitní* (tj. příslušná kvadratická forma (1.27) je positivně definitní). Připomeňte si [**?**] též Sylvestrovo kriterium, podle něhož všechny rohové subdeterminanty musí být positivní !

Pohybové rovnice (1.24), (1.27) po substituci $x_i = \xi_i + x_{0i}$ mají tvar

$$m_i \ddot{\xi}_i + \sum_{j=1}^{n} U_{ij} \xi_j = 0,\ i = 1, \ldots, n. \tag{1.29}$$

Tato soustava obyčejných diferenciálních rovnic 2. řádu s konstantními koeficienty určuje malé kmity soustavy kolem rovnovážné polohy $\xi_1 = \ldots = \xi_n = 0$. Rovnice (1.29) mají řešení typu $e^{\lambda t}$ a v našem případě — bez tlumení — speciálně typu $\exp(\pm i\omega t)$ nebo $\cos(\omega t + \varphi)$.

Pro určení řešení postupem podle Matematické poznámky zapišme soustavu (1.29) v maticovém tvaru. Zavedeme–li konstantní matice

$$A = (m_i \delta_{ij}), \quad B = (U_{ij}) \tag{1.30}$$

a sloupcový vektor ξ, kde $\xi^T = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, lze soustavu (1.29) zapsat ve tvaru

$$A\ddot{\xi} + B\xi = 0 \tag{1.31}$$

(A, B jsou matice $n \times n$, symetrické a positivně definitní).

1. Hledejme řešení ve tvaru
$$\xi(t) = X \cos(\omega t + \varphi), \tag{1.32}$$
kde amplituda X je konstantní sloupcový vektor. V takovém řešení, které ve fyzice nese název **mód** (česky též *vid*) soustavy, *všechny části soustavy kmitají se stejnou frekvencí* ω *a ve fázi.*

2. Po dosazení (1.32) do soustavy (1.31) obdržíme homogenní systém
$$(-\omega^2 A + B)X = 0 \tag{1.33}$$

Obrázek 1.5: Módy vázaných oscilátorů (kyvadel):
a) Pro $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$, $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$ jsou výchylky kyvadel jsou stále shodné;
b) Pro $\varphi_1(0) = -\varphi_2(0)$, $\dot{\varphi}_1(0) = \dot{\varphi}_2(0) = 0$ se výchylky kyvadel liší jen znaménkem;
c) Při jiných počátečních podmínkách se módy superponují; při jakých počátečních podmínkách vzniká situace naznačená na grafu?

n lineárních rovnic pro určení n neznámých amplitud X_i. Tato rovnice má nenulové řešení, jen když

$$det(B - \omega^2 A) = |U_{ij} - \omega^2 m_i \delta_{ij}| = 0, \tag{1.34}$$

To je tzv. *sekulární rovnice* pro určení *vlastních frekvencí soustavy.* Jako algebraická rovnice n–tého stupně pro ω^2 má n kořenů $\omega_1^2, \ldots, \omega_n^2$. Všechny jsou positivní v důsledku positivní definitnosti matic A, B.

3. Dosadíme–li jednotlivé kořeny ω^2 do systému (1.33) a určíme (normalizovaná) řešení $X^{(k)}$, získáme *fundamentální systém* lineárně nezávislých řešení soustavy diferenciálních rovnic (1.31)

$$\{X^{(1)} \cos(\omega_1 t + \varphi_1), \ldots, X^{(n)} \cos(\omega_n t + \varphi_n)\}. \tag{1.35}$$

Vektory amplitud $X^{(k)}$ určují *tvary módů.*

4. Obecné řešení (závislé na $2n$ libovolných reálných konstantách) obdržíme pomocí principu superpozice

$$\xi(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k X^{(k)} \cos(\omega_k t + \varphi_k). \tag{1.36}$$

Další podrobnosti o řešení úlohy *současné diagonalizace dvojice symetrických matic A, B* naleznete např. v klasické učebnici [**?**]. Najdete tam vysvětlení, že kvadráty frekvencí módů ω_k^2 jsou vlastními čísly úlohy

$$BX = \omega^2 AX \tag{1.37}$$

a tvary módů $X^{(k)}$ jsou vlastními vektory této úlohy. Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou zde ortogonální vzhledem ke skalárnímu součinu

$$(X, Y)_A = \sum_{i,j=1}^{n} X_i A_{ij} Y_j = \sum_{i=1}^{n} m_i X_i Y_i \tag{1.38}$$

(viz [**?**], příklady 592 –594). Normu definovanou tímto skalárním součinem pak lze použít k normalizaci vlastních vektorů.

Systém normalizovaných vlastních vektorů $X^{(k)}$ představuje význačnou ortogonální bázi v R^n. Kartézské souřadnice v nových směrech $X^{(k)}$ se nazývají **normální souřadnice** η_k.

Lineární (A–ortogonální) transformace od souřadnic ξ_i ve standardní bázi k normálním souřadnicím η_k v bázi vlastních vektorů je

$$\xi = C\eta, \quad \text{kde} \quad C_{ij} = X_i^{(j)}. \tag{1.39}$$

Ověřte si (viz též [?]), že transformace C provádí současnou diagonalizaci matic A, B:

$$C^t AC = E, \quad C^t BC = \Lambda, \tag{1.40}$$

kde $\Lambda = \mathrm{diag}(\omega_1^2, \ldots, \omega_n^2)$. V důsledku transformačních vzorců (1.40) se pohybové rovnice (1.31) po vynásobení C^t zleva dají upravit na tvar

$$C^t(A\ddot{\xi} + B\xi) = C^t AC\ddot{\eta} + C^t BC\eta = \ddot{\eta} + \Lambda\eta = 0, \tag{1.41}$$

neboli

$$\boxed{\ddot{\eta}_k + \omega_k^2 \eta_k = 0.} \tag{1.42}$$

To znamená, že

> *v normálních souřadnicích se soustava jeví jako systém nezávislých harmonických oscilátorů.*

Shrnutí. *Kmitající soustava s n stupni volnosti má právě n módů. Je-li v soustavě vybuzen pouze jeden mód, např. k-tý s úhlovou frekvencí ω_k, pak všechny její stupně volnosti kmitají se stejnou frekvencí $\nu_k = \omega_k/2\pi$, ve fázi (rovnovážnými polohami procházejí současně) a tvar módu je dán poměrem amplitud jednotlivých stupňů volnosti. V daném módu na každý stupeň volnosti působí táž vratná síla na jednotkovou výchylku a jednotkovou hmotnost, rovná ω_k^2. Každá soustava o n stupních volnosti, která vykonává malé netlumené kmity kolem rovnovážné polohy, je ekvivalentní soustavě n nezávislých harmonických oscilátorů.*

1.2 Kmity struny

> *Odvození vlnové rovnice pro strunu. Stojaté vlny jako módy. Okrajové podmínky, vlastní funkce a vlastní frekvence. Počáteční podmínky a Fourierovy řady. Obecný pohyb struny.*

Vlnová rovnice pro strunu. Jestliže soustava obsahuje velmi mnoho pohyblivých částí (1 mol vzduchu obsahuje $N_A \approx 6.10^{23}$ molekul) a jestliže pohyb sousedících částí je téměř stejný, pak můžeme výchylky z rovnovážných poloh (x, y, z) popsat vektorovým polem

$$\boldsymbol{\psi}(x, y, z, t) = (\psi_x(x, y, z, t), \psi_y(x, y, z, t), \psi_z(x, y, z, t)),$$

jež je spojitou funkcí polohy a času. Vzhledem k jejímu interpolačnímu charakteru můžeme předpokládat, že je i dostatečně hladká (diferencovatelná). Vztah kmitů diskretní soustavy a její spojité aproximace budeme zkoumat v oddílu 1.3.

Obrázek 1.6: Struna

Obrázek 1.7: K odvození vlnové rovnice

Pro jednoduchost se omezíme na jednorozměrnou modelovou soustavu, *strunu.* Pod strunou rozumíme dostatečně tenké pružné vlákno, které klade zanedbatelný odpor vůči ohýbání. Strunu si znázorníme podle obr. 1.6 napjatou silou T v rovnovážné poloze podél osy z mezi body 0 a L. Budeme uvažovat pouze příčné výchylky $\psi(z,t)$ ve směru osy x. Nechť ϱ označuje konstantní lineární hustotu struny. Pak pohybová rovnice pro krátký úsek struny délky Δz mezi body z_1 a z_2 (viz obr. 1.7) se dostane z I. věty impulsové (zopakujte si ji!) [1]

$$\frac{\mathrm{d}P_x}{\mathrm{d}t} = F_x^{(e)} \overset{obr1.7}{=\!=\!=} F_{1x} + F_{2x} = -|\boldsymbol{F}_1| \sin\vartheta_1 + |\boldsymbol{F}_2| \sin\vartheta_2. \tag{1.43}$$

Abychom dospěli k výsledné příčné síle *lineární v* $\psi(z,t)$, budeme předpokládat, že výchylky jsou velmi malé, takže platí (srovnej [**?**], př. 1.1)

1. $|\boldsymbol{F}_1| = |\boldsymbol{F}_2| = T$,
2. $\vartheta_1, \vartheta_2 \ll 1$.

Potom $F_x^{(e)} \doteq -T\mathrm{tg}\vartheta_1 + T\mathrm{tg}\vartheta_2 = T\left[\frac{\partial\psi}{\partial z}(z_2,t) - \frac{\partial\psi}{\partial z}(z_1,t)\right]$ a pomocí Lagrangeovy věty $f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a), a < \xi < b$, dostaneme pravou stranu pohybové rovnice

$$F_x^{(e)} \doteq T\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}(z_0,t)\Delta z; \qquad z_1 < z_0 < z_2. \tag{1.44}$$

Levá strana pohybové rovnice je

$$\frac{\mathrm{d}P_x}{\mathrm{d}t} = \Delta m \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}(z_{CM},t) = \varrho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}(z_{CM},t)\Delta z, \tag{1.45}$$

kde z_{CM} je souřadnice těžiště (center of mass). Po vykrácení Δz provedeme limitu $z_2 \to z_1$, přičemž $z_{CM} \to z_1, z_0 \to z_1$. Nakonec píšeme z místo z_1:

$$\boxed{\varrho\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}(z,t) = T\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}(z,t).} \tag{1.46}$$

[1] *I. věta impulsová.* Pro soustavu hmotných bodů $m_\alpha,\ \alpha = 1,\ldots,N$ pod vlivem vnitřních sil (splňujících zákon akce a reakce) a vnějších sil $\boldsymbol{F}_\alpha^{(e)}$ je časová změna úhrnné hybnosti soustavy rovna výslednici vnějších sil $\boldsymbol{F}^{(e)} = \sum_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha^{(e)}$. Vzhledem k tomu, že $\boldsymbol{P} = \sum_\alpha m_\alpha \dot{\boldsymbol{r}}^\alpha$ lze jednoduše vyjádřit pomocí radiusvektoru těžiště $\boldsymbol{R} = 1/M \sum_\alpha m_\alpha \boldsymbol{r}^\alpha$, kde $M = \sum_\alpha m_\alpha$, jako $\boldsymbol{P} = M\dot{\boldsymbol{R}}$, můžeme I. větu impulsovou zapsat $M\ddot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{F}^{(e)}$.

Tato *vlnová rovnice pro strunu* je pohybovou rovnicí pro všechny *vnitřní body* struny $z \in (0, L)$. Musíme ji proto doplnit ještě *okrajovými podmínkami*, které vyjadřují tzv. *pevné konce*[2] :

$$\psi(0,t) = 0 = \psi(L,t), \quad t \in \boldsymbol{R}. \tag{1.48}$$

Stojaté vlny jako módy.

1. Při řešení vlnové rovnice (1.46) pomocí módů předpokládáme tvar řešení

$$\psi(z,t) = X(z)\cos(\omega t + \varphi). \tag{1.49}$$

Protože všechny body kmitají se stejnou frekvencí a procházejí současně rovnovážnou polohou, jedná se vlastně o **stojatou vlnu**.

2. Po dosazení (1.49) do (1.46) dostaneme

$$-\omega^2 \varrho X(z)\cos(\omega t + \varphi) = T X''(z)\cos(\omega t + \varphi)\ .$$

Vzhledem k tomu, že tato rovnice má platit pro všechna t, musí platit

$$X''(z) + k^2 X(z) = 0, \tag{1.50}$$

kde

$$k^2 = \frac{\varrho}{T}\omega^2. \tag{1.51}$$

Obyčejná diferenciální rovnice (1.50) v prostorové souřadnici z má přesně stejný tvar jako (1.6) v čase. Její obecné řešení má tedy tvar

$$X(z) = A\sin kz + B\cos kz, \tag{1.52}$$

kde k je kladné (odmocnina z k^2). Okrajové podmínky pro pevné konce dávají

$$\begin{aligned} X(0) = 0 \quad &\Rightarrow \quad B = 0\ , \\ X(L) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \sin kL = 0\ . \end{aligned}$$

Poslední rovnice je transcendentní a má nekonečně mnoho kořenů

$$k_m = \frac{m\pi}{L}\,, \quad m \in \mathrm{Z}; \tag{1.53}$$

---

[2]Okrajová podmínka pro tzv. *volný konec* vyjadřuje, že upevnění působí *nulovou příčnou silou* na strunu. Podle obr. 1.7 v bodě z_2 zákon akce a reakce dává

$$F_{2x} \doteq T\,\mathrm{tg}\vartheta_2 = T\frac{\partial\psi}{\partial z}(z_2,t) = 0.$$

Volný konec struny v bodě $z_2 = L$ tedy vyjádříme okrajovou podmínkou

$$\frac{\partial\psi}{\partial z}(L,t) = 0\ . \tag{1.47}$$

Obrázek 1.8: Stojaté vlny na struně s pevnými konci

poněvadž $k > 0$, vybíráme pouze kladné hodnoty $m = 1, 2 \ldots$. Příslušné *vlastní frekvence* obdržíme ze vztahu (1.51)

$$\omega_m = \sqrt{\frac{T}{\varrho}} k_m = m\sqrt{\frac{T}{\varrho}}\frac{\pi}{L} = m\omega_1, \tag{1.54}$$

$$\nu_m = \frac{m}{2L}\sqrt{\frac{T}{\varrho}} = m\nu_1, \qquad m = 1, 2 \ldots . \tag{1.55}$$

Vlastní frekvence struny jsou tedy celočíselnými násobky základní frekvence ν_1 základního tónu; ν_m pro $m > 1$ se nazývají vyšší harmonické (svrchní tóny). Příslušné *vlastní funkce*

$$X^{(m)}(z) = \sin k_m z = \sin m\pi\frac{z}{L}$$

jsou znázorněny na obr. 1.8. Určují tvar odpovídajícího módu. Jejich vlnové délky jsou $\lambda_1 = 2L, \lambda_2 = \frac{2L}{2}, \lambda_3 = \frac{2L}{3}, \ldots, \lambda_m = \frac{2L}{m} = \frac{\lambda_1}{m}, \ldots$ Veličina k, nazývaná *vlnové číslo*, je tedy s vlnovou délkou spojena vztahem $k = 2\pi/\lambda$. (Veličina $\sigma = 1/\lambda$ se nazývá *vlnočet.*) Závislost (1.51) úhlové frekvence na vlnovém čísle se nazývá *disperzní vztah*; pro strunu máme tedy

$$\omega = \sqrt{\frac{T}{\varrho}} k. \tag{1.56}$$

V kapitole 2 uvidíme, že podíl $\omega/k = \lambda\nu = v$ je roven tzv. *fázové rychlosti.*

3. Fundamentální systém řešení vlnové rovnice je nekonečný,

$$\{\sin(k_m z)\cos(\omega_m t + \varphi_m)\}_{m=1}^{\infty} \ .$$

4. Princip superpozice dává obecné řešení ve formě nekonečné řady

$$\psi(z,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(k_m z)\cos(\omega_m t + \varphi_m), \tag{1.57}$$

obsahující nekonečně mnoho konstant A_m, φ_m, které se mají určit z počátečních podmínek.

Počáteční podmínky a Fourierovy řady. Protože vlnová rovnice je lineární, obecný pohyb spojité struny upevněné na obou koncích je dán superpozicí (1.57) všech módů $m = 1, 2, \ldots$ s libovolnými amplitudami A_m a fázovými konstantami φ_m. Amplitudy a fázové konstanty lze určit z počátečních podmínek pro polohu a rychlost v čase $t = 0$:

$$\psi(z, 0) = f(z), \tag{1.58}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}(z, 0) = g(z), \tag{1.59}$$

Obrázek 1.9: Periodické prodloužení funkce $f(z)$

kde funkce $f(z),\ g(z)$ jsou předepsány na intervalu $\langle 0, L\rangle$, v souladu s okrajovými podmínkami. Dosazením obecného řešení (1.57) do počátečních podmínek dostaneme

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(k_m z)\cos\varphi_m = f(z), \tag{1.60}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m(-\omega_m)\sin(k_m z)\sin\varphi_m = g(z). \tag{1.61}$$

Levé strany rovnic (1.60), (1.61) představují *Fourierovy rozvoje* daných funkcí na pravé straně a naším úkolem je najít jejich *Fourierovy koeficienty* $A_m\cos\varphi_m$ resp. $-A_m\omega_m\sin\varphi_m$.

V matematice se dozvíte podmínky, za nichž rozvoje funkcí konvergují k rozvíjeným funkcím. Ve fyzice musí být funkce $f(z)$ dostatečně hladká, aby platilo odvození vlnové rovnice; v matematice je třída přípustných $f(z)$ mnohem širší.

Fourierův rozvoj na levé straně (1.60) je zřejmě periodickou funkcí z s periodou $\lambda_1 = 2L$. Také pravou stranu $f(z),\ 0 \le z \le L$, můžeme dodefinovat pro všechna z, abychom obdrželi periodickou funkci $F(z)$ (viz obr. 1.9). Máme tedy třídu všech periodických (hladkých) funkcí $F(z)$ s periodou $\lambda_1 = 2l$, které jsou nulové pro $z = 0, z = L$.

Fourierův rozvoj lze však psát pro ještě širší třídu funkcí, jestliže se vzdáme okrajových podmínek odpovídajících pevným koncům. Všechny 'rozumné' periodické funkce $F(z)$ s periodou λ_1, $F(z+\lambda_1) = F(z)$, lze rozvinout

$$\boxed{F(z) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos nk_1 z + b_n \sin nk_1 z\right),} \tag{1.62}$$

kde $k_1 = 2\pi/\lambda_1$. Přidané kosinové členy odpovídají kmitům s volnými konci. Hledání konstant a_n, b_n se nazývá *Fourierova analýza.* Používá se k ní relací ortogonality mezi vlastními funkcemi:

$$\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} \sin nk_1 z \sin mk_1 z \,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\left(\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} \cos(n-m)k_1 z\,\mathrm{d}z - \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1}\cos(n+m)k_1 z\,\mathrm{d}z\right) =$$
$$= \left\{\begin{array}{ll} 0, & n \neq m \\ \frac{1}{2}\lambda_1, & n = m \end{array}\right\} = \frac{1}{2}\lambda_1\delta_{mn}\ ,$$
$$\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} \cos nk_1 z \cos mk_1 z \,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\lambda_1\delta_{mn}\ ,$$
$$\int_{z_1}^{z_1+\lambda_1} \sin nk_1 z \cos mk_1 z\,\mathrm{d}z = \int_{z_1}^{z_1+\lambda_1}\left[\sin(n+m)k_1 z + \sin(n-m)k_1 z\right]\,\mathrm{d}z = 0\ .$$

Jednotlivé koeficienty vypočteme tak, že řadu (1.62) vynásobíme příslušnou vlastní funkcí a vyintegrujeme přes periodu λ_1 (vlastní funkce odpovídající a_0 je 1); dostaneme tak vztahy

$$\boxed{\begin{aligned} a_m &= \frac{2}{\lambda_1}\int\limits_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z)\cos mk_1 z \; \mathrm{d}z\,, \\ b_m &= \frac{2}{\lambda_1}\int\limits_{z_1}^{z_1+\lambda_1} F(z)\sin mk_1 z \; \mathrm{d}z\,. \end{aligned}} \tag{1.63}$$

Analogické vztahy lze samozřejmě psát pro Fourierovy řady periodické funkce času ($\omega = 2\pi/T$):

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right)\,,$$
$$a_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} F(t)\cos n\omega t \; \mathrm{d}t\,,$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_{t_1}^{t_1+T} F(t)\sin n\omega t \; \mathrm{d}t\,.$$

1.3 Příčné kmity řetízku atomů

Znalost řešení pohybu struny metodou stojatých vln (Fourierovou metodou) nám pomůže k vyřešení úlohy na určení kmitů nejjednodušší periodické struktury — jednorozměrného řetízku atomů. Vedle nového pohledu na spojitou strunu jako na limitní případ řetízku, má tato úloha zásadní důležitost v teorii pevných látek s krystalickou strukturou.

Zkoumejme tedy příčné kmity soustavy N hmotných bodů (všechny o hmotnosti M) spojených pružinkami (všechny o tuhosti K) podle obr. 1.10. V rovnovážné poloze je řetízek napjat silou $T = Ka$. Výchylky hmotných bodů ve směru osy x označíme ψ_n, $n = 1, 2, \ldots, N$. Při malých výchylkách můžeme sestavit lineární pohybovou rovnici pro n-tý hmotný bod postupem analogickým postupu u spojité struny.

Podle obr. 1.11 působí na n-tý hmotný bod pouze síly od sousedních atomů,

$$M\ddot{\psi}_n = F_x = F_{1x} + F_{2x} = -|\boldsymbol{F}_1|\sin\vartheta_1 + |\boldsymbol{F}_2|\sin\vartheta_2\,. \tag{1.64}$$

Aproximace malých výchylek $F_x \doteq T\mathrm{tg}\vartheta_2 - T\mathrm{tg}\vartheta_1$, pak vede na lineární pohybové rovnice

$$M\ddot{\psi}_n = T\frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{a} - T\frac{\psi_n - \psi_{n-1}}{a} \tag{1.65}$$

pro hmotné body $n = 1, 2, \ldots, N$. Pro krajní body musíme pohybové rovnice doplnit okrajovými podmínkami (pevné konce) $\psi_0(t) = 0 = \psi_{N+1}(t)$.

Pohybové rovnice řešíme metodou módů z oddílu 1.1, tj. hledáme módy soustavy

$$\psi_n(t) = X_n \cos(\omega t + \varphi)\,, \qquad n = 1, 2, \ldots, N\,. \tag{1.66}$$

Obrázek 1.10: Rovnovážná poloha řetízku N hmotných bodů

Obrázek 1.11: K odvození pohybové rovnice

Všimněte si, že index n odpovídá souřadnici z v $\psi(z,t)$ pro spojitou strunu. Dosazení módu (1.66) do (1.65) vede na soustavu N lineárních homogenních rovnic pro amplitudy X_n

$$-\omega^2 X_n = \frac{K}{M}(X_{n+1} - 2X_n + X_{n-1}) \ , \tag{1.67}$$

kde $X_0 = X_{N+1} = 0$. Nenulové řešení existuje jen v případě, že $\boldsymbol{X}$ je vlastním vektorem matice soustavy. Místo sestavení a řešení sekulární (charakteristické) rovnice ukážeme, že stojaté vlny $X(z) = A \sin kz + B \cos kz$ v bodech $z = na$, tj.

$$X_n = X(na) = A \sin kna + B \cos kna \tag{1.68}$$

řeší (1.67) pro nějaké ω. Stačí vypočítat

$$\begin{aligned} X_{n+1} + X_{n-1} = A\left[\sin(kna + ka) + \sin(kna - ka)\right] + B\left[\cos(kna + ka) + \cos(kna - ka)\right] = \\ = 2(A \sin kna + B \cos kna) \cos ka = 2X_n \cos ka \end{aligned}$$

a srovnat s (1.67) ve formě

$$X_{n+1} + X_{n-1} = X_n(2 - \frac{M}{K}\omega^2) \ .$$

Vidíme, že (1.68) je nenulovým řešením (1.67) za podmínky

$$2 \cos ka = 2 - \frac{M}{K}\omega^2 \ , \tag{1.69}$$

neboli

$$\omega^2 = 2\frac{K}{M}(1 - \cos ka) = 4\frac{K}{M}\sin^2\frac{ka}{2} \ . \tag{1.70}$$

Graf tohoto *nelineárního disperzního vztahu*

$$\boxed{\omega = 2\sqrt{\frac{K}{M}}\sin\frac{ka}{2}\,, \qquad 0 \le \frac{ka}{2} \le \frac{\pi}{2}} \tag{1.71}$$

je na obr. 1.12. Slouží k určení vlastních frekvencí ω_m řetízku pro hodnoty k_m, které vyplývají z okrajových podmínek:

$$\begin{aligned} X_0 = 0 \quad &\Rightarrow \quad B = 0 \\ X_{N+1} = 0 \quad &\Rightarrow \quad A \sin k(N+1)a = 0. \end{aligned} \tag{1.72}$$

Obrázek 1.12: Disperzní vztah pro řetízek atomů

Obrázek 1.13: Módy na řetízku atomů

Dostáváme tedy N vlnových čísel

$$k_m = \frac{m\,\pi}{(N+1)a}\ , \quad m = 1, \dots, N \tag{1.73}$$

Příslušné módy jsou zakresleny na obr.1.13. [3]

Obecné řešení je lineární superpozicí nalezených módů,

$$\psi_n(t) = \sum_{m=1}^{N} A_m \sin(k_m na) \cos(\omega_m t + \varphi_m), \tag{1.75}$$

s libovolnými konstantami A_m, φ_m.

Na závěr se vraťme ke *spojité limitě řetízku* $a \to 0$. Vzhledem k dané délce $L = (N+1)a$, lineární hustotě $\varrho = M/a$ a síle $T = Ka$ musí současně $a \to 0, N \to \infty$, $M \to 0, K \to \infty$. V této limitě můžeme disperzní vztah přibližně vyjádřit pomocí Taylorova rozvoje funkce sinus,

$$\omega = 2\sqrt{\frac{K}{M}} \sin\frac{ka}{2} = 2\sqrt{\frac{K}{M}} \left(\frac{ka}{2} - \frac{1}{3!}(\frac{ka}{2})^3 + \cdots\right) \doteq \sqrt{\frac{T}{a^2\varrho}} \left(ka - \frac{1}{24}(ka)^3 + \cdots\right). \tag{1.76}$$

V limitě $a \to 0$ tak zbývá jen první člen, který dává disperzní vztah pro spojitou strunu $\omega = \sqrt{T/\varrho}\ k$. Zanedbání členů vyššího řádu je u řetízku možné, když

$$ka \ll 1, \qquad \text{tj. když} \qquad \frac{\lambda}{2\pi} \gg a\ . \tag{1.77}$$

Spojitá limita je tedy dobrou aproximací pouze tehdy, když vlnové délky módů jsou dostatečně velké vůči vzdálenosti sousedních bodů a. Pak se ovšem výchylky sousedních bodů budou velmi málo lišit. Z těchto důvodů často mluvíme o dlouhovlnné limitě.

[3] Řešení pro $m = N+1$ je identicky nulové, tedy jako pro $m = 0$, pro vyšší hodnoty $m = N+2, \dots$ se — až na znamení výchylek — periodicky opakují módy $m = 1, 2, \dots, N$. Např. pro $m = N+1+l\ ,\ l = 1, \dots, N$,

$$X_n = \sin k_{N+1+l}na = \sin\left(\frac{ln\pi}{N+1} + n\pi\right) = (-1)^n \sin\frac{ln\pi}{N+1}\ . \tag{1.74}$$

Z jiného pohledu, tato vyšší vlnová čísla odpovídají půlvlnám kratším než je vzdálenost a. V oddíle 3.3 uvidíme, že při frekvencích $\omega > \omega_{max}$ se místo takových vln realizují kvalitativně zcela odlišná řešení.

Obrázek 1.14: Graf tlumených kmitů

1.4 Vynucené kmitání tlumených soustav pod vlivem harmonické budící síly

V tomto oddíle si nejprve zopakujeme základní vlastnosti pohybu tlumeného harmonického oscilátoru ([?], oddíl 2.2) Jeho pohybová rovnice

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} \tag{1.78}$$

má na pravé straně součet elastické síly a *síly viskózního tlumení*, která je úměrná rychlosti a míří proti směru pohybu.

Diferenciální rovnice (1.78) má tvar (1.5)

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0 \ , \tag{1.79}$$

kde $\omega_0^2 = k/m$ a parametr $\delta = h/2m > 0$ se nazývá *dekrement útlumu.* Řešení (1.78) hledáme ve tvaru $x(t) = \exp \lambda t$, který vede na charakteristickou rovnici

$$\lambda^2 + 2\delta\lambda + \omega_0^2 = 0 \ . \tag{1.80}$$

Podle hodnoty diskriminantu $\mathcal{D} = 4(\delta^2 - \omega_0^2)$, tedy podle velikosti útlumu, dostáváme tři typy řešení:

$\mathcal{D} = 4(\delta^2 - \omega_0^2)$	Útlum	Pohyb
< 0	slabý	periodický tlumený
$= 0$	kritický	aperiodický mezní
> 0	silný	aperiodický

Zapišme podrobně tvar řešení rovnice (1.79) pouze pro případ *slabého tlumení* $\delta < \omega_0$, který budeme potřebovat v dalších kapitolách. V tomto případě má charakteristická rovnice kořeny

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega \ , \qquad \text{kde} \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \ , \tag{1.81}$$

takže obecné řešení je dáno vztahy (odvoďte!)

$$x(t) = e^{-\delta t}\left(C_1 e^{i\omega t} + \overline{C}_1 e^{-i\omega t}\right) \tag{1.82}$$

nebo

$$x(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \alpha) \ . \tag{1.83}$$

Při slabém útlumu tedy oscilátor kmitá, ale amplituda kmitů exponenciálně klesá k nule (viz obr.1.14).

Mechanická energie oscilátoru se vlivem viskózního tlumení mění nevratně v teplo. Tuto ztrátu energie lze vyrovnávat dodáváním energie vnější *periodickou silou* $F_x(t) = F_0 \cos \Omega t$. Pohybová rovnice pro vynucené kmity má pak tvar

Obrázek 1.15: Ĭ. Amplituda $C(\Omega)$, II. Fázové posunutí $\Phi(\Omega)$ a) pro zanedbatelné tlumení, b) pro $\delta = 0,2\,\omega_0$, c) pro $\delta = 5\omega_0$.

Obrázek 1.16: Energie vynucených kmitů — skutečná vystředovaná energie a její Lorentzova aproximace (čerchovaně) pro $\delta = 0.2\,\omega_0$

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} + F_0 \cos \Omega t \ , \tag{1.84}$$

neboli

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = B \cos \Omega t \ , \tag{1.85}$$

kde $B = F_0/m$.

Obecné řešení závislé na dvou integračních konstantách je podle nauky o diferenciálních rovnicích superpozicí řešení $x_{hom}(t)$ rovnice s nulovou pravou stranou (1.79), tedy (1.82) nebo (1.83) a partikulárního řešení $x_{part}(t)$ rovnice (1.85),

$$x(t) = x_{hom}(t) + x_{part}(t) \ . \tag{1.86}$$

(Ověřte!)

Připomeňme, že partikulární řešení při speciálním tvaru pravé strany rovnice (1.85) lze snadno nalézt: do (1.85) dosaďte předpokládaný tvar řešení

$$x_{part}(t) = C(\Omega) \cos(\Omega t + \Phi(\Omega)) \tag{1.87}$$

a porovnáním koeficientů u $\cos \Omega t$ a $\sin \Omega t$ vypočítejte

$$C(\Omega) = \frac{B}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \ , \tag{1.88}$$

$$\mathrm{tg}\Phi(\Omega) = -\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} \ . \tag{1.89}$$

Závislost amplitudy C na budící úhlové frekvenci Ω dosahuje (při dosti slabém útlumu $\delta < \omega/\sqrt{2}$) při hodnotě $\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ *rezonančního maxima.*

Rezonanční křivka na obr.1.15.I je grafem závislosti $C(\Omega)$. Při $\Omega = 0$ (konstantní budící síla) má oscilátor statickou výchylku B/ω_0^2, při rezonanční frekvenci Ω_r kmitá s maximální amplitudou

$$C_m = \frac{B}{2\delta\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}} \ . \tag{1.90}$$

Viděli jsme, že obecné řešení (1.86) se skládá ze dvou částí (1.83) a (1.87)

$$x(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega t + \alpha) + C(\Omega) \cos(\Omega t + \Phi(\Omega)) \ . \tag{1.91}$$

V první části závisí na dvou integračních konstantách A, α, které se určí ze dvou počátečních podmínek. Všimněte si, že tato první část se časem exponenciálně utlumí, představuje tedy *přechodný jev.* Druhý člen, který přetrvává po odeznění přechodného jevu, se nazývá *ustálený (stacionární) děj.* Z průběhu fáze $\Phi(\Omega)$ (obr.1.15.II) je patrné, že fáze ustáleného děje je záporná, *vynucené kmity soustavy se zpožďují za kmity budící síly.*

Zajímavé je chování řešení (1.91) pro velmi slabé až zanedbatelné tlumení $\delta \ll \omega$. V tomto případě rezonanční křivka (obr.1.15.I.a) má velmi úzké a vysoké rezonanční maximum při $\Omega_r \approx \omega_0$ a fáze $\Phi(\Omega)$ se skokem mění z 0 na $-\pi$. Energie přechodného jevu exponenciálně klesá s časem

$$E_{hom}(t) = \frac{1}{2}m\dot{x}_{hom}^2 + \frac{1}{2}kx_{hom}^2 \approx \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 e^{-2\delta t} \tag{1.92}$$

s časovou konstantou $\tau = 1/(2\delta)$. Celková energie oscilátoru při ustáleném ději se periodicky mění s periodou $T = 2\pi/\Omega$ budící síly:

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}m\dot{x}_{part}^2 + \frac{1}{2}kx_{part}^2 = \\ &= \frac{1}{2}m\Omega^2 C^2 \sin^2(\Omega t + \Phi) + \frac{1}{2}m\omega_0^2 C^2 \cos^2(\Omega t + \Phi) \ . \end{aligned} \tag{1.93}$$

Tuto energii můžeme vystředovat přes periodu

$$\bar{E}_T = \frac{1}{2}m\frac{\Omega^2 + \omega_0^2}{2}C^2 \tag{1.94}$$

V *těsné blízkosti rezonance* lze průběh energie aproximovat jednodušší *Lorentzovou* (Breit-Wignerovou) *křivkou* (viz obr. 1.16 a [**?**], př. 4.13)

$$E \approx \frac{1}{8}\frac{mB^2}{(\Omega - \omega_0)^2 + (\frac{\Gamma}{4})^2} \ . \tag{1.95}$$

Zde $\Gamma = 2\delta$ značí šířku rezonanční křivky (1.95) v poloviční výšce $E_{max}/2$, kde

$$E_{max} = \frac{mB^2}{2\Gamma^2} \ .$$

(Ověřte!) [4]

Cvičení 1. Při ustáleném ději je veškerá energie dodávaná budící silou přeměňována viskózním tlumičem na teplo. Vypočítejte střední výkon $\bar{P}$ dodaný budící silou během jedné periody $T = 2\pi/\Omega$ a ukažte, že je roven střednímu výkonu spotřebovanému třením.

$$\left[\bar{P} = \frac{m\delta\Omega^2 B^2}{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}\right]$$

Cvičení 2. Ukažte, že při velmi slabém tlumení $\delta \ll \omega_0$ lze určit 'dobu života' τ soustavy ponechané bez vlivu budící síly z šířky Γ rezonanční křivky pro energii podle vztahu

[4] Ve skriptech [?] jste se zabývali *jinou aproximací.* Ta však není tak přesná.

$$\Gamma\tau \approx 1 \ .$$

Cvičení 3. Obvykle se zavádí *činitel jakosti (kvalita)* slabě tlumeného oscilátoru jako bezrozměrné číslo

$$Q = \frac{\omega_0 E}{\overline{P}} \ .$$

Ukažte, jak lze vlastnosti oscilátoru ω_0, Q určit z rezonanční křivky (1.93) pro energii. $\left[Q \approx \dfrac{\omega_0}{\Gamma} \right]$