Kapitola 1

Přesné statistiky

1.1 Maxwell-Boltzmannovo rozdělení

Uvažujme nejprve systém N klasických částic. Každá z nich se může nacházet na nějaké energetické hladině (mikrostavu) s energií ε_i. Soustava je v tepelné rovnováze s okolím o teplotě T. Označíme jako $n_i^{(\gamma)}$ počet částic s energií ε_i (obsazovací číslo). Celkový počet částic je N, takže platí

$$N = \sum_i n_i^{(\gamma)}.$$

Index γ označuje stav celého souboru (makrostav). Celková energie souboru ve stavu γ je

$$E_\gamma = \sum_i n_i^{(\gamma)} \varepsilon_i.$$

Statistické vlastnosti souboru N částic odvodíme z kanonické partiční sumy, která má tvar

$$Z_K = \sum_\gamma g_\gamma e^{-\beta E_\gamma},$$

kde g_γ je degenerace makrostavu γ. Pro rozlišitelné částice platí

$$g_\gamma = \frac{N!}{n_1^{(\gamma)}! \cdot n_2^{(\gamma)}! \cdot \ldots},$$

a kanonickou partiční sumu můžeme zapsat jako N-tou mocninu jednočásticové partiční sumy

$$\begin{aligned} Z_K &= \sum_{\substack{\left\{n_1^{(\gamma)}, n_2^{(\gamma)}, \ldots\right\} \\ \sum_i n_i^{(\gamma)} = N}} \frac{N!}{n_1^{(\gamma)}! \cdot n_2^{(\gamma)}! \cdot \ldots} e^{-\beta n_1^{(\gamma)} \varepsilon_1} \cdot e^{-\beta n_2^{(\gamma)} \varepsilon_2} \ldots \\ &= \left(e^{-\beta\varepsilon_1} + e^{-\beta\varepsilon_2} + \ldots\right)^N = \left(\sum_i e^{-\beta\varepsilon_i}\right)^N = z^N. \end{aligned}$$

Pro identické částice jsou ale degenerace makrostavů $g_\gamma = 1$ a kanonickou partiční sumu nedokážeme sečíst (s vyjímkou souborů s malým počtem částic). Problém představuje podmínka na pevný počet částic. Tu můžeme obejít přechodem ke grandkanonickému souboru. Navíc chyba, kterou tímto postupem uděláme, je pro velká N zanedbatelná - v termodynamické limitě jsou oba soubory ekvivalentní.

Určíme grandkanonickou partiční sumu pro soubor klasických částic. Nejprve přejdeme ke korigované statistice pro N částic. Předpokládejme, že počet možných energetických stavů je mnohem větší než počet částic (plyn je dostatečně řídký). Pokud bude teplota dostatečně vysoká, můžeme předpokládat, že v každém stavu je maximalně jedna částice, takže bude platit $n_i^{(\gamma)}! = 1$. V tom případě jsou degenerace makrostavů $g_\gamma = N!$, což je počet permutací N částic. V předchozím výpočtu jsme tedy partiční sumu nadhodnotili o $N!$. Abychom to napravili, sumu podělíme počtem permutací N částic. Tím dostaneme kanonickou partiční sumu ve tvaru

$$Z_K = \frac{1}{N!} z^N.$$

Grandkanonickou partiční sumu pak získáme standardním postupem

$$Z_{MB} = \sum_{N=0}^{+\infty} Z_K(N) e^{\alpha N} = \sum_{N=0}^{+\infty} \frac{1}{N!} \left(e^\alpha z\right)^N = \exp\left(e^\alpha z\right) = \exp\left(\sum_i e^{\alpha - \beta\varepsilon_i}\right) = \prod_i \exp\left(e^{\alpha-\beta\varepsilon_i}\right).$$

Vnitřní energie a střední počet částic se určí pomocí vztahů

$$U = -\left(\frac{\partial \ln Z_{MB}}{\partial \beta}\right)_\alpha, \quad N = \left(\frac{\partial \ln Z_{MB}}{\partial \alpha}\right)_\beta.$$

Protože partiční suma Z_{MB} má tvar součinu přes energetické hladiny, platí

$$N = \sum_i \langle n_i \rangle, \quad U = \sum_i \varepsilon_i \langle n_i \rangle,$$

kde $\langle n_i \rangle$ označuje střední počet částic na hladině ε_i. Pro soubor klasických částic se $\langle n_i \rangle$ řídí Maxwell-Boltzmannovým rozdělením (viz Příklad 1.2)

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_i - \alpha}} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}\right)}.$$

1.2 Bose-Einsteinovo rozdělení

Uvažujme nyní soubor identických bosonů. Obsazovací čísla můžou nabývat jakýchkoli hodnot, tj. $n_i^{(\gamma)} = 0, 1, 2, \ldots$. Grandkanonická partiční suma se pak dá přepsat do tvaru

$$Z_{BE} = \sum_\gamma \exp\left(\sum_i n_i^{(\gamma)} (\alpha - \beta\varepsilon_i)\right) = \prod_i \sum_{n_i=0}^{+\infty} e^{(\alpha-\beta\varepsilon_i) n_i} = \prod_i \frac{1}{1 - e^{\alpha-\beta\varepsilon_i}}.$$

Střední počet částic na dané energetické hladině se řídí Bose-Einsteinovým rozdělením (viz Příklad 1.2)

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_i - \alpha} - 1} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}\right) - 1}.$$

Uvažujme nyní ultrarelativistický bosonový plyn v nádobě tvaru krychle s délkou hrany L. Energie částice jsou

$$\varepsilon = pc = c\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2},$$

kde složky hybností nabývají hodnot

$$p_i = \frac{\pi\hbar l_i}{L}, \quad l_i \in \mathbb{N}_0.$$

Logaritmus partiční sumy můžeme zapsat ve tvaru

$$\ln Z_{BE} = -g \sum_{l_1,l_2,l_3} \ln\left(1 - e^{\alpha - \beta\varepsilon_l}\right),$$

kde faktor g označuje degeneraci energetických stavů kvůli spinu. V limitě dostatečně velkého objemu nahradíme sumu integrálem

$$\sum_{l_i} \longrightarrow \frac{L}{\pi\hbar} \int\limits_0^{+\infty} dp_i = \frac{L}{h} \int\limits_{\mathbb{R}} dp_i, \qquad \sum_{l_1,l_2,l_3} \longrightarrow \frac{V}{h^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} d^3p,$$

a pro logaritmus partiční sumy dostaneme vztah

$$\ln Z_{BE} = -g\frac{V}{h^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \ln\left(1 - e^{\alpha - \beta pc}\right) d^3p = -g\frac{4\pi V}{h^3} \int\limits_0^{+\infty} p^2 \ln\left(1 - e^{\alpha - \beta pc}\right) dp.$$

Přejdeme od hybnosti k energii

$$\ln Z_{BE} = -g\frac{4\pi V}{h^3c^3} \int\limits_0^{+\infty} \varepsilon^2 \ln\left(1 - e^{\alpha - \beta\varepsilon}\right) d\varepsilon. \tag{1.1}$$

Odtud určíme vnitřní energii plynu

$$U = -\left(\frac{\partial \ln Z_{BE}}{\partial \beta}\right)_\alpha = g\frac{4\pi V}{h^3c^3} \int\limits_0^{+\infty} \varepsilon^3 \frac{1}{e^{\beta\varepsilon - \alpha} - 1} d\varepsilon, \tag{1.2}$$

a střední počet částic

$$N = \left(\frac{\partial \ln Z_{BE}}{\partial \alpha}\right)_\beta = g\frac{4\pi V}{h^3c^3} \int\limits_0^{+\infty} \varepsilon^2 \frac{1}{e^{\beta\varepsilon - \alpha} - 1} d\varepsilon. \tag{1.3}$$

Uvedené vztahy můžeme přepsat do tvaru

$$U = g \int\limits_0^{+\infty} \varepsilon n(\varepsilon) D(\varepsilon) d\varepsilon, \qquad N = g \int\limits_0^{+\infty} n(\varepsilon) D(\varepsilon) d\varepsilon,$$

kde funkce $n(\varepsilon)$ je Boseho faktor (střední počet částic s energií ε)

$$n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon - \alpha} - 1},$$

a $D(\varepsilon)$ je hustota počtu stavů s danou energií; pro ultrarelativistký plyn platí

$$D(\varepsilon) = \frac{4\pi V}{h^3 c^3} \varepsilon^2 \tag{1.4}$$

Ze vztahu (1.1) vyjádříme grandkanonický potenciál

$$\Omega = -kT \ln Z_{BE} = kTg \frac{4\pi V}{h^3 c^3} \int\limits_0^{+\infty} \varepsilon^2 \ln\left(1 - e^{\alpha - \beta\varepsilon}\right) d\varepsilon.$$

Provedeme integraci per partes; okrajový člen vymizí a dostaneme výraz

$$\Omega = g \frac{4\pi V}{3h^3 c^3} \int\limits_0^{+\infty} \varepsilon^3 \frac{1}{e^{\beta\varepsilon - \alpha} - 1} d\varepsilon.$$

Porovnáním se vztahem pro vnitřní energii (1.2) zjistíme že platí identita

$$PV = \frac{1}{3} U,$$

podobně jako pro klasický ultrarelativistický plyn.

1.3 Fermi-Diracovo rozdělení

Pro fermiony (částice s poločíselným spinem) platí Pauliho vylučovací princip. Obsazovací čísla můžou nabývat pouze hodnot $n_i = 0, 1$. Partiční suma je pak rovna

$$Z_{\mathrm{FD}} = \prod_i \left(\sum_{n_i=0}^{1} e^{(\alpha - \beta\varepsilon_i) n_i} \right) = \prod_i \left(1 + e^{\alpha - \beta\varepsilon_i}\right).$$

Střední počet částic s energií $\langle n_i \rangle$ se řídí Fermi-Diracovým rozdělením (viz Příklad 1.2)

$$\langle n_i \rangle = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon_i - \alpha} + 1} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}\right) + 1}.$$

Uvažujme nyní nerelativistický fermionový plyn v krychli s hranou délky L. Energie částice jsou

$$\varepsilon = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2m}.$$

Složky hybností nabývají hodnot

$$p_i = \frac{\pi \hbar l_i}{L}, \quad l_i \in \mathbb{N}_0.$$

Dále můžeme postupovat stejně jako v pro bosonový plyn. Logaritmus partiční sumy

$$\ln Z_{FD} = g \sum_{l_1, l_2, l_3} \ln\left(1 + e^{\alpha - \beta\varepsilon_l}\right)$$

aproximujeme v limitě velkého objemu pomocí integrálu

$$\ln Z_{FD} = g\frac{V}{h^3} \int\limits_{\mathbb{R}^3} \ln\left(1 + e^{\alpha - \beta\varepsilon}\right) d^3p = g\frac{4\pi V}{h^3} \int\limits_0^{+\infty} p^2 \ln\left(1 + e^{\alpha - \beta\frac{p^2}{2m}}\right) dp.$$

Přejdeme od hybnosti k energii

$$\ln Z_{FD} = g\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}} \int\limits_0^{+\infty} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \ln\left(1 + e^{\alpha - \beta\varepsilon}\right) d\varepsilon. \tag{1.5}$$

Odtud vyjádříme vnitřní energii

$$U = -\left(\frac{\partial \ln Z_{FD}}{\partial \beta}\right)_\alpha = g\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}} \int\limits_0^{+\infty} \varepsilon^{\frac{3}{2}} \frac{1}{e^{\beta\varepsilon - \alpha} + 1} d\varepsilon, \tag{1.6}$$

a střední počet částic

$$N = \left(\frac{\partial \ln Z_{FD}}{\partial \alpha}\right)_\beta = g\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}} \int\limits_0^{+\infty} \varepsilon^{\frac{1}{2}} \frac{1}{e^{\beta\varepsilon - \alpha} + 1} d\varepsilon. \tag{1.7}$$

Tyto vztahy můžeme opět přepsat do tvaru

$$U = g \int\limits_0^{+\infty} \varepsilon n(\varepsilon) D(\varepsilon) d\varepsilon, \qquad N = g \int\limits_0^{+\infty} n(\varepsilon) D(\varepsilon) d\varepsilon,$$

kde $n(\varepsilon)$ je fermiho faktor (střední počet částic s energií ε)

$$n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}. \tag{1.8}$$

Hustota počtu stavů s energií ε je pro nerelativistický plyn rovna

$$D(\varepsilon) = \frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}\varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Ze vztahu (1.5) určíme grandkanonický potenciál fermionového plynu. Po integraci per partes dostaneme výraz

$$\Omega = -kT \ln Z_{FD} = \frac{2}{3} g \frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{e^{\beta\varepsilon-\alpha}+1} d\varepsilon.$$

Porovnáním se vztahem pro vnitřní energii (1.6) najdeme rovnost

$$PV = -\Omega = kT \ln Z_{FD} = \frac{2}{3}U. \tag{1.9}$$

Stejný vztah platí i pro klasický nerelativistický plyn.

1.4 Příklady

Příklad 1.1. Uvažujte systém dvou částic, každá může mít energii $\varepsilon_1 = 0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon$, $\varepsilon_3 = 3\varepsilon$. Určete partiční sumu souboru a jeho vnitřní energii, za předpokladu, že částice jsou

1. rozlišitelné
2. bosony se spinem nula
3. fermiony bez spinu

Návod:

Obsazovací čísla a degenerace jednotlivých makrostavů jsou shrnuty v následující tabulce.

γ	$n_1^{(\gamma)}$	$n_2^{(\gamma)}$	$n_3^{(\gamma)}$	E_γ	$g_\gamma^{(MB)}$	$g_\gamma^{(BE)}$	$g_\gamma^{(FD)}$
1	2	0	0	0	1	1	0
2	0	2	0	2ε	1	1	0
3	0	0	2	6ε	1	1	0
4	1	1	0	ε	2	1	1
5	1	0	1	3ε	2	1	1
6	0	1	1	6ε	2	1	1

Pro zjednodušení zápisu označíme $x = e^{-\beta\varepsilon}$. Vnitřní energie se pak určí podle vztahu

$$U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial \ln Z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \beta} = x\varepsilon \frac{\partial \ln Z}{\partial x}$$

V případě rozlišitelných částic je partiční suma

$$Z_{MB} = 1 + x^2 + x^6 + 2x + 2x^3 + 2x^4 = (1 + x + x^3)^2,$$

a vnitřní energie je tedy

$$U_{MB} = 2x\varepsilon \frac{1 + 3x^2}{1 + x + x^3}.$$

Pro bosony dostaneme vztahy

$$Z_{BE} = 1 + x^2 + x^6 + x + x^3 + x^4, \qquad U_{BE} = x\varepsilon \frac{1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 6x^5}{1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^6}.$$

Nakonec pro fermiony platí

$$Z_{FD} = x + x^3 + x^4, \qquad U_{FD} = 2\varepsilon \frac{1 + 3x^2 + 4x^3}{1 + x^2 + x^3}.$$

Průběh vnitřních energií je znázorněn v obr. 1.1. Pro konečnou kladnou teplotu platí nerovnosti

$$U_{BE} < U_{MB} < U_{FD}.$$

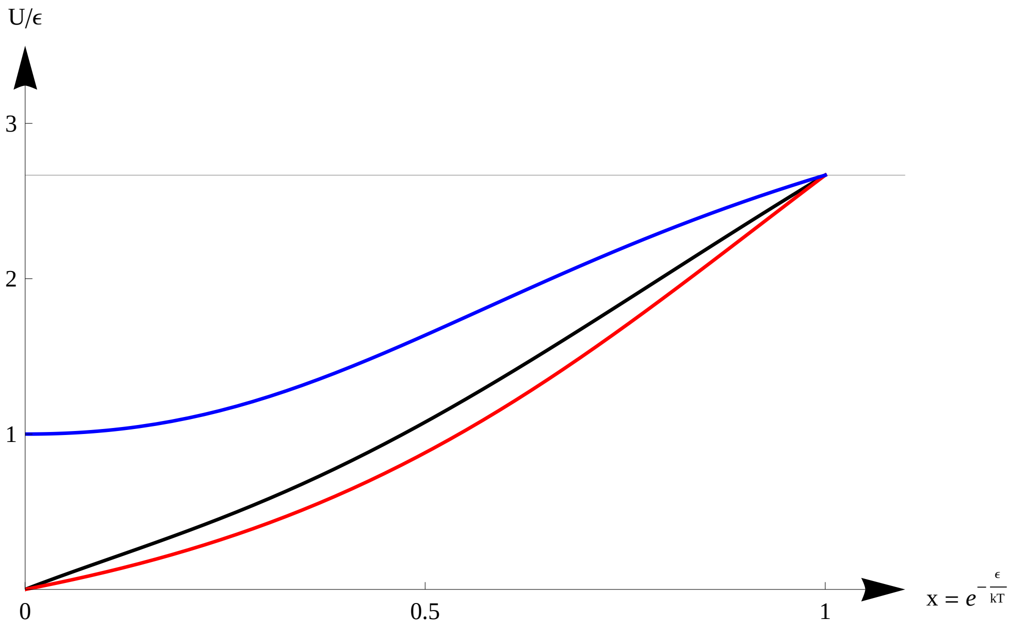
V limitě $T \to +\infty$ (odpovídá $x \to 1$) jsou vnitřní energie stejné a nabývají hodnoty $\frac{8}{3}\varepsilon$. Pro $T \to 0$ (odpovídá $x \to 0$) klesá vnitřní energie souboru rozlišitelných částic a bosonů k nule - při $T = 0$ jsou obě částice na nejnižší energetické hladině. Tomu v případě fermionů zabraňuje Pauliho vylučovací princip, takže i při $T = 0$ musí být jedna částice na první excitované hladině.

Příklad 1.2. Určete střední počet částic s energií ε_i pro soubor klasických částic, bosonů a fermionů.

Výsledek:

$$\begin{aligned}
\text{Maxwell-Boltzmann} \quad &: \quad \langle n_i \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}\right)}, \\
\text{Bose-Einstein} \quad &: \quad \langle n_i \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}\right) - 1}, \\
\text{Fermi-Dirac} \quad &: \quad \langle n_i \rangle = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}\right) + 1}.
\end{aligned}$$

Příklad 1.3. Fotonový plyn, záření absolutně černého tělesa
Určete spektrální rozdělení energie fotonového plynu (elektromagnetické záření v dutině, které je v tepelné rovnováze se stěnami nádoby) v závislosti na jeho teplotě. Čemu je rovna hustota energie? Jaká je celková vyzářená energie absolutně černého tělesa na jednotku plochy. Najděte hustotu počtu fotonů pro záření o teplotě T.



Obrázek 1.1: Vnitřní energie pro soubor 2 rozlišitelných částic (černá křivka) , bosonů (červená) a fermionů (modrá).

Návod: Fotonový plyn je ultrarelativistický bosonový plyn - klidová hmotnost fotonu je nula a jeho spin je 1. Navíc je jeho chemický potenciál roven nule, protože počet fotonů se nezachovává. Hustotu energie můžeme vyjádřit ze vztahu (1.2); integrál převedeme z energií do frekvencí

$$\frac{U}{V} = \frac{g}{V}\int_0^{+\infty} \varepsilon n(\varepsilon) D(\varepsilon) d\varepsilon = \int_0^{+\infty} \rho(\nu) d\nu.$$

Spektrální rozdělení energií $\rho(\nu)$ absolutně černého tělesa tak můžeme zapsat ve tvaru

$$\rho(\nu) = \frac{g}{V} n(\nu)\varepsilon(\nu)D(\nu).$$

Degenerace g je dva kvůli dvěma polarizacím. Vztah mezi energií fotonu a frekvencí je

$$\varepsilon = h\nu,$$

a pro boseho faktor dostaneme

$$n(\nu) = \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}.$$

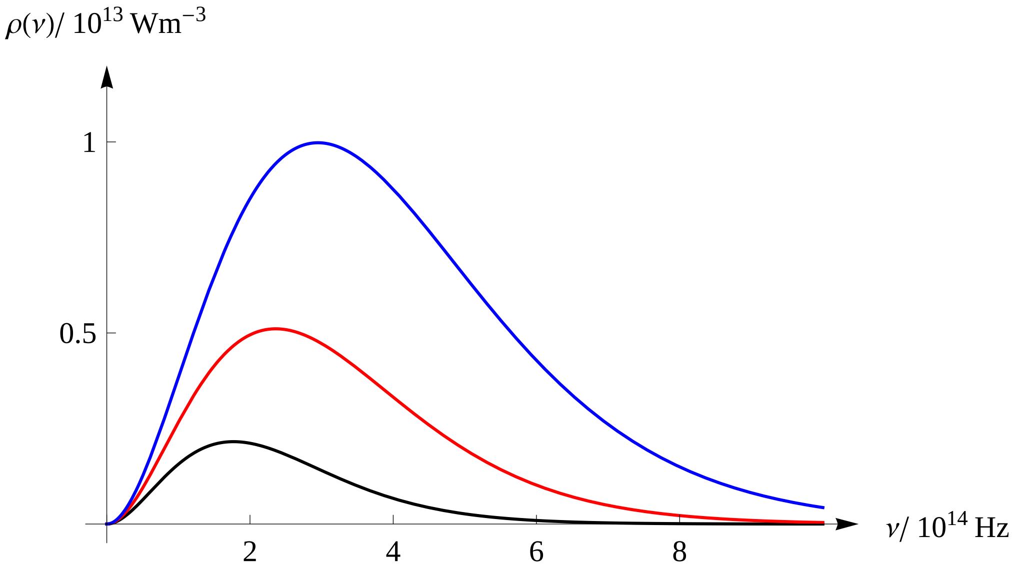
Hustotu počtu módů v intervalu $(\nu, \nu + d\nu)$ určíme ze vztahu (1.4)

$$D(\nu) = \frac{4\pi V}{c^3}\nu^2.$$

Spektrální rozdělení energií v závislosti na teplotě absolutně černého tělesa je tedy

$$\rho(\nu) = \frac{8\pi}{c^3}\frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1},$$

což je Planckův vyzařovací zákon. Průběh funkce pro různé teploty je znázorněn v obr. 1.2.



Obrázek 1.2: Spektrální rozdělení energie záření absolutně černého tělesa o teplotě 3000 K (černá křivka) , 4000 K (červená) a 5000 K (modrá).

Poloha maxima rozdělení je dána podmínkou

$$\frac{h\nu_m}{kT}\frac{1}{1-e^{\frac{h\nu_m}{kT}}} = 3.$$

Odpovídající frekvence je přímo úměrná teplotě (Wienův posunovací zákon)

$$\nu_m = 2.82\frac{kT}{h}.$$

Pro hustotu energie fotonového plynu dostaneme

$$\frac{U}{V} = \frac{8\pi h}{c^3}\int_0^{+\infty}\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}d\nu = \left\{\begin{array}{c}\frac{h\nu}{kT}=x\\ \\ d\nu = \frac{kT}{h}dx\end{array}\right\} = \frac{8\pi k^4}{h^3c^3}T^4\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{e^x-1}dx = \frac{8\pi^5k^4}{15h^3c^3}T^4.$$

Celkový vyzářený výkon na jednotku plochy je

$$R = \frac{c}{4\pi}\int_0^{+\infty}\rho(\nu)d\nu\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin\theta d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{c}{4}\frac{U}{V} = \frac{2\pi^5k^4}{15h^3c^2}T^4 = \sigma T^4.$$

Tento vztah se nazývá Stefan-Boltzmannův zákon. Hustotu počtu fotonů určíme ze vztahu (1.3)

$$\frac{N}{V} = \frac{8\pi}{c^3}\int\limits_0^{+\infty}\frac{\nu^2}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}d\nu = 8\pi\left(\frac{kT}{hc}\right)^3\int\limits_0^{+\infty}\frac{x^2}{e^x-1}dx \approx 8\pi\left(\frac{kT}{hc}\right)^3\cdot 2,4.$$

Příklad 1.4. Degenerovaný fermionový plyn

Určete Fermiho energii, Fermiho teplotu, vnitřní energii a tlak v závislosti na hustotě počtu částic pro degenerovaný fermionový plyn (plyn při teplotě $T = 0$).

Návod: Při absolutní nule fermiony obsadí všechny nejnižší možné energetické hladiny. Fermiho faktor (1.8) tak přejde ve skokovou funkci

$$n(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon-\mu)}+1} \longrightarrow \Theta(\varepsilon-\mu_0) = \begin{cases} 1, & \varepsilon < \mu_0 \\ \\ 0, & \varepsilon > \mu_0, \end{cases}$$

kde μ_0 je chemický potenciál plynu při absolutní nule. Ten je roven Fermiho energii ε_F, určíme ji ze vztahu pro střední počet částic (1.7). Snadno zjistíme

$$N = g\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}\int\limits_0^{\varepsilon_F}\varepsilon^{\frac{1}{2}}d\varepsilon = g\frac{4\pi V}{3h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}\varepsilon_F^{\frac{3}{2}},$$

odkud dostaneme

$$\varepsilon_F = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3}{4\pi g}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Fermiho teplota je definována jako Fermiho energie dělená Boltzmannovou konstantou, tj.

$$\Theta_F = \frac{\varepsilon_F}{k} = \frac{h^2}{2mk}\left(\frac{3}{4\pi g}\right)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

Fermiho teplota představuje charakteristickou teplotu systému. Pokud je skutečná teplota systému mnohem menší než Fermiho teplota, chová se jako by byl při absolutní nule. Pro některé systémy je Fermiho teplota vysoká, např. pro vodivostní elektrony v kovech je $\Theta_F \sim 10^4$ K, pro neutrony v neutronové hvězdě je $\Theta_F \sim 10^{12}$K. V těchto případech představuje degenerovaný plyn dobrou aproximaci. Pro helium-3 je Fermiho teplota $\Theta_F \sim 1$K a aproximaci lze použít až při velmi nízkých teplotách $T \sim$ mK.

Vnitřní energie při absolutní nule je rovna

$$U = g\frac{2\pi V}{h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}\int\limits_0^{\varepsilon_F}\varepsilon^{\frac{3}{2}}d\varepsilon = g\frac{4\pi V}{5h^3}(2m)^{\frac{3}{2}}\varepsilon_F^{\frac{5}{2}} = \frac{3}{5}N\varepsilon_F.$$

Ze vztahu (1.9) pak můžeme vyjádřit tlak fermionového plynu při absolutní nule

$$P = \frac{2}{5}\varepsilon_F\frac{N}{V}.$$

Nenulová hodnota tlaku je přímým důsledkem Pauliho vylučovacího principu. Tento tlak např. brání gravitačnímu kolapsu neutronové hvězdy.