1 Kapitola 4: Základní principy mechaniky

Příklad 4.2

Přes hřeben střechy (vrcholový úhel2α) je nataženo nehmotné vlákno délky lzatížené na koncích hmotnostmi m_1, m_2. Kdy nastane rovnováha ?

Řešení: označme souřadnice obou těles: $m_1 : [x_1, z_1]$ *resp.* $m_2 : [x_2,\ z_2]$ a zvolme počátek ve vrcholu střechy přičemž kladný směr osy z míří proti tíhovému zrychlení

nejprve si zapíšeme vazby, které tato tělesa podstupují

$$\begin{aligned}
&\varphi_1 \equiv x_1 - z_1 tg\alpha_1 = 0\\
&\varphi_2 \equiv x_2 + z_2 tg\alpha_2 = 0\\
&\varphi_3 \equiv \sqrt{x_1^2 + z_1^2} + \sqrt{x_2^2 + z_2^2} - \mathbf{l} = 0
\end{aligned}$$

a skutečné síly, které na tělesa působí

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= (0, 0, -m_1 g)\\
\vec{F}_2 &= (0, 0, -m_2 g)
\end{aligned}$$

problém statické rovnováhy budeme řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů (viz teorie), která nás v tomto případě přivede na soustavu rovnic:

$$\begin{aligned}
&\lambda_1 + \lambda_3 \tfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2+z_1^2}} = 0\\
&-m_1 g - \lambda_1 tg\ \alpha_1 + \lambda_3 \tfrac{z_1}{\sqrt{x_1^2+z_1^2}} = 0\\
&\lambda_2 + \lambda_3 \tfrac{x_2}{\sqrt{x_2^2+z_2^2}} = 0\\
&-m_2 g + \lambda_2 tg\ \alpha_2 + \lambda_3 \tfrac{z_2}{\sqrt{x_2^2+z_2^2}} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&x_1 - z_1 tg\ \alpha_1 = 0\\
&x_2 + z_2 tg\ \alpha_2 = 0\\
&\sqrt{x_1^2 + z_1^2} + \sqrt{x_2^2 + z_2^2} - \mathbf{l} = 0
\end{aligned}$$

z této soustavy si vyjádříme

$$\begin{aligned}
x_1 &= z_1 tg\alpha_1\\
x_2 &= -z_2 tg\alpha_2
\end{aligned}$$

odkud plyne (z předpokladu pohybu pouze po střeše, tj. že souřadnice z jsou záporné), že z první a třetí rovnice dostaneme

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= -\lambda_3 \tfrac{z_1 tg\ \alpha_1}{\sqrt{z_1^2(1+tg^2\alpha_1)}} = -\lambda_3 \tfrac{z_1}{|z_1|} \sin\alpha_1 = \lambda_3 \sin\alpha_1\\
\lambda_2 &= \lambda_3 \tfrac{z_2 tg\ \alpha_2}{\sqrt{z_2^2(1+tg^2\alpha_2)}} = \lambda_3 \tfrac{z_2}{|z_2|} \sin\alpha_2 = -\lambda_3 \sin\alpha_2
\end{aligned}$$

a druhá a čtvrtá na tvar

$$\begin{aligned}
-m_1 g - \lambda_1 tg\ \alpha_1 - \lambda_3 \cos\alpha_1 = 0\\
-m_2 g + \lambda_2 tg\ \alpha_2 - \lambda_3 \cos\alpha_2 = 0
\end{aligned}$$

kde ještě provedeme dosazení za λ_1 *a* λ_2

$$-m_1 g - \lambda_3 \sin\alpha_1 \; tg\alpha_1 - \lambda_3 \cos\alpha_1 = 0$$
$$-m_2 g - \lambda_3 \sin\alpha_2 \; tg\alpha_2 - \lambda_3 \cos\alpha_2 = 0$$

čímž po vyjádření λ_3 z každé rovnice dostaneme podmínku statické rovnováhy (pro libovolné souřadnice obou hmotných bodů svázaných pouze vazebními podminkami)

$$\lambda_3 = -m_1 g \cos\alpha_1$$
$$\lambda_3 = -m_2 g \cos\alpha_2$$
$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}$$

Příklad 4.2 □

Příklad 4.3

Dva hmotné body m_1, m_2kloužou bez tření po parabole $z = -\frac{x^2}{2p}$a jsou spojeny nehmotným vláknem délky r, které prochází ohniskem paraboly $[0, 0, -\frac{p}{2}]$. Která poloha hmotných bodů je rovnovážná ?

Řešení: poznamenejme, že tíhové pole má směr jako obvykle, totiž působí proti směru osy z.

tuto úlohu opět budeme řešit metodou Lagrangeových multiplikátorů (hledání extrémů na varietách)

síly působící na hmotné body jsou

$$\vec{F}_1 = (0, 0, -m_1 g)$$
$$\vec{F}_2 = (0, 0, -m_2 g)$$

napišme vazby, podle kterých se pohyb může uskutečnit

$$\varphi_1 \equiv \sqrt{x_1^2 + (z_1 + \tfrac{p}{2})^2} + \sqrt{x_2^2 + (z_2 + \tfrac{p}{2})^2} - r = 0$$
$$\varphi_2 \equiv z_1 + \frac{x_1^2}{2p} = 0$$
$$\varphi_3 \equiv z_2 + \frac{x_2^2}{2p} = 0$$

pro jednoduchost dalších výpočtů aplikací vazeb φ_2 *a* $\varphi_3$na vazbu první dostaneme

$$\varphi_1 \equiv -z_1 - z_2 + p - r = 0$$
$$\varphi_2 \equiv z_1 + \frac{x_1^2}{2p} = 0$$
$$\varphi_3 \equiv z_2 + \frac{x_2^2}{2p} = 0$$

již zmiňovanou metodou Lagrangeových multiplikátorů dostaneme rovnice

$$\lambda_2 \frac{x_1}{p} = 0$$
$$\lambda_3 \frac{x_2}{p} = 0$$
$$-m_1 g + \lambda_1 + \lambda_2 = 0$$
$$-m_2 g + \lambda_1 + \lambda_3 = 0$$

a k této soustavě patří ještě již zmiňované vazby

$$-z_1 - z_2 + p - r = 0$$
$$z_1 + \frac{x_1^2}{2p} = 0$$
$$z_2 + \frac{x_2^2}{2p} = 0$$

ze kterých dostaneme přípustná řešení

x_1	z_1	x_2	z_2	λ_1	λ_2	λ_3
0	0	$\pm\sqrt{2p(r-p)}$	$p-r$	m_2	$g(m_1 - m_2)$	0
$\pm\sqrt{2p(r-p)}$	$p-r$	0	0	0	$g(m_2 - m_1)$	m_1

poznámka: povšimněme si, že kromě velikosti vazbových sil (udané Lagrangeovými multiplikátory) nezávisí rovnovážná poloha na hmotnostech.

Příklad 4.3 □

Příklad 4.4

Nehmotné vlákno délky l je položeno přes vrcholek paraboly $z = -\frac{x^2}{2p}$. Jeho konce jsou zatíženy hmotnostmi m_1, m_2. Ve které poloze vlákna nastane rovnováha ?

Řešení: poznámka: k řešení tohoto příkladu, ostatně jako k mnoha dalším lze použít různé přístupy, znalosti a podobně - avšak i tentokrát použijeme do jisté míry (s ohledem na řešitelnost rovnic) univerzální Lagrangeův formalismus

začněme tedy tak, že popíšeme vazby, kterými se tělesa při svém pohybu řídí

$$\varphi_1 \equiv z_1 + \frac{x_1^2}{2p} = 0$$
$$\varphi_2 \equiv z_2 + \frac{x_2^2}{2p} = 0$$
$$\varphi_3 \equiv \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + z'^2}dx - l = 0$$

povšimněme si na vysvětlenou vazby φ_3 - tato vazba vyjadřuje spojení obou hmotných bodů nehmotným vláknem délky l, která se docela snadno odvodí přes Pythagorovu větu aplikovanou na infinitesimální přírůstky $(dl)^2 = (dx)^2 + (dz)^2$ - zbytek už si laskavý čtenář jistě domyslí sám

tuto vazbu si samozřejmě zjednodušíme a to následovně : ze vztahů

$$z=-\frac{x^2}{2p},\ z'=-\frac{x}{p}$$

po dosazení do vazby φ_3 dostaneme

$$\varphi_3 \equiv \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\tfrac{x^2}{p^2}}dx - l = \ 0$$

nyní se pustíme do hledání bodů statické rovnováhy - budeme postupovat obdobně jako v předchozím příkladě, a to metodou Lagrangeových multiplikátorů, čímž dostaneme tyto čtyři rovnice

$$\begin{array}{l}\lambda_1\frac{x_1}{p}-\lambda_3\sqrt{1+\frac{x_1^2}{p^2}}=0\\ -m_1g+\lambda_1=0\\ \lambda_2\frac{x_2}{p}+\lambda_3\sqrt{1+\frac{x_2^2}{p^2}}=0\\ -m_2g+\lambda_2=0\end{array}$$

matematická poznámka: $\int_{x_1}^{x_2} f'(x)dx = f(x_2)-f(x_1)$ a proto jsme při odvozování předchozích rovnic mohli použít $\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}}dx\right)=-\sqrt{1+\frac{x_1^2}{p^2}}$ et $\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\int_{x_1}^{x_2}\sqrt{1+\frac{x^2}{p^2}}dx\right)=\sqrt{1+\frac{x_2^2}{p^2}}$

z těchto čtyř rovnic si vyjádříme

$$\begin{array}{c}\lambda_1=m_1g\\ \lambda_2=m_2g\end{array}$$

a po dosazení do zbylých dvou rovnic máme

$$\begin{array}{c}m_1g\frac{x_1}{p}-\lambda_3\sqrt{1+\frac{x_1^2}{p^2}}=0\\ m_2g\frac{x_2}{p}+\lambda_3\sqrt{1+\frac{x_2^2}{p^2}}=0\end{array}$$

odkud nakonec eliminací λ_3 vyplyne rovnice

$$\frac{m_1x_1}{\sqrt{1+\frac{x_1^2}{p^2}}}+\frac{m_2x_2}{\sqrt{1+\frac{x_2^2}{p^2}}}=0$$

to je ovšem jen jedna rovnice pro dvě neznámé - tu druhou nám zajistí dosud nepoužitá vazba

$$\varphi_3 \equiv \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\tfrac{x^2}{p^2}}dx - l = \ 0$$

spočtěme integrál

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+\tfrac{x^2}{p^2}}dx = \ \left\{\frac{x}{p}=\sinh\xi\right\} = \int_{\xi_1}^{\xi_2} p\cosh^2(\xi)d\xi = \frac{p}{4}\left[2\xi+\sinh 2\xi\right]_{\xi_1}^{\xi_2}$$

$$\xi = arcsinh\frac{x}{p}$$

druhá rovnice tedy bude

$$\frac{p}{4}\left[2arcsinh\frac{x_2}{p} + \sinh\left(2arcsinh\frac{x_2}{p}\right)\xi - 2arcsinh\frac{x_1}{p} - \sinh\left(2arcsinh\frac{x_1}{p}\right)\xi\right] = l$$

kterou lze ještě nepatrně zjednodušit na

$$\frac{p}{2}\left[arcsinh\frac{x_2}{p} + \frac{x_2}{p}\sqrt{1+\frac{x_2^2}{p^2}} - arcsinh\frac{x_1}{p} - \frac{x_1}{p}\sqrt{1+\frac{x_1^2}{p^2}}\right] = l$$

a tedy rovnovážné hodnoty souřadnic x_1, x_2 jsou řešením těchto dvou zarámovaných rovnic.

Příklad 4.4 □

Příklad 4.5

Hmotný bod m je vázán na elipsu ve svislé rovině s poloosami a (vodorovná), b (svislá), a < b. Kromě tíže g působí na bod pružina o tuhosti k uchycená ve středu elipsy, jejíž rovnovážná délka $a_0 < a$. Určete rovnovážné polohy bodu.

Řešení: souřadný systém zvolíme, jako obvykle, tak, střed souřadného systému umístíme přirozeně do středu elipsy a kladný směr osy y bude opět směřovat proti směru působení tíhového pole

vazbu v takovéto soustavě potom zachycuje rovnice

$$\varphi \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \equiv b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

k nalezení rovnovážných poloh použijeme opět Lagrangeův formalismus, tj. metodu hledání extrému funkce na varietě - stacionární bod potenciálu U

vyjádřeme si potenciální energii jako

$$U = mgy + \frac{1}{2}k(\sqrt{x^2+y^2} - a_0)^2$$

hledejme tedy stacionární body této funkce dvou proměnných na varietě φ (pomocí Lagrangeových multiplikátorů - viz matematická analýza)

$$\frac{\partial U}{\partial x} - \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x} = k\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(\sqrt{x^2+y^2} - a_0) - 2b^2x\lambda = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} - \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y} = mg + k\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}(\sqrt{x^2+y^2} - a_0) - 2a^2y\lambda = 0$$

celkem se tedy dostáváme soustavu rovnic

$$x\left(1-2b^2\lambda-\frac{a_0}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=0$$

$$y\left(1-2a^2\lambda-\frac{a_0}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\frac{mg}{k}$$

$$b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$$

tuto soustavu řeší následující dva stacionární body:

$$x=0,\ \ y=\pm b$$

a body, které jsou řešením této soustavy rovnic

$$x^2=a^2-\frac{a^2}{b^2}y^2,\ kde\ x\neq 0$$

$$y\left(1-\frac{a_0}{\sqrt{a^2-\frac{a^2}{b^2}y^2+y^2}}\right)=\frac{mg}{k}\frac{2b^2}{b^2-a^2}$$

poznámka: z poslední rovnice je vidět, že při $\frac{m}{k}\to 0$je dalším přibližným stacionárním bodem $x=\pm b,\ y\ =\ 0$

Příklad 4.5 □

Příklad 4.6

Na přímce jsou dány tři ekvidistantní elektricky nabité hmotné body s náboji $e_1,\ e_2,\ e_3$. Určete náboje tak, aby soustava byla v udané konfiguraci v rovnováze a ukažte, že tato rovnováha není stabilní.
Řešení: statická rovnováha pro ekvidistantní náboje znamená, že podle principu virtuální práce (virtuálního posunutí) musí platit

$$\sum_i F_i\delta x_i=0$$

protože naším úkolem bude zjistit, je-li tato konfigurace v takové rovnováze stabilní či nikoliv, vyčísleme nejdříve potenciál této soustavy

$$U(x_1,x_2,x_3)=\frac{e_1e_2}{x_2-x_1}+\frac{e_1e_3}{x_3-x_1}+\frac{e_2e_3}{x_3-x_2}$$

potom síly působící v této soustavě se vyjádří

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}$$

a podmínka statické rovnováhy je pak

$$-\sum_i \frac{\partial U}{\partial x_i}\delta x_i = 0$$

a protože δx_i můžou být obecně lineárně nezávislá je tato podmínka splněna právě když

$$-\frac{\partial U}{\partial x_i} = 0$$

což nás dovede v ekvidistantních bodech $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = a$; $x_3 - x_1 = 2a$ na soustavu rovnic

$$-\frac{e_1 e_2}{a^2} - \frac{e_1 e_3}{4a^2} = 0$$

$$\frac{e_1 e_2}{a^2} - \frac{e_2 e_3}{a^2} = 0$$

$$\frac{e_1 e_3}{4a^2} + \frac{e_2 e_3}{a^2} = 0$$

odtud dostaneme podmínku pro rovnováhu

$$\begin{array}{l} e_1 = e_3 = e \\ e_2 = -\frac{1}{4}e_1 = -\frac{1}{4}e \end{array}$$

abychom mohli nyní rozhodnout, zda-li je tato rovnováha stabilní, je nutné zjistit, jestli v bodech stability potenciál U nabývá minimum.

pro přehlednost nyní zvolme nové souřadnice $y_i = x_i - x_2$, $i \in \hat{3}$, tj. spojíme novou soustavu souřadnou pevně s prostředním nábojem

potenciál má nyní tvar

$$U(y_1, y_3) = \frac{1}{4}e^2\left(+\frac{1}{y_1} + 4\frac{1}{y_3 - y_1} - \frac{1}{y_3}\right) = \frac{1}{4}e^2\frac{(y_1 + y_3)^2}{y_1 y_2 (y_3 - y_1)}$$

a budeme zkoumat extrém této funkce dvou reálných proměnných v bodě $[y_1 = -a, y_3 = a]$

$$U'(y_1, y_3) = \frac{1}{4}e^2\begin{pmatrix} -\frac{1}{y_1^2} + \frac{4}{(y_3 - y_1)^2} \\ \frac{1}{y_3^2} - \frac{4}{(y_3 - y_1)^2} \end{pmatrix}$$

a budeme zkoumat definitnost druhé derivace potenciálu (podrobnosti vyšetřování reálných funkcí více proměnných se dozvíte v matematické analýze)

$$U''(y_1, y_3) = \frac{1}{2}e^2 \begin{pmatrix} \frac{1}{y_1^3} + \frac{4}{(y_3-y_1)^3} & -\frac{4}{(y_3-y_1)^3} \\ -\frac{4}{(y_3-y_1)^3} & -\frac{1}{y_3^3} + \frac{4}{(y_3-y_1)^3} \end{pmatrix}$$

$$U''(-a, a) = \frac{1}{2}\frac{e^2}{a^3} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

tato matice je indefinitní a tudíž potenciál nemá v této konfiguraci minimum a rovnováha je proto nestabilní

Příklad 4.6 □

Příklad 4.9

Na hmotný bod vázaný na kulové ploše $\varphi \equiv x_1^2+x_2^2+x_3^2-r^2 = 0$ působí konstantní gravitační síla $\vec{F} = (0, 0, -mg)$. Určete rovnovážné polohy (x_i^o)a složky reakční síly R_i^o v (x_i^o).

Řešení:

opět použijeme metodu Lagrangeových multiplikátorů a tak dostaneme podmínky statické rovnováhy jako

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - r^2 = 0$$

$$0 + 2\lambda x_1 = 0$$

$$0 + 2\lambda x_2 = 0$$

$$-mg + 2\lambda x_3 = 0$$

odkud dostaneme řešení

$$\vec{x}^o = (0, 0, \pm r)$$

a reakční síla v těchto bodech je

$$\vec{R}^o = (0, 0, mg)$$

Příklad 4.9 □

Příklad 4.10

Hmotný bod, na který působí konstantní gravitační síla $\vec{F} = (0, 0, -mg)$ je vázán na dvě válcové plochy $\varphi_1 \equiv x_1^2 + x_3^2 - a^2 = 0$ a $\varphi_2 \equiv x_1^2 + x_2^2 - b^2 = 0$, kde $a^2 > b^2 > 0$. Určete rovnovážné polohy (x_i^o) a složky reakční síly R_i^o v (x_i^o). Které rovnovážné polohy jsou stabilní ?

Řešení: protože budeme na konci rozhodovat o stabilitě, použijeme v tomto příkladě metodu hledání extrému funkce více proměnné na varietách z matematické analýzy - zkoumaná funkce bude potenciál U a budou nás zajímat (a) stacionární body této funkce vzhledem k varietám(b) v kterých bodech má tato funkce minimum vzhledem k varietám (v takových bodech je potom rovnováha stabilní).

(a) stacionární body

sestavme funkci

$$\Lambda = U - \lambda_1\varphi_1 - \lambda_2\varphi_2$$

po dosazení

$$\Lambda = mgx_3 - \lambda_1(x_1^2 + x_3^2 - a^2) - \lambda_2(x_1^2 + x_2^2 - b^2)$$

a hledejme její stacionární body (tj. $\frac{\partial\Lambda}{\partial x_i} = 0$)

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x_1} = -2\lambda_1 x_1 - 2\lambda_2 x_1 = 0$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x_2} = -2\lambda_2 x_2 = 0$$

$$\frac{\partial\Lambda}{\partial x_3} = mg - 2\lambda_1 x_3 = 0$$

a nezapomeňme ještě na vazbové podmínky

$$\Phi \equiv \begin{cases} \varphi_1 \equiv x_1^2 + x_3^2 - a^2 = 0 \\ \varphi_2 \equiv x_1^2 + x_2^2 - b^2 = 0 \end{cases}$$

takovouto soustavu rovnic potom řeší (pro přehlednost liché indexy řešení odpovídají bodům majícím kladnou složku odpovídající souřadnici x_3 a sudé opačně - tj. body s lichými indexy jsou "nahoře"a body se sudými "dole", budeme-li se orientovat podle působení tíhového pole)

indexy řešení	x_1	x_2	x_3	λ_1	λ_2	$\vec{R}$
	0	$\pm b$	a	$\frac{mg}{2a}$	0	$(0, 0, mg)$
	0	$\pm b$	-a	-$\frac{mg}{2a}$	0	$(0, 0, mg)$
	$\pm b$	0	$\sqrt{a^2 - b^2}$	$\frac{mg}{2\sqrt{a^2-b^2}}$	-$\frac{mg}{2\sqrt{a^2-b^2}}$	$(0, 0, mg)$
	$\pm b$	0	-$\sqrt{a^2 - b^2}$	-$\frac{mg}{2\sqrt{a^2-b^2}}$	$\frac{mg}{2\sqrt{a^2-b^2}}$	$(0, 0, mg)$

kde jsme použili $\vec{R} = (2x_1\lambda_1 + 2x_1\lambda_2,\ 2\lambda_2 x_2,\ 2\lambda_1 x_3)$
(b) otázka minima ve stacionárních bodech
první derivaci funkce Λ lze obecně zapsat (viz předchozí rovnice)

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} -2\lambda_1 x_1 - 2\lambda_2 x_1 \\ -2\lambda_2 x_2 \\ mg - 2\lambda_1 x_3 \end{pmatrix}$$

druhá derivace bude

$$\Lambda'' = \begin{pmatrix} -2\lambda_1 - 2\lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & -2\lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\lambda_1 \end{pmatrix}$$

zkoumejme nyní definitnost v jednotlivých stacionárních bodech a to tak, že zúžíme druhou derivaci na tečný prostor (podrobnosti viz matematická analýza)

protože $\Phi' = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 & 2x_3 \\ 2x_1 & 2x_2 & 0 \end{pmatrix}$, dostaneme v konkrétních případech

	Φ'	Λ''	příslušná kvadratická forma
	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2a \\ 0 & \pm 2b & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{mg}{a}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$Q(h) = \frac{mg}{a}(h,0,0)\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{mg}{a}h^2$ lokální maximum $\Rightarrow$nestabilní rovnovážná poloha
	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2a \\ 0 & \pm 2b & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{mg}{a}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$Q(h) = \frac{mg}{a}(h,0,0)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{mg}{a}h^2$ lokální minimum $\Rightarrow$stabilní rovnovážná poloha
	$\begin{pmatrix} \pm 2b & 0 & 2\sqrt{a^2-b^2} \\ \pm 2b & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{mg}{\sqrt{a^2-b^2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$Q(h) = \frac{mg}{\sqrt{a^2-b^2}}(0,h,0)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{mg}{\sqrt{a^2-b^2}}h^2$ lokální minimum $\Rightarrow$stabilní rovnovážná poloha
	$\begin{pmatrix} \pm 2b & 0 & -2\sqrt{a^2-b^2} \\ \pm 2b & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{mg}{\sqrt{a^2-b^2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$Q(h) = \frac{mg}{\sqrt{a^2-b^2}}(0,h,0)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{mg}{\sqrt{a^2-b^2}}h^2$ lokální maximum $\Rightarrow$nestabilní rovnovážná poloha

poznámka k řešení: postup užitý v tomto příkladě není jediný možný, je však názorný z hlediska aplikace poznatků matematické analýzy

Příklad 4.10 □

Příklad 4.11

Pomocí d'Alembertova principu odvoďte pohybovou rovnici matematického kyvadla.

Řešení:

zavedeme úhel φ jako obecnou souřadnici a pomocí něj vyjádříme všechny veličiny vystupující v d'Alembertově principu

d'Alembertův princip v kartézských souřadnicích je (kde osa y směřuje ve směru tíhového zrychlení)

$$(-m\ddot{x})\delta x + (mg - m\ddot{y})\delta y = 0$$

a použijeme vzhledem k povaze matematického kyvadla transformace

$$x = r\sin\varphi$$
$$y = r\cos\varphi$$

kde

$$\ddot{x} = -r\dot{\varphi}^2\sin\varphi + r\ddot{\varphi}\cos\varphi$$
$$\ddot{y} = -r\dot{\varphi}^2\cos\varphi - r\ddot{\varphi}\sin\varphi$$

a

$$\delta x = r\cos\varphi\,\delta\varphi$$
$$\delta y = -r\sin\varphi\,\delta\varphi$$

transformujme d'Alembertův princip na

$$(mr\dot{\varphi}^2\sin\varphi - mr\ddot{\varphi}\cos\varphi)r\cos\varphi\,\delta\varphi - (mg + mr\dot{\varphi}^2\cos\varphi + mr\ddot{\varphi}\sin\varphi)r\sin\varphi\,\delta\varphi = 0$$

$$mr^2(-\ddot{\varphi} - \frac{g}{r}\sin\varphi)\,\delta\varphi = 0$$

a má-li být tato rovnost splněna pro libovolné $\delta\varphi$, dostáváme pohybovou rovnici matematického kyvadla

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{r}\sin\varphi = 0$$

Příklad 4.11 □

Příklad 4.13

Dvě tělesa hmotností m_1, m_2 jsou spojena nehmotným vláknem délky l klouzajícím bez tření po pevném válci o poloměru R. Určete pohyb soustavy pod vlivem tíže s použitím d'Alembertova principu. Vypočtěte sílu napínající vlákno.

Řešení: nechť kladný směr osy z směřuje ve směru působení tíhového zrychlení

zapišme vazbu mezi tělesy jako

$$z_1 + z_2 = l - \pi R$$

odkud plyne

$$\ddot{z}_2 = -\ddot{z}_2$$

zapišme d'Alemberův princip

$$(m_1 g - T - m_1\ddot{z}_1)\delta z_1 + (m_2 g - T - m_2\ddot{z}_2)\delta z_2 = 0$$

z kterého, má-li být tato rovnost splněna pro libovolné δz_i, obdržíme soustavu rovnic (po použití vazby)

$$m_1 g - T - m_1\ddot{z}_1 = 0$$

$$m_2 g - T + m_2\ddot{z}_1 = 0$$

snadno z této soustavy rovnic vyjádříme

$$T = 2\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

a

$$\ddot{z}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

odkud integrací dostáváme

$$z_1(t) = \frac{1}{2}\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g t^2 + \dot{z}_1^o t + z_1^o$$

$$z_2(t) = -\frac{1}{2}\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g t^2 - \dot{z}_1^o t - z_1^o + l - \pi R$$

4.14 Těžní klec. Lano nesoucí klec o hmotnosti M je vedeno přes kolo poloměru R a je taženo silou F=F(t). Pomocí d'Alembertova principu odvoďte pohybovou rovnici klece. Moment setrvačnosti kola hmotnosti m vyjádřete pomocí gyračního poloměru R_g, $I = mR_g^2$.

d'Alembertův princip pro tuto situaci zní

$$(F - Mg - M\ddot{z})\delta z + (-I\ddot{\varphi})\delta\varphi = 0$$

s použitím vztahů

$$\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{z}}{R}$$

$$\delta z = R\delta\varphi$$

dostáváme

$$(F - Mg - M\ddot{z})\delta z + (-m\frac{R_g^2}{R}\ddot{z})\frac{\delta z}{R} = 0$$

a tedy

$$(F - Mg - M\ddot{z} - m\frac{R_g^2}{R^2}\ddot{z})\delta z = 0$$

odkud pohybová rovnice

$$\left(M + m\frac{R_g^2}{R^2}\right)\ddot{z} = F - Mg$$

Příklad 4.13 □

Příklad 4.15

Pomocí d'Alembertova principu odvoďte pohybovou rovnici rotačního tělesa (hmotnost m, poloměr R, gyrační poloměr Rg), které se valí bez klouzání po rovině nakloněné pod úhlem α.

Řešení: d'Alembertův princip v této situaci je

$$(mg\sin\alpha - m\ddot{s})\delta s + (-I\ddot{\varphi})\delta\varphi = 0$$

transformujeme pomocí vztahů

$$\delta\varphi = \frac{\delta s}{R}$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{\ddot{s}}{R}$$

$$I = mR_g^2$$

na

$$(mg\sin\alpha - m\ddot{s})\delta s + (-mR_g^2\frac{\ddot{s}}{R})\frac{\delta s}{R} = 0$$

a po úpravě dostaneme

$$m\left[g\sin\alpha - \ddot{s}\left(1 + \frac{R_g^2}{R^2}\right)\right]\delta s = 0$$

odkud obdržíme pohybovou rovnici

$$\ddot{s} = \frac{g\sin\alpha}{1 + \frac{R_g^2}{R^2}}$$

Příklad 4.15 □

Příklad 4.18

Přesvědčete se přímým výpočtem, že změna vázanosti $Z(\ddot{x}_i)$ při změně zrychlení o $\delta\ddot{x}_i$ je rovna $Z(\ddot{x}_i+\delta\ddot{x}_i)-Z(\ddot{x}_i) = \sum_i(m_i\ddot{x}_i-F_i)\delta\ddot{x}_i+\frac{1}{2}\sum_i m_i(\delta\ddot{x}_i)^2$ a tedy podle Gaussova principu $\sum_i F_i - m_i\ddot{x}_i)\delta\ddot{x}_i = 0$, $(\delta x_i = \delta\dot{x}_i = 0)$Z nabývá při skutečném pohybu svého minima.

Řešení: veličina vázanost (nutkání) představuje

$$Z(\ddot{x}_i) = \frac{1}{2}\sum_i m_i\left(\ddot{x}_i - \frac{F_i}{m_i}\right)^2$$

zkoumejme tedy

$$Z(\ddot{x}_i+\delta\ddot{x}_i) - Z(\ddot{x}_i) = \frac{1}{2}\sum_i\left\{m_i\left[(\ddot{x}_i+\delta\ddot{x}_i)^2 - \ddot{x}_i^2\right] - 2F_i\left[\ddot{x}_i+\delta\ddot{x}_i-\ddot{x}_i\right] + \frac{F_i^2}{m_i} - \frac{F_i^2}{m_i}\right\}$$

$$Z(\ddot{x}_i+\delta\ddot{x}_i)-Z(\ddot{x}_i) = \frac{1}{2}\sum_i m_i\left[2\ddot{x}_i\delta\ddot{x}_i+(\delta\ddot{x}_i)^2\right]-2F_i\delta\ddot{x}_i = \sum_i\left(m_i\ddot{x}_i-F_i\right)\delta\ddot{x}_i+\frac{1}{2}\sum_i m_i(\delta\ddot{x}_i)^2$$

což bylo dokázati

Příklad 4.18 □

Příklad 4.20

Vypočtěte hodnotu akce $S = \int_0^T L\,dt$pro(a) skutečný pohyb při volném pádu hmotného bodu hmotnosti m, $z_a(t) = \frac{1}{2}gt^2$(b) variovaný pohyb $z_b(t) = ct$, kde c je určeno podmínkou pevných konců $z_b(T) = z_a(T)$(c) variovaný pohyb$z_c(t) = at^3$, kde a je určeno podmínkou pevných konců $z_c(T) = z_a(T)$.Ukažte, že hodnota S je v případě (a) menší než v případech (b), (c).

Řešení: Lagrangeova funkce popisující volný pád je

$$L = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz$$

nejprve určíme z podmínek pevných konců konstantu c

$$z_b(T) = cT = z_a(T) = \frac{1}{2}gT^2$$

$$c = \frac{1}{2}gT$$

a konstantu a

$$z_c(T) = aT^3 = z_a(T) = \frac{1}{2}gT^2$$

$$a = \frac{1}{2}\frac{g}{T}$$

dosazujme tedy za z(t) postupně z (a),(b) a (c) a spočítejme hodnotu akce

$$S_a = \int_0^T Ldt = \int_0^T \frac{1}{2}mg^2t^2 + \frac{1}{2}mg^2t^2dt = \frac{1}{3}mg^2T^3$$

$$S_b = \int_0^T Ldt = \int_0^T \frac{1}{8}mg^2T^2 + \frac{1}{2}mg^2Tt\,dt = \frac{3}{8}mg^2T^3$$

$$S_c = \int_0^T Ldt = \int_0^T \frac{9}{8}\frac{mg^2}{T^2}t^4 + \frac{1}{2}\frac{mg^2}{T}t^3\,dt = \frac{7}{20}mg^2T^3$$

je tedy zřejmé, že skutečnému pohybu skutečně odpovídá nejmenší akce
což bylo dokázati a spočítati

Příklad 4.20 □

Příklad 4.21

Bylo zjištěno, že hmotný bod při volném pádu s nulovou počáteční rychlostí urazí dráhu z_0 za dobu $t_0 = \sqrt{\frac{2z_0}{g}}$. Předpokládejme, že pro $z \neq z_0$doba pádu není známa a že víme jen to, že z(t) závisí na t podle vztahu $z(t) = at + bt^2$. Ukažte, že když konstanty a, b zvolíte tak, aby doba pádu z výšky z_0 byla t_0, pak akce $S = \int_0^{t_0} L\,dt$bude mít extrém jen při $a = 0,\ b = \frac{1}{2}g$.

Řešení: Lagrangeova funkce popisující volný pád je

$$L = \frac{1}{2}m\dot{z}^2 + mgz$$

kde ovšem

$$z(t) = at + bt^2$$

spočítejme akci

$$S(a,b) = \int_0^{t_0} \frac{1}{2}m(a^2+2abt+b^2t^2)+mgat+mgbt^2\,dt = \frac{1}{6}m\left[3a^2t_0 + 6abt_0^2 + 4b^2t_0^3 + 3agt_0^2 + 2bgt_0^3\right]$$

zvolme nyní konstanty a, b tak, aby

$$z(t_0) = z_0 = at_0 + bt_0^2$$

kde

$$t_0 = \sqrt{\frac{2z_0}{g}}$$

odkud zřejmě

$$z_0 = \frac{1}{2}gt_0^2$$

celkem jsme dostali rovnici

$$\frac{1}{2}gt_0^2 = at_0 + bt_0^2$$

odkud si vyjádříme

$$a = \frac{1}{2}(g-2b)t_0$$

nyní si můžeme pomocí tohoto vztahu vyjádřit akci už jen jako funkci jedné proměnné b

$$S(b) = \frac{1}{6}m\left[3\left(\tfrac{g}{2}-b\right)^2 t_0^3 + 6\left(\tfrac{g}{2}-b\right)bt_0^3 + 4b^2t_0^3 + 3\left(\tfrac{g}{2}-b\right)gt_0^3 + 2bgt_0^3\right] = mt_0^3\left[\frac{3}{8}g^2 - \frac{1}{6}gb + \frac{1}{6}b^2\right]$$

abychom našli extrém této funkce, musíme znát stacionární bod její derivace

$$S'(b_0) = \frac{1}{6}mt_0^3\left[-g+2b_0\right] = 0$$

$$b_0 = \frac{g}{2}$$

a dopočítáme ještě

$$a_0 = \frac{1}{2}(g-2b_0)t_0 = 0$$

což bylo dokázati

Příklad 4.21 □

Příklad 4.22

Vypočtěte akci $S = \frac{1}{2}\int_0^1 \dot{x}^2 - x^2\,dt$ pro jednoparametrický systém trajektorií $x = x_\varepsilon(t) = \frac{\sin t + \varepsilon t}{\sin 1 + \varepsilon}$a vyneste závislost $S = S(\varepsilon)$ do grafu.

Řešení: nejprve si tedy spočtěme první derivaci (respektive kvadrát derivace) trajektorie

$$\dot{x}_\varepsilon(t) = \frac{\cos t + \varepsilon}{\sin 1 + \varepsilon}$$

$$\dot{x}_\varepsilon^2 = \frac{\cos^2 t + 2\varepsilon\cos t + \varepsilon^2}{(\sin 1 + \varepsilon)^2}$$

$$x_\varepsilon^2 = \frac{\sin^2 t + 2\varepsilon t\sin t + \varepsilon^2 t^2}{(\sin 1 + \varepsilon)^2}$$

spočtěme tedy akci

$$S = \frac{1}{2(\sin 1 + \varepsilon)^2}\int_0^1 \cos^2 t + 2\varepsilon\cos t + \varepsilon^2 - \sin^2 t - 2\varepsilon t\sin t - \varepsilon^2 t^2 dt$$

jemně ještě zjednodušíme

$$S = \frac{1}{2(\sin 1 + \varepsilon)^2}\int_0^1 \cos 2t + 2\varepsilon\cos t + \varepsilon^2 - 2\varepsilon t\sin t - \varepsilon^2 t^2 dt$$

a ze znalostí integrálů, zvláštěpak

$$\int_0^1 t\sin t dt = -\cos 1 + \int_0^1 \cos t dt = \sin 1 - \cos 1$$

dostaneme

$$S = \frac{1}{2(\sin 1 + \varepsilon)^2}\left(\frac{1}{2}\sin 2 + 2\varepsilon\sin 1 + \varepsilon^2 - 2\varepsilon\sin 1 + 2\varepsilon\cos 1 - \frac{1}{3}\varepsilon^2\right)$$

$$S = \frac{3\sin 1\cos 1 + 6\varepsilon\cos 1 + 2\varepsilon^2}{6(\sin 1 + \varepsilon)^2}$$

graf akce v závislosti na ϵ

Příklad 4.22 □

Příklad 4.24

Zapište Lagrangeovu funkci a pohybové rovnice částice v poli $U(x)$, jestliže zavedeme "místní čas" $\tau = t - \lambda x$.

Řešení: Lagrangeova funkce se při přechodu k novým obecným souřadnicím a "času" transformuje takto

$$L'\left(x, \tfrac{dx}{d\tau}, \tau\right) = L\left(x, \tfrac{dx}{dt}, t\right)\frac{dt}{d\tau}$$

Lagrangeova funkce v tomto případě je

$$L\left(x, \tfrac{dx}{dt}, t\right) = \frac{1}{2}m\left(\tfrac{dx}{dt}\right)^2 - U(x)$$

a pomocí vztahů

$$t = \tau + \lambda x$$

ji transformujme

$L'\left(x, \frac{dx}{d\tau}, \tau\right) = L\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right) \frac{dt}{d\tau} = \left[\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau}\frac{d\tau}{dt}\right)^2 - U(x)\right]\left(1 + \lambda\frac{dx}{d\tau}\right) = \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{d\tau}\right)^2 \frac{1}{1+\lambda\frac{dx}{d\tau}} - \left(1 + \lambda\frac{dx}{d\tau}\right) U(x)$a tedy zkráceně můžeme psát

$$L'\left(x, \dot{x}, \tau\right) = \frac{1}{2}m\frac{\dot{x}^2}{1 + \lambda\dot{x}} - \left(1 + \lambda\dot{x}\right) U(x)$$

Příklad 4.24 □

Příklad 4.25

Jak se transformuje Lagrangeova funkce $L = -\sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}$**při přechodu k souřadnicím q a "času"**τ **podle vztahů** $x = q\cosh\lambda + \tau\sinh\lambda$**,** $t = q\sinh\lambda + \tau\cosh\lambda$ **(Lorentzova transformace) ?**

Řešení: pomocí vztahů

$$dx = \cosh\lambda dq + \sinh\lambda d\tau$$
$$dt = \sinh\lambda dq + \cosh\lambda d\tau$$

přetransformujme Lagrangeovu funkci

$$L' = L\frac{dt}{d\tau} = -\left(\sinh\lambda\ \frac{dq}{d\tau} + \cosh\lambda\frac{d\tau}{d\tau}\right)\sqrt{1 - \left(\frac{\cosh\lambda dq + \sinh\lambda d\tau}{\sinh\lambda dq + \cosh\lambda d\tau}\right)^2} =$$

$$= -\sqrt{\frac{\left(\sinh\lambda dq\ + \cosh\lambda d\tau\right)^2}{\left(d\tau\right)^2}\frac{\left(\sinh\lambda dq + \cosh\lambda d\tau\right)^2 - \left(\cosh\lambda dq + \sinh\lambda d\tau\right)^2}{\left(\sinh\lambda dq + \cosh\lambda d\tau\right)^2}} =$$

$$= -\sqrt{\frac{sh^2\lambda\left(dq\right)^2 + 2sh\lambda ch\lambda\ dq\ d\tau + ch^2\lambda\left(d\tau\right)^2 - ch^2\lambda\left(dq\right)^2 - 2sh\lambda ch\lambda\ dq\ d\tau - sh^2\lambda\left(d\tau\right)^2}{\left(d\tau\right)^2}} == -\sqrt{\sinh^2}$$

a tedy konečný výsledek

$L' = -\sqrt{1 - \left(\frac{dq}{d\tau}\right)^2}$

Příklad 4.25 □