1 Klasifikace pomocí kořenů

Nadále se budeme zabývat pouze **komplexními poloprostými** algebrami.

Lemma 1. $\mathfrak{g}_\alpha \perp_K \mathfrak{g}_\beta,\ \forall \alpha, \beta \in \Delta \cup \{0\},\ \alpha + \beta \neq 0.$

Důkaz. Díky ad-invarianci Killingovy formy, pro libovolné $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha,\ X_\beta \in \mathfrak{g}_\beta,\ H \in \mathfrak{g}_0$ platí:

$$(\alpha+\beta)(H) K\left(X_\alpha, X_\beta\right) = \left(\alpha(H) + \beta(H)\right) K\left(X_\alpha, X_\beta\right) = K\left([H, X_\alpha], X_\beta\right) + K\left(X_\alpha, [H, X_\beta]\right) = 0$$

Protože $\alpha + \beta \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \exists H \in \mathfrak{g}_0,\ (\alpha+\beta)(H) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad K(X_\alpha, X_\beta) = 0$ □

Lemma 2. $K|_{\mathfrak{g}_0} = K|_{\mathfrak{g}_0 \times \mathfrak{g}_0}$ je nedegenerovaná a $\forall \alpha \in \Delta,\ \exists_1 H_\alpha \in \mathfrak{g}_0,\ \forall H \in \mathfrak{g}_0 : \alpha(H) = K(H, H_\alpha)$, tj. máme vyjádření $\alpha(\cdot) = K(\cdot, H_\alpha)$.

Důkaz. K je na $\mathfrak{g}$ nedegenerovaná $\quad \Rightarrow \quad \forall H \in \mathfrak{g}_0,\ H \neq 0,\ \exists X \in \mathfrak{g},\ K(H,X) \neq 0$, zároveň $\mathfrak{g}_0 \perp \mathfrak{g}_\alpha,\ \forall \alpha \in \Delta \quad \Rightarrow \quad \forall H \in \mathfrak{g}_0,\ \exists X \in \mathfrak{g}_0,\ K(H,X) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad K$ je nedegenerovaná na $\mathfrak{g}_0 \quad \Rightarrow$ $H \to K(\cdot, H)$ je izomorfismus $\mathfrak{g}_0$ a $\mathfrak{g}_0^* \quad \Rightarrow \quad \exists_1 H_\alpha$ a pro ztotožnení $\mathfrak{g}_0$ a $\mathfrak{g}_0^*$ lze použít $\alpha(\cdot) = K(\cdot, H_\alpha)$. □

Lemma 3. Buď $\alpha \in \Delta$. Potom $-\alpha \in \Delta$ a $\forall X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha,\ \forall X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha},\ [X_\alpha, X_{-\alpha}] = K(X_\alpha, X_{-\alpha}) H_\alpha$.

Důkaz. $\alpha \in \Delta \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\} \quad \Rightarrow \quad \forall \mu \in \Delta \cup \{0\} \backslash \{-\alpha\},\ \mathfrak{g}_\mu \perp \mathfrak{g}_\alpha$. Kdyby $-\alpha \notin \Delta$, tj. $\mathfrak{g}_{-\alpha} = \{0\} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g} \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{g}_\alpha = \{0\}$, spor. Takže $\mathfrak{g}_{-\alpha} \neq \{0\}$ a $\forall X \in \mathfrak{g}_\alpha,\ \forall X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha},\ \forall H \in \mathfrak{g}_0$ platí:

$$K\big([X_\alpha, X_{-\alpha}] - K(X_\alpha, X_{-\alpha}) H_\alpha, H\big) = K\big([X_\alpha, X_{-\alpha}], H\big) - K(X_\alpha, X_{-\alpha}) \underbrace{K(H_\alpha, H)}_{\alpha(H)} =$$

$$= -K\big(X_\alpha, \underbrace{[H, X_{-\alpha}]}_{-\alpha(H) X_{-\alpha}}\big) - K(X_\alpha, X_{-\alpha}) \alpha(H) = \big(\alpha(H) - \alpha(H)\big) K(X_\alpha, X_{-\alpha}) = 0$$

$\Rightarrow \quad [X_\alpha, X_{-\alpha}] - K(X_\alpha, X_{-\alpha}) H_\alpha = 0.$ □

Lemma 4. $\forall \alpha \in \Delta,\ \alpha(H_\alpha) = K(H_\alpha, H_\alpha) \neq 0.$

Důkaz. $\mathfrak{g}_{-\alpha} \perp \mathfrak{g}_\beta,\ \forall \beta \in (\Delta \cup \{0\}) \backslash \{\alpha\}$ a $\mathfrak{g}_{-\alpha} \not\perp \mathfrak{g} \quad \Rightarrow \quad \exists X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha},\ X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha,\ K(X_{-\alpha}, X_\alpha) = 1 \quad \Rightarrow \quad [X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$. Uvažujme $\mathfrak{g}_{\beta\alpha} = \dot{+}_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta + k\alpha} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{ad}_{X_\alpha},\ \mathrm{ad}_{X_{-\alpha}},\ \mathrm{ad}_{H_\alpha}$ ponechávají $\mathfrak{g}_{\beta\alpha}$ invariantní.

$$\begin{aligned} \mathsf{Tr}|_{\mathfrak{g}_{\beta\alpha}} \mathrm{ad}_{H_\alpha} &= \mathsf{Tr}|_{\mathfrak{g}_{\beta\alpha}} \left[\mathrm{ad}_{X_\alpha}, \mathrm{ad}_{X_{-\alpha}}\right] = 0 \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\beta + k\alpha)(H_\alpha) \dim \mathfrak{g}_{\beta + k\alpha} = \beta(H_\alpha) \dim \mathfrak{g}_{\beta\alpha} + \alpha(H_\alpha) \sum_{k \in \mathbb{Z}} k \dim \mathfrak{g}_{\beta + k\alpha} = 0. \end{aligned}$$

Pokud $\alpha(H_\alpha) = 0 \quad \Rightarrow \quad \beta(H_\alpha) = 0,\ \forall \beta \in \Delta \quad \Rightarrow \quad H_\alpha = 0$, spor s předpokladem $\alpha \in \Delta\ (\alpha(H) = K(H, H_\alpha),\ \forall H \in \mathfrak{g}_0) \quad \Rightarrow \quad \alpha(H_\alpha) \neq 0.$ □

Definice 1. $\forall \alpha \in \Delta$ definujeme $T_\alpha := \frac{2}{K(H_\alpha, H_\alpha)} H_\alpha,\ a_{\beta\alpha} := \beta(T_\alpha) = \frac{2K(H_\beta, H_\alpha)}{K(H_\alpha, H_\alpha)}$.

Nalezněme $X_{\pm\alpha} \in \mathfrak{g}_{\pm\alpha}$ splňující $K(X_\alpha, X_{-\alpha}) = \frac{2}{\alpha(H_\alpha)}$. Pak platí:

$$[X_\alpha, X_{-\alpha}] = K(X_\alpha, X_{-\alpha}) H_\alpha = T_\alpha, \tag{1}$$

$$[T_\alpha, X_{\pm\alpha}] = \pm 2 X_{\pm\alpha}\,. \tag{2}$$

To jsou komutační relace $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, konkrétně pro $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ X_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ X_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Lemma 5. V nad $\mathbb{C}$, $\dim V < +\infty$, nechť $T, X_\pm \in \mathcal{L}(V)$ splňuje $[X_+, X_-] = T,\ [T, X_\pm] = \pm 2 X_\pm$ a působí na V ireducibilně. Potom $\exists \{v_j\}_{j=0}^{\dim V - 1}$ báze splňující $T v_j = (r - 2j) v_j,\ X_- v_j = v_{j+1},\ X_+ v_j = j(r - j + 1) v_{j-1}$, kde $r = \dim V - 1$.

Důkaz. $T \in \mathcal{L}(V) \quad \Rightarrow \quad \exists v \in V,\ v \neq 0,\ \widetilde{\lambda} \in \mathbb{C},\ Tv = \widetilde{\lambda} v$

$$T(X_+ v) = [T, X_+]v + X_+ T v = 2X_+ v + \widetilde{\lambda} X_+ v = (\widetilde{\lambda} + 2) X_+ v$$

$\Rightarrow \quad X_+ v = 0 \quad \vee \quad \widetilde{\lambda} + 2 \in \sigma(T) \quad \Rightarrow$ po konečně mnoho krocích získame $v_0 \in V,\ v_0 \neq 0,\ Tv_0 = \lambda v_0,\ X_+ v_0 = 0$ a položíme $v_j = X_-^j v_0,\ \forall j \in \mathbb{N}$.

$$Tv_j = [T, X_-] X_-^{j-1} v_0 + X_- T X_-^{j-1} v_0 = -2X_- X_-^{j-1} v_0 + X_- T X_-^{j-1} v_0 = \cdots = (\lambda - 2j) X_-^j v_0 = (\lambda - 2j) v_j$$

$\Rightarrow \quad$ pokud $v_j \neq 0$ pak jsou to vlastní vektory T příslušné různým vlastním číslům $\quad \Rightarrow \quad \exists k \in \mathbb{N} \cup \{0\} : v_k \neq 0,\ v_{k+1} = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{span}\{v_0, \ldots, v_k\}$ je podprostor V uzavřený vůči T, X_-. Indukcí ukážeme že $X_+ v_j = j(\lambda - j + 1) v_{j-1}$:

$$\begin{aligned}
X_+ v_1 &= X_+ X_- v_0 = [X_+, X_-] v_0 + X_- X_+ v_0 = T v_0 = \lambda v_0 \\
X_+ v_2 &= X_+ X_- v_1 = T v_1 + X_- X_+ v_1 = (\lambda - 2) v_1 + \lambda v_1 = (2\lambda - 2) v_1 \\
&\ \vdots \\
X_+ v_j &= X_+ X_- v_{j-1} = T v_{j-1} + X_- (j-1)(\lambda - j + 2) v_{j-2} = \\
&= \big((\lambda - 2j + 2) + (j-1)(\lambda - j + 2)\big) v_{j-1} = \big(j(\lambda - j + 2) - j\big) = j(\lambda - j + 1) v_{j-1}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \operatorname{span}\{v_0, \ldots, v_k\}$ je uzavřený i vůči $X_+ \quad \Rightarrow \quad$ je to invariantní podprostor ireducibilní reprezentace $\quad \Rightarrow \quad V = \operatorname{span}\{v_0, \ldots, v_k\},\ k = r,\ X_+ v_{r+1} = (r+1)(\lambda - r) v_r = 0$, přičemž $v_r \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = r$. □

Lemma 6. Nechť $\mathfrak{g}$ poloprostá Lieova algebra, $\mathfrak{g}_0$ její Cartanova podalgebra, Δ množina kořenů, pak:

1. $\forall \alpha, \beta \in \Delta,\ \exists p, q \in \mathbb{Z}, p \leqslant 0 \leqslant q,\ \{\beta + k\alpha\}_{k=p}^{q}$ je nepřerušená posloupnost kořenů, případně 0. Navíc žádné jiné kořeny tvaru $\beta + k\alpha$ neexistují a platí
$$a_{\beta\alpha} = \beta(T_\alpha) = 2\frac{\beta(H_\alpha)}{\alpha(H_\alpha)} = \frac{2K(H_\beta, H_\alpha)}{K(H_\alpha, H_\alpha)} = -(p+q)\,. \tag{3}$$

2. $\alpha \in \Delta$. Potom $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$ a $\beta \in \Delta \cap \operatorname{span}\{\alpha\} \Leftrightarrow \beta = \pm\alpha$.

3. $\forall \alpha, \beta \in \Delta, \alpha + \beta \neq 0$. Potom $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] = \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$. (Pokud $\alpha + \beta \notin \Delta \cup \{0\}$, je $\mathfrak{g}_{\alpha+\beta} = \{0\}$.)

4. $\forall \alpha, \beta \in \Delta, \epsilon = \operatorname{sgn} a_{\beta\alpha}$. Potom $\beta - \epsilon\alpha,\ \beta - 2\epsilon\alpha, \ldots, \beta - a_{\beta\alpha}\alpha$ jsou kořeny.

Důkaz. $\alpha, \beta \in \Delta \quad \Rightarrow \quad \exists X_\beta \in \mathfrak{g}_\beta,\ X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha,\ X_{-\alpha} \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ nenulové a platí $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = T_\alpha,\ [T_\alpha, X_{\pm\alpha}] = \pm 2X_{\pm\alpha}$. Označíme $V := \operatorname{span}\left\{ (\mathrm{ad}_{X_\alpha})^j \left(\mathrm{ad}_{X_{-\alpha}}\right)^k X_\beta \,\middle|\, j, k \in \mathbb{Z} \right\} \subset \mathfrak{g}_{\beta\alpha} = bigplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathfrak{g}_{\beta + k\alpha}$ a máme $\mathrm{ad}_{T_\alpha} X_\beta = \beta(T_\alpha) X_\beta$, takže

$$\mathrm{ad}_{T_\alpha} (\mathrm{ad}_{X_\alpha})^j \left(\mathrm{ad}_{X_{-\alpha}}\right)^k X_\beta = (\beta(T_\alpha) + 2j - 2k) (\mathrm{ad}_{X_\alpha})^j \left(\mathrm{ad}_{X_{-\alpha}}\right)^k X_\beta.$$

$\Rightarrow \quad V$ uzavřený vůči $\mathrm{ad}_{T_\alpha},\ \mathrm{ad}_{X_{\pm\alpha}} : \mathrm{ad}_{T_\alpha} = \left[\mathrm{ad}_{X_\alpha}, \mathrm{ad}_{X_{-\alpha}}\right]$.

$$0 = \mathrm{Tr}|_V\, \mathrm{ad}_{T_\alpha} = \sum_{j,k} (\beta(T_\alpha) + 2j - 2k) \dim \operatorname{span}\left\{ (\mathrm{ad}_{X_\alpha})^j \left(\mathrm{ad}_{X_{-\alpha}}\right)^k X_\beta \right\}$$

$$\begin{aligned}
(\mathrm{ad}_{X_\alpha})^{j+1} \left(\mathrm{ad}_{X_{-\alpha}}\right)^{k+1} X_\beta &= (\mathrm{ad}_{X_\alpha})^j \left[\mathrm{ad}_{X_\alpha}, \mathrm{ad}_{X_{-\alpha}}\right] \left(\mathrm{ad}_{X_{-\alpha}}\right)^k X_\beta + (\mathrm{ad}_{X_\alpha})^j \mathrm{ad}_{X_{-\alpha}} \mathrm{ad}_{X_\alpha} \left(\mathrm{ad}_{X_{-\alpha}}\right)^k X_\beta = \\
&= (\mathrm{ad}_{X_\alpha})^j \mathrm{ad}_{T_\alpha} \left(\mathrm{ad}_{X_{-\alpha}}\right)^k X_\beta + \ldots \quad \in \operatorname{span}\left\{ (\mathrm{ad}_{X_\alpha})^j \left(\mathrm{ad}_{X_{-\alpha}}\right)^k X_\beta \right\}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ pro každé získané vlastní číslo ad_{T_α} na V máme 1 vlastní vektor $\Rightarrow$ protože je to ireducibilní reprezentace, dle předchozího lemmatu platí $r = \dim V - 1$, $\sigma\left(\mathrm{ad}_{T_\alpha}|_V\right) = \{r, r-2, \ldots, -r\}$ $\Rightarrow$ $\{\beta(T_\alpha) + 2k\}_{k=p}^{q} \subset \{r, r-2, \ldots, -r\}$, tedy

$$\left.\begin{aligned} \beta(T_\alpha) + 2q &= r \\ \beta(T_\alpha) + 2p &= -r \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \beta(T_\alpha) = -(p+q).$$

Dále označíme $\widetilde{V} := \mathrm{span}\{X_{-\alpha}\} \dotplus \dot{+}_{k\in\mathbb{N}_0} \mathfrak{g}_{k\alpha}$, takže $\widetilde{V}$ je invariantní vzhledem k ad_{X_α}, ad_{T_α}.

$$0 = \mathsf{Tr}|_{\widetilde{V}}\, \mathrm{ad}_{T_\alpha} = \mathsf{Tr}|_{\widetilde{V}} \left[\mathrm{ad}_{X_\alpha}, \mathrm{ad}_{X_{-\alpha}}\right] = -\underbrace{\alpha(T_\alpha)}_{=2} + \sum_{k\in\mathbb{N}} k \underbrace{\alpha(T_\alpha)}_{=2} \dim \mathfrak{g}_{k\alpha}$$

$\Rightarrow$ $\sum_{k\in\mathbb{N}} k \dim \mathfrak{g}_{k\alpha} = 1$ $\Rightarrow$ $\mathfrak{g}_\alpha = 1$, $\mathfrak{g}_{k\alpha} = 0$, $\forall k \geqslant 2$, $k \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $k\alpha \notin \Delta$, $\forall k \geqslant 2$, $k \in \mathbb{N}$. Použitím $\frac{\alpha}{k}$ místo α dostaneme $\frac{\alpha}{k} \notin \Delta$, $\forall k \geqslant 2$, $k \in \mathbb{N}$. Nechť $\beta = c\alpha$, $c \notin \mathbb{Z}$, BÚNO $c > 0$ (jinak $\alpha \to -\alpha$), pak

$$\beta(T_\alpha) = c\alpha(T_\alpha) = 2c = b \in \mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{b}{2},\ b \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \{\beta + k\alpha\}_{k=p}^{q} = \left\{\left(\frac{b}{2} + k\right)\alpha\right\}_{k=p}^{q}.$$

Zároveň $b = -(p+q)$, $p \leqslant 0 \leqslant q$ $\Rightarrow$ $-p \geqslant b$, takže

$$\frac{\alpha}{2} = \left(\frac{b}{2} + \underbrace{\left(-\frac{b}{2} + \frac{1}{2}\right)}_{\geqslant p}\right)\alpha \in \Delta$$

$\Rightarrow$ spor s tím, že $\frac{\alpha}{2} \notin \Delta$. Tím je dokázan bod 2., zbytek bodu 1. dokážeme sporem: Nechť $\exists \widetilde{\beta} = \beta + n\alpha$, $n < p \vee n > q$, zkonstruujeme posloupnost z $\widetilde{\beta} \in \Delta$ a přepíšeme ji zpátky pomocí $\{\beta + k\alpha\}_{k=\widetilde{p}}^{\widetilde{q}}$. Díky tomu, že $\dim \mathfrak{g}_\alpha = 1$, $\forall \alpha \in \Delta$, musí být $\{p, \ldots, q\} \cap \{\widetilde{p}, \ldots, \widetilde{q}\} = \varnothing$ $\Rightarrow$ $\widetilde{p} > q \vee \widetilde{q} < p$. Analogicky máme taky $a_{\beta\alpha} = -(\widetilde{p} + \widetilde{q})$, takže

$$\widetilde{p} + \widetilde{q} < \widetilde{p} + p < 2p \leqslant p + q \qquad\qquad (\text{BÚNO } \widetilde{q} < p)$$

$\Rightarrow$ $\alpha_{\alpha\beta} < \alpha_{\alpha\beta}$, spor. Tím je bod 1 dokázan. Bod 3. plyne z ireducibility konstruované na V. Zbýva tedy už jen bod 4. BÚNO $a_{\beta\alpha} > 0$, $-a_{\beta\alpha} = (p+q)$ $\Rightarrow$ $p \leqslant -a_{\beta\alpha} \leqslant q$ $\Rightarrow$ $\beta - a_{\beta\alpha}\alpha \in \Delta$. □

Definice 2. $a_{\beta\alpha} = \beta(T_\alpha) = \frac{2K(H_\beta, H_\alpha)}{K(H_\alpha, H_\alpha)} = -(p+q)$ nazýváme **Cartanova celá čísla**.

Věta 1. (**Weyl-Chevalleyho normální forma**) Buď $\mathfrak{g}$ komplexní poloprostá Lieova algebra, $\mathfrak{g}_0$ její Cartanova podalgebra, Δ systém kořenů. Pak $\mathfrak{g}$ je direktním součtem $\mathfrak{g}_0$ a jednorozměrných kořenových podprostorů $\mathfrak{g}_\alpha = \mathrm{span}\{E_\alpha\}$ a platí:

- $[H, E_\alpha] = \alpha(H)E_\alpha$, $\forall H \in \mathfrak{g}_0$,
- $[E_\alpha, E_{-\alpha}] \in \mathfrak{g}_0$, $\forall \alpha \in \Delta$,
- $[E_\alpha, E_\beta] = N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}$, $N_{\alpha\beta} \neq 0$ pro $\alpha, \beta, \alpha+\beta \in \Delta$.

(Navíc lze volit E_α tak, aby $N_{\alpha\beta} \in \mathbb{Z}$, $N_{\alpha\beta} = -N_{(-\alpha)(-\beta)} = \pm(-p+1)$, kde $p \leqslant 0$ je nejmenší číslo splňující $\beta + p\alpha \in \Delta$, volba $\pm$ je částečně daná strukturou $\mathfrak{g}$ a částečně záleží na nás...)

Důkaz. Plyne z předchozího lemmatu. □

Poznámka 1. Protože víme, že komutační relace určují $\mathfrak{g}$ jednoznačně (až na izomorfismus), můžeme tak klasifikovat všechny poloprosté komplexní algebry.