1 Souvislost Lieových grup a algeber

Poznámka 1. Souvislá varieta M je jednoduše souvislá $\Leftrightarrow$ všechny uzavřené křivky lze hladce zdeformovat do bodu, tj. na konstantní zobrazení $S^1 \to x_0 \in M$.

Definice 1. Buďte M, $\overline{M}$ souvislé variety. $\overline{M}$ je **nakrytí** M právě, když $\exists\ \pi : \overline{M} \to M$ splňující

- $\forall x \in M,\ \exists U = U^\circ,\ \pi^{(-1)}(U) = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{I}} U_\alpha,\ U_\alpha = U_\alpha^\circ \subset \overline{M},\ U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset,\ \forall\alpha \neq \beta,$
- $\pi|_{U_\alpha} : U_\alpha \to U$ je difeomorfismus.

Poznámka 2. Pojem nakrytí je podrobněji rozebrán ve Feckovi, kapitola 13.3.

Příklad 1. $M = S^1,\ \overline{M} = S^1,\ \Pi(\mathrm{e}^{i\varphi}) = \mathrm{e}^{2i\varphi}$

Příklad 2. $M = S^1,\ \overline{M} = \mathbb{R},\ \Pi(\varphi) = \mathrm{e}^{i\varphi}$

Definice 2. Nakrytí $\overline{M}$ variety M je **univerzální** právě, když $\overline{M}$ je jednoduše souvislá.

Poznámka 3. Všechna univerzální nakrytí souvislé variety jsou izomorfní.

1.1 Konstrukce univerzálního nakrytí

Poznámka 4. Pro křivky $\gamma_1 : \langle 0,1\rangle \to M,\ \widetilde{\gamma} : \langle 0,1\rangle \to M,\ \gamma_1(1) = \widetilde{\gamma}(0)$ definujeme:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 \circ \widetilde{\gamma} : \langle 0,1\rangle \to M : \gamma_1 \circ \widetilde{\gamma}(t) &= \gamma_1(2t) && 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\\
&= \widetilde{\gamma}(2t) && \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1\\
\gamma^{-1}(t) : \langle 0,1\rangle \to M : \gamma^{-1}(t) &= \gamma(1-t) && 0 \leqslant t \leqslant 1
\end{aligned}$$

$x_0 \in M$ fixní, pak $\overline{M} = \{[\gamma] | \gamma : \langle 0,1\rangle \to M,\ \gamma(0) = x_0\}$, $\gamma \sim \widetilde{\gamma} \Leftrightarrow \big(\gamma(1) = \widetilde{\gamma}(1) \wedge \gamma \circ \widetilde{\gamma}^{-1}$ je možno deformovat do $\gamma(t) = x_0$ $\big)$. Vezmeme jednoduše souvislé okolí $x \in M$, $U_x = U_x^\circ \Rightarrow$ $\forall y \in U,\ \exists \gamma_{xy} : \langle 0,1\rangle \to M :\ \gamma_{xy}(0) = x,\ \gamma_{xy}(1) = y,\ \gamma_{xy}(t) \in U_x,\ \forall t \in \langle 0,1\rangle$. Všechny takové $\gamma_{x,y}$ spojující x a y uvnitř jednoduše souvislého okolí jsou ekvivalentní. Definujeme $\overline{U} \in \overline{M}$ okolí $[\gamma]$ jako $\overline{U} = \{[\gamma \circ \gamma_{xy}] | y \in U_x\}$. Platí tedy $\gamma \circ \gamma_{xy}(0) = x_0,\ \gamma \circ \gamma_{xy}(1) = y.$ $\Rightarrow$ Definujeme-li $\Pi([\gamma]) = \gamma(1) \in M$, pak takto definované $\overline{U}$ je homeomorfní U_x.

Π definujeme jako hladké zobrazení, pomocí $\left(\Pi|_{\overline{U}}\right)^{-1}$ přeneseme hladkou strukturu a ukážeme že tímto lze definovat hladkou strukturu na $\overline{M}$. O M lze pak dokázat, že je jednoduše souvislé.

Je-li G souvislá Lieova grupa, pak na $\overline{G}$ můžeme definovat strukturu Lieovy grupy následovně: $x_0 \equiv e,\ \forall g \in G,\ \gamma_g : \langle 0,1\rangle \to G,\ \gamma_g(1) = g,$

- $[\gamma_g] \cdot [\gamma_h] \equiv [\gamma_g \cdot L_g(\gamma_h)]$, $\forall g, h \in G$, kde $L_g(\gamma_h)(t) = g \cdot \gamma_h(t),\ \forall t$
- $\bar{e} = [\gamma_e]$, $\gamma_e(t) = e,\ \forall t$
- $[\gamma_g]^{-1} = \left[L_{g^{-1}}\left(\gamma_g^{-1}\right)\right]$
- $\Pi\left([\gamma_g] \cdot [\gamma_h]\right) = g \cdot h$, tj. Π je homomorfizmus grup

$\Rightarrow$ $\mathfrak{g} \simeq \overline{\mathfrak{g}}$, protože okolí počátků jsou difeomorfní.

Věta 1. (Ado) Pro libovolnou konečněrozměrnou Lieovu algebru $\mathfrak{g}$ existuje její věrná konečněrozměrná reprezentace $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$, $\dim V < +\infty$, $\mathfrak{g} \simeq \rho(\mathfrak{g}) \subset\subset \mathfrak{gl}(V)$. Bez důkazu.

Důsledek 1. Ke každé Lieově algebře existuje příslušná souvislá Lieova grupa $G \subset\subset GL(V)$. Dále ke G můžeme najít jednoduše souvislou $\overline{G}$ (nikoliv již uvnitř $GL(V)$).

Věta 2. Ke každé konečněrozměrné Lieově algebře $\mathfrak{g}$ existuje právě jedna souvislá a jednoduše souvislá Lieova grupa G taková, že $\mathfrak{g}$ je její Lieova algebra. Všechny ostatní souvislé Lieovy grupy s touto algebrou g jsou nakrývány G a mohou být proto zapsány jako G/D, kde D je diskrétní normální podgrupa. Bez důkazu.

Poznámka 5. D normální $\Leftrightarrow gDg^{-1} = D, \ \forall g \in G \quad \Rightarrow \quad$ pro pevně zvolené $d_0 \in D$ a $\phi : G \to D \subset G : \phi(g) = gd_0g^{-1} \in D$, je $\phi(G)$ souvislá díky tomu, že G je souvislá a ϕ hladké. A protože D je diskrétní podmnožina $G \quad \Rightarrow \quad \phi(g) = d_0, \ \forall g \in G \quad \Rightarrow \quad gd_0 = d_0g, \ \forall g \in G \quad \Rightarrow \quad D \subset \mathcal{Z}(G) = \{h \in G | hg = gh, \ \forall g \in G\} \quad \Rightarrow \quad D$ je Abelovská.

Poznámka 6. ρ reprezentace $\mathfrak{g}$ na V, $\dim V < +\infty \quad \Rightarrow \quad \rho$ je reprezentace jednoduše souvislé grupy G. Zároveň ale pokud $\rho(D) \neq \{\mathbb{1}\}$, pak nelze skonstruovat $\rho : G/D \to GL(V)$, tj.:

- $\rho(D) = \{\mathbb{1}\}$ a máme tedy reprezentaci G/D,
- nebo $\rho(D) \neq \{\mathbb{1}\}$ a reprezentaci nemáme (víceznačná reprezentace).

Poznámka 7. Pomocí předchozích vět máme vyřešen problém všech souvislých G se stejnou $\mathfrak{g}$. Teoreticky můžeme vždy nalézt univerzální nakrytí $\overline{G}$ a následně ho faktorizovat podle možných D a tím získám všechny G.

Příklad 3. Pro $su(2)$ existují právě 2 souvislé Lieovy grupy $SU(2)$ a $SO(3) = SU(2)/_{\{-\mathbb{1},\mathbb{1}\}}$.