1 Akce grupy na varietě

Definice 1. **(Levá) akce Lieovy grupy** G na varietě M je hladké zobrazení $\phi : G \times M \to M$ vyhovující

- $\phi(g_1 g_2, m) = \phi(g_1, \phi(g_2, m))$, $\forall g_1, g_2 \in G$, $\forall m \in M$,
- $\phi(e, m) = m$, $\forall m \in M$.

Poznámka 1. Obdobně **pravá akce**:

- $\phi(m, g_1 g_2) = \phi(\phi(m, g_1), g_2)$, $\forall g_1, g_2 \in G$, $\forall m \in M$,
- $\phi(m, e) = m$, $\forall m \in M$.

Pravá akce lze vyjádřit pomocí levé akce záměnou $g \to g^{-1}$.

Definice 2. Pro uzavřenou (v topolgii G) podgrupu H Lieovy grupy G. Definujeme **levé cosety** $gH = \{gh | h \in H\}$. ($gH = \mathcal{O}_g$ jsou tedy orbity pravé akce H na G.) Množinu levých cosetů označíme G/H, tj. $G/H = \{gH | g \in G\}$.

Poznámka 2. Pokud H je uzavřená podgrupa G, lze na G/H zavést právě jednu hladkou strukturu takovou, že $(G, G/H, \pi; H)$, $\pi : G \to G/H$, $\pi(g) = gH$, je fibrovaný prostor.

Definice 3. Akce $\phi : G \times M \to M$ je **tranzitivní** $\Leftrightarrow (\forall m_1, m_2 \in M)(\exists g \in G)(m_2 = \phi(g, m_1))$.

Definice 4. Nechť ϕ tranzitivní $x_0 \in M$. Grupa izotropie (nebo také grupa stability nebo malá grupa) bodu x_0 je

$$H_{x_0} = \{g \in G | \phi(g, x_0) = x_0\} . \tag{1}$$

Poznámka 3. Protože pro libovolné $x \in M$, $\exists g_x \in G$ takové, že $x = \phi(g_x, x_0)$, tedy $\forall g_0 \in H_{x_0}$, $\phi(g_x g_o g_x^{-1}, x) = \phi(g_x, \phi(g_0, \phi(g_x^{-1}, x))) = x$, platí $H_x = g_x H_{x_0} g_x^{-1}$, tj. všechny grupy izotropie jsou konjugované, totožné v případě normálních H_x.

Důsledek 1. Pro tranzitivní ϕ je $M \simeq G/H_{x_0}$ a volba nezávisí na x_0, protože $\forall g_x \in G$, $\phi(g_x H_{x_0}, x_0) = \phi(g_x, x_0) = x$, máme tedy korespondenci $G/H_{x_0} \ni g_x H_{x_0} \leftrightarrow x \in M$.

Definice 5. Varietu, kterou lze zapsat ve tvaru $M \simeq G/H_{x_0}$ pro nějakou Lieovu grupu G s tranzitivní akcí nazveme **homogenní prostor**.