1 Vztah mezi Lieovou grupou a její algebrou

Definice 1. (Homomorfismus Lieových grup G a H)

- **Homomorfismus** G **a** H je libovolné hladké $\phi : G \to H$, $\phi(g \cdot_G h) = \phi(g) \cdot_H \phi(h)$, $\forall g, h \in G$.
- **Izomorfismus** G **a** H je bijektivní homomorfismus s hladkou inverzí.

Definice 2. **Jednoparametrická podgrupa v** G je homomorfismus $\varphi : (\mathbb{R}, +) \to G$.

Důsledek 1. Platí $\varphi(s+t) = \varphi(s)\varphi(t) = \varphi(t)\varphi(s)$, tedy nutně $\varphi(0) = e$.

Příklad 1. G Maticová grupa:

$$\begin{aligned}\dot{g}(t) = g(t) \cdot \underbrace{\dot{g}(0)}_{konst.} &= L_{g(t)*}\left(\dot{g}(0)\right) \\ &= \dot{g}(0) \cdot g(t) = R_{g(t)*}\left(\dot{g}(0)\right)\end{aligned}$$

Poznámka 1. Obecně:

$$g(s+t) = g(t)g(s) \equiv L_{g(t)}g(s) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\dot{g}(t)}_{T_{g(t)}G} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_0 \left(L_{g(t)}g(s)\right) = L_{g(t)*} \underbrace{\in \dot{g}(0)}_{T_e G}$$

Označíme-li pro $X \in \mathfrak{g}$, $X|_e = \dot{g}(0)$, pak $\dot{g}(t) = L_{g(t)*}(X|_e) = X|_{g(t)}$.

Důsledek 2. Jednoparametrické podgrupy jsou integrální křivky levoinvariantních vektorových polí, tj. elementů Lieovy algebry, vycházející z e.

1.1 Exponenciální zobrazení

Na základě integrálních křivek můžeme definovat zobrazení $\mathfrak{g} \to G$, které danému vektoru $X|_e \in \mathfrak{g}$ přiřadí nějaký bod na příslušné integrální křivce levoinvariantního vektorového pole X, ke kterému je $X|_e$ tečným vektorem.

Definice 3. $\exp : \mathfrak{g} \to G$ definujeme $\exp(tX) = \varphi(t)$, $\exp(X) = \varphi(1)$, kde φ je jednoparametrická podgrupa generovaná $X \in \mathfrak{g}$ (integrální křivka $X \in \mathfrak{g}$).

Poznámka 2. $\exp =: \mathrm{e}$ tedy splňuje $\varphi(t+s) = \mathrm{e}^{(t+s)X} = \varphi(t)\varphi(s) = \mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{sX}$.

Příklad 2. Exponenciela $\mathfrak{af}(1) \to Af(1)$.

Hledáme integrální křivky vektorového pole z příkladu **??**. Pro libovolné levoinvariantní pole jsou rovnice integrálních křivek $\dot{x}(t) = \alpha x(t)$ a $\dot{y}(t) = \beta x(t)$ s počátečními podmínkami $(x(0), y(0)) = (1, 0)$, řešením je $(x(t), y(t)) = \left(\mathrm{e}^{\alpha t}, \frac{\beta}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha t} - 1)\right)$. Exponencielu získáme dosazením $t = 1$, tj. $\mathrm{e}^X = \mathrm{e}^{\alpha x \partial_x + \beta x \partial_y} = (\mathrm{e}^{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha} - 1))$ (pro $\alpha = 0$ vyjde výsledek stejně jako provedením $\lim_{\alpha \to 0}$).

V maticovém vyjádření je pole $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, platí $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \alpha^k & \alpha^{k-1}\beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, takže získáme $\exp\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!}, & \frac{\beta}{\alpha} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \\ 0, & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\alpha}, & \frac{\beta}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha} - 1) \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$.

Příklad 3. Exponenciela maticových grup G.

Hledáme integrální křivku $\gamma(t)$ levoinvariantního vektorového pole, určenou $X \in \mathfrak{g}$. Jak toto pole vypadá víme z příkladu **??** (značení převezmeme z tohoto příkladu, tj. $X^i_j(e) = \alpha^i_j$). Máme tak pro složky pole $X^i_j(\gamma(t)) = \gamma^i_k(t) X^k_j(e)$. Rovnice pro integrální křivky tohoto pole je

$$\dot{\gamma}^i_j(t) = \gamma^i_k(t) X^k_j(e), \quad \gamma^i_j(0) = \delta^i_j, \qquad \Leftrightarrow \qquad \dot{\gamma}(t) = \gamma(t) X(e), \quad \gamma(0) = \mathbb{1}. \tag{1}$$

Z maticového zápisu vidíme, že řešením je maticová exponenciela $\gamma(t) = \mathrm{e}^{tX(e)}$, výsledkem je $\mathrm{e}^X = \gamma(1) = \mathrm{e}^{X(e)}$.

Věta 1. Pro libovolnou čtvercovou matici A platí: $\in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, potom $\det \mathrm{e}^A = \mathrm{e}^{\mathsf{Tr} A}$.

Důkaz. Předpokládame, že $\exists B$, tak, že $D = BAB^{-1}$ diagonální (diagonalizovatelné matice jsou husté v množine všech matic a obě strany rovnice jsou spojité $\Rightarrow$ platí obecně).

$$\mathsf{Tr} D = \mathsf{Tr} BAB^{-1} = \mathsf{Tr} AB^{-1}B = \mathsf{Tr} A$$

Platí $\mathrm{e}^{BAB^{-1}} = B\mathrm{e}^A B^{-1}$ z definice pomocí řady, proto $\det \mathrm{e}^D = \det B \det B^{-1} \det \mathrm{e}^A = \det \mathrm{e}^A$, a protože $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{e}^D = \mathrm{diag}(\mathrm{e}^{\lambda_1}, \ldots, \mathrm{e}^{\lambda_n})$, tedy

$$\det \mathrm{e}^D = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{\lambda_k} = \mathrm{e}^{\sum_k \lambda_k} = \exp(\mathsf{Tr} D).$$

□

Věta 2. Buď G Lieova grupa, pak $\exp : \mathfrak{g} \to G : X \to \mathrm{e}^X$ je lokální difeomorfismus okolí $0 \in \mathfrak{g}$ na okolí $e \in G$. (Toto zobrazení není obecně surjektivní ani injektivní na celé G).

Důkaz. $\mathfrak{g}$ jako vektorový prostor lze chápat jako varietu, $T_0\mathfrak{g} \cong \mathfrak{g} \quad \Rightarrow \quad \exp$ je hladké zobrazení variet. $\exp_*\big|_0 : T_0\mathfrak{g} \equiv \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \equiv T_e G, \exp(tX)$ je integrálí křivka procházející e, s tečným vektorem $X \quad \Rightarrow \quad \exp_*\big|_0 = \text{identita} \quad \Rightarrow \quad$ podle věty o inverzní funkci je exp lokální difeomorfismus. Detailně: $\exp : X \to \mathrm{e}^X$

$$\exp_*(X|_0) f = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathrm{e}^{tX+0}) - f(\mathrm{e}^0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\mathrm{e}^{tX}) - f(e)}{t} \stackrel{\text{def.}}{=} Xf|_e$$

$\Rightarrow \quad \exp_*(X|_0) = \exp_*(X)\big|_e = X|_e.$ □

Poznámka 3. Pro matice platí: $\exp_*(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{tX})\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(1 + tX + O(t^2)\right)\Big|_{t=0} = X.$

Poznámka 4. Je zřejmé, že exp nemůže být surjektivní pro grupy s více komponentami souvislosti (nelze spojit křivkou body z různých komponent). exp není obecně surjektivní ani pro souvislé G, pouze v případě, že je G kompaktní.

1.2 Vyšetřování souvislosti variet

Definice 4. Buďte $V \subset M$ dif. variety (V podvarieta M). V je **deformační retrakt** M právě tehdy, když $\exists\ r : \langle 0, 1 \rangle \times M \to M$ spojité, takové že

- $\forall m \in M, r(0, m) = m,$
- $\forall v \in V, \forall t \in \langle 0, 1 \rangle$: $r(t, v) = v,$
- $\forall m \in M, r(1, m) \in V.$

Definice 5. Souvislá varieta M je jednoduše souvislá právě tehdy, když platí:

- $\forall \gamma : \langle 0, 1 \rangle \to M$, spojité, $\gamma(0) = \gamma(1)$
- $\exists \phi : \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \to M$, spojité takové, že $\forall t \in \langle 0, 1 \rangle,\ \phi(0, t) = \gamma(t),\ \phi(1, t) = \gamma(0)$

Věta 3. V je deformační retrakt M, pak

- M souvislá $\Leftrightarrow$ V souvislá,
- M jednoduše souvislá $\Leftrightarrow$ V jednoduše souvislá.

Důkaz. Souvislost zřejmá. Jednoduchá souvislost plyne z toho, že pro křivky platí $\gamma_V(t) = r(1, \gamma_M(t))$. □

Poznámka 5. Souhrnné pojednání o souvislosti námi používaných grup je v *The American Mathematical Monthly* Vol. 74, No. 8 (Oct., 1967), pp. 964-966.[1]

Příklad 4. $SL(2,\mathbb{R}) = \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right)$, $xw - zy = 1$ není jednoduše souvislá.

Lze ji zdeformovat na $SO(2)$: Nejprve definujeme V_1 tak, aby

$$\forall \begin{pmatrix} \tilde{x} & \tilde{y} \\ \tilde{z} & \tilde{w} \end{pmatrix} \in V_1,\ \tilde{x}^2 + \tilde{z}^2 = 1,\ \tilde{x}\tilde{w} - \tilde{z}\tilde{y} = 1.$$

Položíme $r_1\left(t, \left(\begin{smallmatrix} x & y \\ z & w \end{smallmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} \alpha(t)x & \frac{1}{\alpha(t)}y \\ \alpha(t)z & \frac{1}{\alpha(t)}w \end{pmatrix}$, kde $\alpha(0) = 1$ a pro $\alpha(1)$ platí $\alpha^2(1)\left(x^2 + z^2\right) = 1$. Zvolime proto $\alpha(t) = \frac{1}{(x^2+z^2)^{t/2}}$ a $V_1 = \operatorname{Im} r_1(1,.) \subset SL(2,\mathbb{R})$ už splňuje požadavky. Dále zdeformujeme V_1 tak, aby sloupce byly ortonormální vektory:

$$r_2\left(t, \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} - t\,(xy + zw)\begin{pmatrix} 0 & x \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \operatorname{Im} r_2(1,.) = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in Sl(2,\mathbb{R}) \middle| x^2 + z^2 = 1,\ xy + zw = 0 \right\}$$

$$xy + zw = 0 \quad\Rightarrow\quad x = -\frac{zw}{y} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} xw - zy &= -\tfrac{zw^2}{y} - zy = 1 &\Rightarrow w^2 + y^2 &= -\tfrac{y}{z} \\ x^2 + z^2 &= \tfrac{z^2w^2}{y^2} + z^2 = 1 &\Rightarrow w^2 + y^2 &= \tfrac{y^2}{z^2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad w^2 + y^2 = 1 \quad\Rightarrow\quad V_2 = SO(2) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right) \middle| \theta \in \langle 0, 2\pi\rangle\right\}$ souvislá a topologicky eqvivalentní S^1. $SL(2,\mathbb{R})$ je tedy souvislá, ale není jednoduše souvislá.

Podíváme se ještě na $\exp : \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \to SL(2,\mathbb{R})$.

$$\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} x^2 + yz & 0 \\ 0 & zy + x^2 \end{pmatrix} = -\det A \cdot \mathbb{1}$$

$$\mathrm{e}^A = \begin{cases} \cos\det A \cdot \mathbb{1} + \frac{1}{\sqrt{\det A}} \sin\sqrt{\det A} \cdot A & \det A > 0 \quad\Rightarrow\quad \operatorname{Tr} e^A = 2\cos\sqrt{\det A} \in \langle -2, 2\rangle \\ \cosh\sqrt{|\det A|} \cdot \mathbb{1} + \frac{1}{\sqrt{|\det A|}} \sinh\sqrt{|\det A|} \cdot A & \det A < 0 \quad\Rightarrow\quad \operatorname{Tr} e^A = 2\cosh\sqrt{|\det A|} \geqslant 2 \\ \mathbb{1} + A & \det A = 0 \quad\Rightarrow\quad \operatorname{Tr} \mathrm{e}^A = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad \operatorname{Tr} \mathrm{e}^A \geqslant -2,\ \forall A \in \mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \quad\Rightarrow\quad$ např. $\left(\begin{smallmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{smallmatrix}\right) \in SL(2,\mathbb{R}) \setminus \exp\left(\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\right)$.

Důsledek 3. G nemusí být celé pokryté exponenciélou, pokud je jen souvislé. Pro G jednoduše souvislé to už platí. Bez důkazu.

Poznámka 6. Lze ukázat, že $SL(n,\mathbb{R})$ není jednoduše souvislá $\forall n \in \mathbb{N}$.

Věta 4. Buď G souvislá Lieova grupa, $g \in G$. Pak existuje $n \in \mathbb{N}$, $X_1, \ldots, X_n \in \mathfrak{g}$ takové, že $g = \mathrm{e}^{X_1}\mathrm{e}^{X_2} \ldots \mathrm{e}^{X_n}$.

Důkaz. Mějme $e \in U_0 = U_0^\circ \subset G$. Předpokládame $(.)^{-1} : U_0 \to U_0$ (jinak bereme $\tilde{U}_0 = U_0 \cap U_0^{-1}$, kde $U_0^{-1} = \{g^{-1} | g \in U_0\}$). Konstruujeme $U_i = \bigcup_{g \in U_{i-1}} gU_0$, zřejmě $U_i \subset U_i + 1$ a protože $L_g(U_0) = \left(L_g(U_0)\right)^\circ$, je taky $U_i = U_i^\circ$. Označme $U = \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} U_i$, pak $U = U^\circ$ a pro $V = G \setminus U$ platí $V = \overline{V}$. Chceme ukázat, že $\forall g \in V$, $gU_0 = L_g(U_0) = \left(L_g(U_0)\right)^\circ \subset V$. Sporem: $L_g(U_0) \cap U \neq \varnothing \quad\Rightarrow\quad \exists u_0 \in U_0,\ gu_0 \in U \quad\Rightarrow\quad g \in Uu_0^{-1} \subset U$, protože $U_i u_0^{-1} \subset U_i u_0 \subset U_{i+1} \subset U$, spor. $\Rightarrow \quad V = V^\circ \quad\Rightarrow\quad U = \overline{U},\ e \in U \quad\Rightarrow\quad U \neq \varnothing \quad\Rightarrow\quad U = G$ □

[1] http://www.jstor.org/stable/2315278

1.3 Tok levoinvariantního vektorového pole

Věta 5. Tok generovaný levoinvariatním X (tj. $X \in \mathfrak{g} \cong T_eG$) je jednoparametrická grupa pravých translací, tj.

$$\Phi_X^t(g) = g\mathrm{e}^{tX} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_X^t = R_{\mathrm{e}^{tX}} \,.$$

Důkaz. Pro $X \in \mathfrak{g}$ je $X|_e \in T_eG$ a e^{tX} je integrální křivka procházející e. Ukážeme, že integrální křivka tohoto pole procházející g je $g\mathrm{e}^{tX}$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g\mathrm{e}^{tX} = L_{g*} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{e}^{tX} = L_{g*}\, X|_e = X|_g \,,$$

tj. $\dot\gamma(t) = X(\gamma(t))$.

$$\begin{aligned} \gamma(0) = e \quad &\Rightarrow \quad \gamma(t) = \mathrm{e}^{tX} \\ \gamma(0) = g \quad &\Rightarrow \quad \gamma(t) = g\mathrm{e}^{tX} = L_g\left(\mathrm{e}^{tX}\right) = R_{\mathrm{e}^{tX}}(g) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \Phi_X^t = R_{\mathrm{e}^{tX}}$ □

Důsledek 4. $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathcal{X}(G)$, $Y \circ R_g^* = R_g^* \circ Y$, potom $[X, Y] = 0$. (To znamená, že levoinvariantní a pravoinvariantní pole komutují.)

Důkaz.

$$\begin{aligned} [X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\big((Yf)\circ R_{\mathrm{e}^{tX}} - Yf - Y(f \circ R_{\mathrm{e}^{tX}}) + Yf\big) = \\ &= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\big((R^*_{\mathrm{e}^{tX}} \circ Y)f - (Y \circ R^*_{\mathrm{e}^{tX}})f\big) = 0 \end{aligned}$$

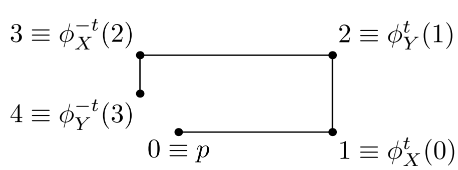
□

Věta 6. M dif. varieta, $X, Y \in \mathcal{X}(M)$, Φ_t^X, Φ_t^Y jejich toky, $p \in M$. Potom

$$([X,Y]f)(p) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\sigma(t)) - f(p)}{t^2} \,,$$

kde $\sigma(t) = (\Phi^Y_{-t} \circ \Phi^X_{-t} \circ \Phi^Y_t \circ \Phi^X_t)(p)$, tedy $\sigma(0) = p$.

Důkaz. Pro jednoduchost zavedeme následující značení:



$$f(4) - f(0) = \big(f(4) - f(3)\big) + \big(f(3) - f(2)\big) + \big(f(2) - f(1)\big) + \big(f(1) - f(0)\big)$$

$$\begin{aligned} f(1) - f(0) &= tXf(0) + \frac{t^2}{2}X(Xf)(0) + O(t^3) \\ f(2) - f(1) &= tYf(1) + \frac{t^2}{2}Y(Yf)(1) + O(t^3) \\ f(3) - f(2) &= -tXf(2) + \frac{t^2}{2}X(Xf)(2) + O(t^3) \\ f(4) - f(3) &= -tYf(3) + \frac{t^2}{2}Y(Yf)(3) + O(t^3) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
Xf(0) - Xf(2) &= Xf(0) - Xf(1) + Xf(1) - Xf(2) = -tX(Xf)(0) - tY(Xf)(1) + O(t^2) = \\
&= -tX(Xf)(0) - tY(Xf)(0) + O(t^2) \\
Yf(1) - Yf(3) &= Yf(1) - Yf(2) + Yf(2) - Yf(3) = -tY(Yf)(1) + tX(Yf)(2) + O(t^2) = \\
&= -tY(Yf)(0) + tX(Yf)(0) + O(t^2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(4) - f(0) = -t^2X(Xf)(0) - t^2Y(Xf)(0) - t^2Y(Yf)(0) + t^2X(Yf)(0)+ \\
+\frac{t^2}{2}X(Xf)(0) + \frac{t^2}{2}Y(Yf)(0) + \frac{t^2}{2}X(Xf)(0) + \frac{t^2}{2}Y(Yf)(0) + O(t^3) = \\
= t^2\big(X(Yf) - Y(Xf)\big)(0) + O(t^3)
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^2}\big(f(\sigma(t)) - f(p)\big) = [X(Yf) - Y(Xf)]\,(p)
$$

□

Důsledek 5. $X, Y \in \mathfrak{g} \quad \Rightarrow \quad [X,Y]f(p) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^2}\Big(f\big(R_{\mathrm{e}^{-tY}}R_{\mathrm{e}^{-tX}}R_{\mathrm{e}^{tY}}R_{\mathrm{e}^{tX}}(p)\big) - f(p)\Big)$

Důsledek 6. Pro maticové grupy tak platí $[X,Y]|_e = XY - YX$, $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$.

Důkaz. $e = \mathbb{1}$, $R_{\mathrm{e}^{-tY}}R_{\mathrm{e}^{-tX}}R_{\mathrm{e}^{tY}}R_{\mathrm{e}^{tX}}(\mathbb{1}) = \mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{tY}\mathrm{e}^{-tX}\mathrm{e}^{-tY}$

$$
[X,Y]f(e) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t^2}\Big(f\left(\mathrm{e}^{tX}\mathrm{e}^{tY}\mathrm{e}^{-tX}\mathrm{e}^{-tY}\right) - f(\mathbb{1})\Big) = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\Big(f\left(\mathrm{e}^{\sqrt{t}X}\mathrm{e}^{\sqrt{t}Y}\mathrm{e}^{-\sqrt{t}X}\mathrm{e}^{-\sqrt{t}Y}\right) - f(\mathbb{1})\Big)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\left(\mathrm{e}^{\sqrt{t}X}\mathrm{e}^{\sqrt{t}Y}\mathrm{e}^{-\sqrt{t}X}\mathrm{e}^{-\sqrt{t}Y}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\left(\left(\mathbb{1} + \sqrt{t}X\right) + \frac{t}{2}X^2\right)\left(\left(\mathbb{1} + \sqrt{t}Y\right) + \frac{t}{2}Y^2\right) \times \\
\times \left(\left(\mathbb{1} - \sqrt{t}X\right) + \frac{t}{2}X^2\right)\left(\left(\mathbb{1} - \sqrt{t}Y\right) + \frac{t}{2}Y^2\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\left(\mathbb{1} + t\,(XY - YX) + O(\sqrt{t}^3)\right) = XY - YX
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad [X,Y]f(\mathbb{1}) = \underbrace{(XY - YX)}_{\text{maticové násobení}}\ f(\mathbb{1}) \quad \Rightarrow \quad [X,Y]|_{\mathbb{1}} = X|_{\mathbb{1}}\,Y|_{\mathbb{1}} - Y|_{\mathbb{1}}\,X|_{\mathbb{1}}
$$

□

Poznámka 7. G Lieova grupa, $\mathfrak{g}$ Lieova algebra, $\mathfrak{h}$ podalgebra $\mathfrak{g}$. Potom existuje vnořená podvarieta $H \subset G$, taková, že H je podgrupa G a její Lieova algebra je přirozeně izomorfní $\mathfrak{h}$.

Poznámka 8. Obecně se nejedná o vložení. Uvažujme například $T^2 = S^1[\varphi] \times S^1[\vartheta]$, $(\varphi_1, \theta_1)(\varphi_2, \theta_2) = (\varphi_1 + \varphi_2, \theta_1 + \theta_2)$, $e = (0,0)$. Vektorové pole $X = a\partial_\varphi + b\partial_\vartheta \in \mathfrak{t}^2$, $\mathfrak{h} = \mathrm{span}\{X\}$, $\dot{\varphi} = a$, $\dot{\theta} = b \quad \Rightarrow$ $H = \{at, bt | t \in \mathbb{R}\}$. Protože $[X,X] = 0$ je $\mathfrak{h}$ jednorozměrná podalgebra. Pro $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ je křivka na toru uzavřená a jedná se o vložení, pro $\frac{a}{b} \notin \mathbb{Q}$ ale v topologii T^2 je $\overline{H} = T^2$, tj. nejedná se o vložení.

1.4 Vlastnosti homomrfismů (cvičení)

Lemma 1. Nechť $G, \widetilde{G}$ jsou Lieovy grupy, $\phi : G \to \widetilde{G}$ hladký homomorfismus, tj. $\forall g, h \in G$, $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$, pak platí:

$$
\phi_* \circ L_{g*} = L_{\phi(g)*} \circ \phi_*, \qquad \phi_* X \in \tilde{\mathfrak{g}}|_{\phi(g)}\,,\ \forall X \in \mathfrak{g}.
$$

Důkaz. Z definice platí $\forall g, h \in G,\ \forall X \in \mathfrak{g}$:

$$\left.\begin{array}{l} L_{g*}\ X|_h = X|_{gh} \\ \phi(L_g h) = L_{\phi(g)} h \quad \Leftrightarrow \quad \phi \circ L_g = L_{\phi(g)} \circ \phi \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \phi_* \circ L_{g*} = L_{\phi(g)*} \circ \phi_*$$

$\Rightarrow \quad \phi_*\ X|_{gh} = \phi_* L_{g*}\left(X|_h\right) = L_{\phi(g)*}\phi_*\ X|_h$. Dále nechť $\phi(g) = \widetilde{g}, \phi(h) = \widetilde{h}$, pak:

$$\begin{aligned} L_{\widetilde{g}*}\ (\phi_* X)|_{\widetilde{h}} = L_{\phi(g)*}\ (\phi_* X)|_{\phi(h)} = L_{\phi(g)*} \circ \phi_*\left(X|_h\right) = \phi_* \circ L_{g*}\left(X|_h\right) = \\ = \phi_*\left(X|_{gh}\right) = (\phi_* X)|_{\phi(gh)} = (\phi_* X)|_{\widetilde{g}\widetilde{h}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad L_{\widetilde{g}*}\ (\phi_* X)|_{\widetilde{h}} = (\phi_* X)|_{\widetilde{g}\widetilde{h}} \quad \Rightarrow \quad \phi_* X \in \widetilde{\mathfrak{g}}|_{\phi(g)},\ \forall X \in \mathfrak{g}$. □

Lemma 2. $\phi\left(\mathrm{e}^{tX}\right) = \mathrm{e}^{t\phi_* X}$

Důkaz. Obě strany rovnice jsou díky $\phi(gh) = \phi(g)\phi(h)$ 1-parametrické podgrupy $\Rightarrow$ stačí ukázat, že tečné vektory v e jsou stejné.

$$\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \phi\left(\mathrm{e}^{tX}\right) = \phi_* \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{e}^{tX} = (\phi_* X)|_{\widetilde{e}} = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{e}^{t\phi_* X}$$

Díky grupovosti tedy platí:

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi\left(\mathrm{e}^{tX}\right) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \phi\left(\mathrm{e}^{(t+s)X}\right) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \phi\left(\mathrm{e}^{tX}\right)\phi\left(\mathrm{e}^{sX}\right) = L_{\phi\left(\mathrm{e}^{tX}\right)*}\ (\phi_* X)|_{\widetilde{e}} = (\phi_* X)|_{\phi\left(\mathrm{e}^{tX}\right)} \\ &\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{t\phi_* X} = (\phi_* X)|_{\mathrm{e}^{t\phi_* X}} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ obě strany lemmatu jsou řešení stejné ODR se stejnou počáteční podmínkou $\phi\left(\mathrm{e}^{tX}\right)\big|_{t=0} = \widetilde{e} = \mathrm{e}^{t\phi_* X}\big|_{t=0}$. □

Lemma 3. $[\phi_* X, \phi_* Y] = \phi_*\big([X, Y]\big)$

Důkaz. Mějme $f \in C^\infty(\widetilde{G})$:

$$(\phi_* Y)\ f|_{\phi(g)} = Y\ (f \circ \phi)|_g = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\left(\phi\left(g\mathrm{e}^{tY}\right)\right) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} f\left(\phi(g)\phi\left(\mathrm{e}^{tX}\right)\right) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left(f \circ R_{\phi\left(\mathrm{e}^{tX}\right)}\right)\Big|_{\phi(g)}$$

$$\begin{aligned} [\phi_* X, \phi_* Y]\ f|_{\phi(p)} &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0} \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \left[f\left(\phi(p)\phi\left(\mathrm{e}^{sX}\right)\phi\left(\mathrm{e}^{tY}\right)\right) - f\left(\phi(p)\phi\left(\mathrm{e}^{tY}\right)\phi\left(\mathrm{e}^{sX}\right)\right)\right] = \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{s,t=0} \left[f\left(\phi\left(p\mathrm{e}^{sX}\mathrm{e}^{tY}\right)\right) - f\left(\phi\left(p\mathrm{e}^{tY}\mathrm{e}^{sX}\right)\right)\right] = \\ &= \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{s,t=0} \left[(f \circ \phi)\left(p\mathrm{e}^{sX}\mathrm{e}^{tY}\right) - (f \circ \phi)\left(p\mathrm{e}^{tY}\mathrm{e}^{sX}\right)\right] = \\ &= [X, Y]\ (f \circ \phi)|_p = [X, Y]\ (f \circ \phi)|_p = \left(\phi_*[X, Y]\right)\ f|_{\phi(p)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad [\phi_* X, \phi_* Y] = \phi_*\big([X, Y]\big)$. □