1 Spinorové reprezentace

Definice 1. Uvažujme 2^n-rozměrnou asociativní algebru

$$\mathfrak{cl}(n) = \text{span}\,\{\mathbb{1}, \gamma^{a_1}\dots\gamma^{a_k} | 1 \leqslant k \leqslant n,\ a_1 < a_2 < \dots < a_k\}$$

s násobením vyhovujícím vztahu $\left\{\gamma^a, \gamma^b\right\} \equiv \gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = 2\delta^{ab}\mathbb{1}$. Tuto algebru nazýváme **Cliffordova algebra** s n generátory.

$$\Sigma^{ab} = \frac{1}{2}\gamma^a\gamma^b = \frac{1}{4}\left[\gamma^a, \gamma^b\right],\ a \neq b, \qquad\qquad \Sigma^{ab} = -\Sigma^{ba}$$

$$\begin{aligned}\left[\Sigma^{ab}, \Sigma^{cd}\right] &= \frac{1}{4}\left(\gamma^a\gamma^b\gamma^c\gamma^d - \gamma^c\gamma^d\gamma^a\gamma^b\right) = \\ &= \frac{1}{4}\left(2\delta^{bc}\gamma^a\gamma^d - 2\delta^{ac}\gamma^b\gamma^d + 2\delta^{bd}\gamma^c\gamma^a - 2\delta^{ad}\gamma^c\gamma^b\right) = \\ &= \delta^{bc}\Sigma^{ad} - \delta^{ac}\Sigma^{bd} - \delta^{bd}\Sigma^{ac} + \delta^{ad}\Sigma^{bc}\end{aligned}$$

$\mathfrak{so}(n)$: $S^{ab} = E^{ab} - E^{ba}$, kde E^{ab} je matice s jednotkou na pozici (a, b) a nulami všude jinde. S^{ab} má stejné komutační relace:

$$\left[S^{ab}, S^{cd}\right] = \delta^{bc}S^{ad} - \delta^{ac}S^{bd} - \delta^{bd}S^{ac} + \delta^{ad}S^{bc}$$

- $n = 2l$:

$$\sigma_j = \frac{\gamma^{2j-1} + i\gamma^{2j}}{2} \qquad\qquad \sigma_j^* = \frac{\gamma^{2j-1} - i\gamma^{2j}}{2}$$

$$\{\sigma_j, \sigma_k\} = 0 = \{\sigma_j^*, \sigma_k^*\} \qquad \{\sigma_j, \sigma_k^*\} = \begin{cases} 0 & \dots\ j \neq k \\ \frac{\left(\gamma^{2j-1}\right)^2}{2} + \frac{\left(\gamma^{2j}\right)^2}{2} = \mathbb{1} & \dots\ j = k \end{cases}$$
$$= \delta_{jk}\mathbb{1}$$

$\Rightarrow$ Pro $n = 2l$ máme algebru fermionových kreačních a anihilačních operátorů $\Rightarrow$ jejich reprezentace se dá přirozeně zkonstruovat na

$$V = \text{span}\left\{\sigma_{a_1}^* \dots \sigma_{a_k}^* \left|0\right\rangle \middle| 0 \leqslant k \leqslant l,\ 0 < a_1 < \dots < a_k \leqslant l\right\},$$

$\sigma_a\left|0\right\rangle = 0$, $\dim V = 2^l$ $\Rightarrow$ reprezentace $\mathfrak{so}(2l)$ na V, prvky $\mathfrak{so}(2l)$ jsou kvadratické výrazy v σ_j, σ_k^* $\Rightarrow$ z hlediska $\mathfrak{so}(2l)$ se reprezentace rozpadá na dvě, se sudým, resp. lichým počtem σ^* působících na $\left|0\right\rangle$.

$$F_{ij} = \sigma_i^*\sigma_j^* \qquad\qquad F_{ij}^+ = \sigma_i\sigma_j \qquad\qquad G_{ij} = \sigma_i^*\sigma_j$$

$$H(\lambda_1, \dots, \lambda_l) = \sum_{j=1}^{l}\lambda_j\left(\sigma_j^*\sigma_j - \frac{1}{2}\right)$$

$$H(\lambda_1, \dots, \lambda_l)\sigma_{a_1}^*\dots\sigma_{a_k}^*\left|0\right\rangle = \sum_{j=1}^{l}\lambda_j\left(n_j - \frac{1}{2}\right)\sigma_{a_1}^*\dots\sigma_{a_k}^*\left|0\right\rangle$$

$\Rightarrow$ na V je vektor $\sigma_1^*\dots\sigma_l^*\left|0\right\rangle$ vektor s nejvyšší vahou a ta je rovna $\frac{1}{2}(\phi_1, \dots, \phi_l)$. Pro podprostor s opačnou paritou kreačních operátorů máme váhy $\sum_{j=1}^{l}\left(n_j - \frac{1}{2}\right)\phi_j$, kde $\sum_{j=1}^{l} n_j = l-1, l-3, \dots$, Mezi nimi je při našem uspořádání nejvyšší $\frac{1}{2}(\phi_1 + \dots + \phi_{l-1} - \phi_l)$, příslušná váhovému vektoru $\sigma_1^*\dots\sigma_{l-1}^*\left|0\right\rangle$.

- $n = 2l + 1$: stejně až na γ^{2l+1}:

$$\left\{\gamma^{2l+1}, \sigma_j\right\} = 0 = \left\{\gamma^{2l+1}, \sigma_j^*\right\}$$
$$\gamma^{2l+1} |0\rangle = |0\rangle$$
$$\gamma^{2l+1} \left(\sigma_{a_1}^* \dots \sigma_{a_k}^* |0\rangle\right) = (-1)^k \left(\sigma_{a_1}^* \dots \sigma_{a_k}^* |0\rangle\right)$$

  Předpisy pro F_{ij}, F_{ij}^+, G_{ij}, $H(\dots)$ se nezmění.

  V nejde rozdělit na 2 invariantní podporstory, $\mathfrak{so}(2l+1)$ je na V ireducibilní s nejvyšší vahou $\frac{1}{2}(\phi_1 + \dots + \phi_l)$.