1 Kořenové diagramy, Cartanova matice

Tyto diagramy nám pomohou znázornit strukturu algebry a určit tak, které algebry jsou izomorfní.

Definice 1. $\mathfrak{h} := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{H_\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$, $\mathfrak{h}^\# := \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\{\alpha\}_{\alpha\in\Delta}$

Poznámka 1. $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathfrak{h}^\# \times \mathfrak{h}^\# \to \mathbb{R} : \langle\alpha,\beta\rangle = K(H_\alpha, H_\beta)$ je skalární součin.

Důkaz. Protože $a_{\beta\alpha} = \beta(T_\alpha) \in \mathbb{Z}$, $a_{\alpha\alpha} = \alpha(T_\alpha) = 2$, platí

$$K(H_\alpha, H_\beta) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{ad}_{H_\alpha} \circ \mathrm{ad}_{H_\beta}\right) = \sum_{\tilde\alpha\in\Delta} \tilde\alpha(H_\alpha)\tilde\alpha(H_\beta) = \left(\frac{1}{4}\sum_{\tilde\alpha\in\Delta} a_{\tilde\alpha\alpha} \underbrace{a_{\tilde\alpha\beta}}_{\in\mathbb{Z}}\right) K(H_\alpha, H_\alpha)K(H_\beta, H_\beta)$$

$$\alpha(H_\alpha) = K(H_\alpha, H_\alpha) = \frac{(\alpha(H_\alpha))^2}{4}\sum_{\tilde\alpha\in\Delta} a^2_{\tilde\alpha\alpha} \quad\Rightarrow\quad \alpha(H_\alpha) = \frac{4}{\sum_{\tilde\alpha\in\Delta} a^2_{\tilde\alpha\alpha}} > 0$$

$\Rightarrow\quad K(H_\alpha, H_\alpha) \in \mathbb{R}$, tj. $K|_{\mathfrak{h}}$ je reálná symetrická bilineární forma. Pro $H \in \mathfrak{h}$, $H = \sum_\alpha c_\alpha H_\alpha$, $c_\alpha \in \mathbb{R}$ máme:

$$K(H,H) = \sum_{\tilde\alpha\in\Delta} \tilde\alpha(H)\tilde\alpha(H) = \sum_{\tilde\alpha\in\Delta} \tilde\alpha(H)^2 > 0$$
$$\tilde\alpha(H) = c_\alpha \underbrace{\tilde\alpha(H_\alpha)}_{\in\mathbb{R}} \in \mathbb{R}$$

Takže pokud $K(H,H) = 0 \quad\Rightarrow\quad \forall\tilde\alpha \in \Delta,\ \tilde\alpha(H) = 0 \quad\Rightarrow\quad H = 0$. K tedy definuje skalární součin na $\mathfrak{h}$. □

Poznámka 2. $H \in \mathfrak{h} \quad\Rightarrow\quad iH \notin \mathfrak{h}$ neboť $K(iH, iH) = -K(H,H) \quad\Rightarrow\quad \mathfrak{h}_{\mathbb{C}} = \mathfrak{g}_0 \quad\Rightarrow\quad \dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{h} = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_0$

Definice 2. Kořenový diagram je zakreslení Δ v Euklidově prostoru $\mathbb{R}^l$, kde $l = \dim_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}_0$.

Definice 3. Zrcadlení podle nadroviny kolmé k α je $S_\alpha : \mathfrak{h}^\# \to \mathfrak{h}^\# : S_\alpha(\lambda) = \lambda - 2\frac{\langle\alpha,\lambda\rangle}{\langle\alpha,\alpha\rangle}\alpha = \lambda - \lambda(T_\alpha)\alpha$.

Poznámka 3. $S_\alpha\left(S_\alpha(\lambda)\right) = S_\alpha\left(\lambda - \lambda(T_\alpha)\alpha\right) = \lambda - \lambda(T_\alpha)\alpha - \lambda(T_\alpha)(\alpha - 2\alpha) = \lambda \quad\Rightarrow\quad S_\alpha^2 = \mathbb{1}$

Poznámka 4. Podle 4. bodu lemmatu **??** je pro $\forall\alpha,\beta \in \Delta$, $S_\alpha(\beta) \in \Delta$. Proto lze uvažovat $S_\alpha : \Delta \to \Delta$, $\forall\alpha \in \Delta$.

Definice 4. Weylova grupa $\mathcal{W}$ kořenového systému Δ je grupa lineárních zobrazení generovaná S_α, $\forall\alpha \in \Delta$.

Poznámka 5. Weylova grupa je konečná protože je obsažena v grupě permutací $S_{\#\Delta}$.

Volbou libovolného $H_0 \in \mathfrak{h}$ máme $\forall\alpha \in \Delta$, $\alpha(H_0) \neq 0 \in \mathbb{R}$. Můžeme tak rozdělit kořeny na kladné a záporné. H_0 považujeme dále za pevně zvolené.

Definice 5. $\Delta^\pm := \{\alpha \in \Delta | \alpha(H_0) \gtrless 0\}$, na Δ definujeme uspořádaní $\alpha \gtreqless \beta \Leftrightarrow \alpha(H_0) \gtreqless \beta(H_0)$.

Volba závisí na H_0, ale při zakreslení tato klasifikace znamená pouze pootočení nákresu a nemá tak na výsledek podstatný vliv.

Poznámka 6. $\forall\alpha \in \Delta^+ :\ -\alpha \in \Delta^-$, a $\forall\alpha,\beta \in \Delta^+ : \alpha + \beta \in \Delta \Rightarrow \alpha + \beta \in \Delta^+$.

Definice 6. Při zvoleném rozdělení $\Delta = \Delta^+ \cup \Delta^-$ definujeme prosté kořeny $\Delta^p = \{\alpha \in \Delta^+ | \forall\beta,\gamma \in \Delta^+,\ \beta + \gamma \neq \alpha\}$.

Lemma 1. Vlastnosti kořenového diagramu.

1. $\forall \alpha \in \Delta^+,\ \alpha = \sum_{\beta\in\Delta^p} c_\beta \beta$, kde $c_\beta \in \mathbb{N}_0$.

2. $\forall \alpha, \beta \in \Delta^p, \alpha \neq \beta : \langle \alpha, \beta\rangle \leqslant 0$.

3. Δ^p tvoří bázi $\mathfrak{h}^\#$.

Důkaz. 1. $\alpha \in \Delta^+ \backslash \Delta^p \quad \Rightarrow \quad \exists \beta, \gamma \in \Delta^+,\ \beta + \gamma = \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha > \beta, \gamma$. Postup lze opakovat pro $\beta,\ \gamma$ atd., dokud nedostaneme prosté kořeny $\quad\Rightarrow\quad$ po konečně mnoha krocích máme součet prostých kořenů. Mohou se opakovat z různých větví výpočtu, dostáváme tedy celočíselné nezáporné koeficienty.

2. Nechť $\alpha, \beta \in \Delta^p$, $\langle \alpha, \beta\rangle > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha(T_\beta), \beta(T_\alpha) > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha - \beta, \beta - \alpha \in \Delta$ přičemž jeden z nich je kladný, druhý záporný. BÚNO $\alpha - \beta \in \Delta^+ \quad \Rightarrow \quad \alpha = (\alpha - \beta) + \beta \quad \Rightarrow \quad \alpha \notin \Delta^p$, spor.

3. Vezmeme $X \in \mathfrak{h}^*$ splňující

$$x = \sum_{\alpha_i \in \Delta^p} x_i \alpha_i = \sum_{j\in J} p_j \alpha_j - \sum_{k\in K} n_k \alpha_k = 0, \text{ kde } J \cap K = \emptyset,\ p_j \geqslant 0,\ n_k \geqslant 0.$$

$\Rightarrow$ protože $\langle \alpha_j, \alpha_k\rangle \leqslant 0,\ \forall j \in J,\ \forall k \in K$, platí:

$$\tilde{x} = \sum_{j\in J} \underbrace{p_j}_{\geqslant 0} \underbrace{\alpha_j}_{>0} = \sum_{k\in K} n_k \alpha_k \geqslant 0 \qquad \wedge \qquad \langle \tilde{x}, \tilde{x}\rangle = \sum_{\substack{j\in J\\ k\in K}} p_j n_k \underbrace{\langle \alpha_j, \alpha_k\rangle}_{\leqslant 0} \leqslant 0$$

$\Rightarrow \quad p_j = n_k = 0,\ \forall j \in J,\ \forall k \in K \quad \Rightarrow \quad \{\alpha_i\} \in \Delta^p$ jsou LN.

□

Poznámka 7. To znamená, že Δ^p tvoří tedy i bázi $\mathfrak{g}_0^*$ a zakreslujeme do $\#\Delta^p$-dimenzionálního prostoru. Úhel mezi prostými kořeny je tupý. Δ^+ získáváme celočíselnými kombinacemi prostých kořenů.

Strategie při kreslení kořenového diagramu je tedy začít prostými kořeny a aplikací operací zrcadlení a celočíselných součtů kořenů získávat další kořeny, přičemž kladné získáme pouze nezápornou kombinací kladných. Navíc se může hodit tvrzení **??** lemmatu **??**.

Definice 7. Cartanova matice je $a_{ij} = \frac{2\langle \alpha_i, \alpha_j\rangle}{\langle \alpha_j, \alpha_j\rangle}$, $\alpha_i, \alpha_j \in \Delta^p$.

Poznámka 8. Vlastnosti Cartanovy matice a:

- $a_{ii} = 2$, $a_{ij} \leqslant 0$ pro $i \neq j$,

- $a_{ij} a_{ji} = \frac{4|\langle \alpha_i, \alpha_j\rangle|^2}{\langle \alpha_i, \alpha_i\rangle\langle \alpha_j, \alpha_j\rangle} = 4 \underbrace{\cos^2 \measuredangle(\alpha_i, \alpha_j)}_{<1 \text{ díky LN}} \quad \Rightarrow \quad a_{ij} a_{ji} \in \{0, 1, 2, 3\} \quad \Rightarrow$

  $\Rightarrow \quad \cos \measuredangle(\alpha_i, \alpha_j) \in \left\{0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\} \quad \Rightarrow \quad \measuredangle(\alpha_i, \alpha_j) \in \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}\right\}$.