Kapitola 1

Časový vývoj

Cvičení 1 *Lineární harmonický oscilátor s hmotností* $M = \hbar/\omega$ *je v čase* $t = 0$ *ve stavu popsaném vlnovou funkcí*

$$\psi(x,0) = C(1+\sqrt{2}x)e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Určete, jaké hodnoty energie můžeme naměřit a s jakou pravděpodobností. V jakém stavu je oscilátor v čase $t > 0$*? Jak se mění střední hodnota polohy oscilátoru s časem?*

Návod: Stav je superpozicí vlastních vektorů hamiltoniánu

$$\psi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_0 + \psi_1).$$

Můžeme tedy naměřit energie $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ a $E_1 = \frac{3}{2}\hbar\omega$ s pravděpodobnostmi $P_0 = P_1 = \frac{1}{2}$. Časový vývoj vlastních vektorů známe, stav oscilátoru v čase t je potom

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{-i\frac{\omega}{2}t}\psi_0 + e^{-i\frac{3\omega}{2}t}\psi_1).$$

Pro určení závislosti střední hodnoty polohy na čase je vhodné přepsat operátor polohy pomocí kreačního a anihilačního operátoru. Výsledek je

$$\langle\hat{Q}\rangle(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\omega t).$$

Cvičení 2 *Nechť částice s hmotností* M *v jednorozměrné nekonečně hluboké potenciálové jámě šířky* $2a$ *je v čase* $t = 0$ *popsána vlnovou funkcí,*

$$\psi(x,0) = 0, \text{ pro } |x| > a, \quad \psi(x,0) = \sin\left(\frac{\pi}{2a}(x-a)\right) + \sin\left(\frac{\pi}{a}(x-a)\right), \text{ pro } |x| < a.$$

Jaká je pravděpodobnost, že částice se v čase $t \geq 0$ *bude nacházet v intervalu* $(-a, 0)$*? V jakém čase je tato pravděpodobnost minimální, resp. maximální?*

Návod: $\psi(x,0)$ je superpozice stacionárních stavů, viz. příklad **??**

$$\psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x) + \psi_2(x)).$$

Snadno naleznete časový vývoj $\psi(x,t)$, pak stačí prointegrovat $|\psi(x,t)|^2$ přes $(-a,0)$ a normovat. Výsledek je

$$\begin{aligned} P_{(-a,0)}(t) &= \frac{1}{2} - \frac{4}{3\pi}\cos\left(\frac{3}{8M}\frac{\pi^2\hbar t}{a^2}\right), \\ t_{min} &= 0,\ P_{min} = \frac{3-8\pi}{6\pi}, \qquad t_{max} = \frac{8Ma^2}{\pi\hbar},\ P_{max} = \frac{3+8\pi}{6\pi}. \end{aligned}$$

Cvičení 3 *Lineární oscilátor s vlastní frekvencí $\omega = \hbar/M$ je v čase $t = 0$ v koherentním stavu s amplitudou $\alpha \in \mathbb{R}$. V jakém stavu je v libovolném čase $t > 0$? Jak vypadá příslušná vlnová funkce v x-reprezentaci. Čemu je úměrná hustota pravděpodobnosti nalezení oscilátoru v bodě x? Jak se mění střední hodnota a střední kvadratická odchylka polohy oscilátoru s časem?*

Návod: Z výsledku příkladu (**??**) plyne

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle.$$

Odtud snadno dostaneme výsledek

$$|\alpha(t)\rangle = e^{-\frac{i}{2}\omega t}|\alpha e^{-i\omega t}\rangle.$$

Stav tedy zůstává koherentní, s časem se pouze mění fáze jeho amplitudy $\alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t}$. Vlnová funkce v x-reprezentaci má tedy tvar

$$\psi_\alpha(x,t) = \psi_{\alpha(t)}(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{\frac{\alpha^2(e^{-2i\omega t}-1)}{2}} e^{-\frac{(x-\sqrt{2}\alpha e^{-i\omega t})^2}{2}}.$$

Pro hustotu pravděpodobnosti v bodě x pak dostaneme (po zahození všech členů nezávislých na x)

$$|\psi_\alpha(x,t)|^2 \approx e^{-(x-\sqrt{2}\alpha\cos\omega t)^2}.$$

Je to Gaussovo normální rozdělení, jeho šířka se s časem nemění ($(\Delta x) = \sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$). Střední hodnota polohy oscilátoru v čase t je rovna

$$\langle\hat{Q}\rangle_\alpha(t) = x_0(t) = \sqrt{2}\alpha\cos(\omega t).$$

Cvičení 4 *Určete časový vývoj střední hodnoty a střední kvadratické odchylky hybnosti lineárního oscilátoru s vlastní frekvencí $\omega = \hbar/M$. Oscilátor je v čase $t = 0$ v koherentním stavu s amplitudou $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Návod: Z předchozího příkladu víme že $|\alpha(t)\rangle = |\alpha e^{-i\omega t}\rangle$ (globální fáze je irelevantní). Operátor $\hat{P}$ stačí rozepsat pomocí posunovacích operátorů, pak už snadno nalezneme výsledek

$$\langle \widehat{P} \rangle_{\alpha}(t) = -\sqrt{2}\hbar\alpha \sin(\omega t).$$

Střední hodnoty polohy a hybnosti tedy sledují klasickou trajektorii, jak lze ostatně očekávat z Ehrenfestových teorémů. Podobným způsobem pro střední kvadratickou odchylku hybnosti dostaneme

$$(\Delta p) = \frac{\hbar}{\sqrt{2}}.$$

Koherentní stavy lineární harmonického oscilátoru tedy minimalizují Heisenbergovy relace neurčitosti. Na rozdíl od volné částice to platí v libovolném čase.

Cvičení 5 *Jak se s časem mění střední hodnota polohy částice (v libovolném stavu ψ) v elektromagnetickém poli?*

Návod:

$$\frac{d}{dt}\langle \hat{Q}_j \rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [\hat{H}, \hat{Q}_j] \rangle = \ldots = \frac{1}{M}\langle \hat{P}_j - e\hat{A}_j \rangle \equiv \langle \hat{V}_j \rangle.$$

Výsledek odpovídá dle principu korespondence (nikoliv překvapivě) výsledku v klasické mechanice.