Kapitola 1

Harmonický oscilátor

Cvičení 1 *Ukažte, že Hermitovy polynomy lze definovat též způsobem*

$$H_n(z) = (-1)^n e^{z^2} \frac{d^n}{dz^n} e^{-z^2}$$

Návod: Stačí ukázat, že pravá strana splňuje rovnici

$$u'' = 2zu' - 2nu.$$

Po dosazení zadaného tvaru $H_n(z)$ do $u'' = 2zu' - 2nu$ využijte vhodně Leibnizova pravidla na $(n+1)$-ní derivaci součinu $2z.e^{-z^2}$ $(= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} e^{-z^2})$ a upravte. Shodnost definic pak plyne z věty o jednoznačnosti řešení diferenciálních rovnic (ještě porovnejte koeficient u nejvyšší mocniny z, aby bylo zaručeno splnění stejné počáteční podmínky).

Cvičení 2 *Ukažte, že platí vztah*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} \xi^n = \exp\left[x^2 - (x-\xi)^2\right].$$

Návod: Ověřte, že $(-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} \exp[x^2 - (x-\xi)^2]|_{\xi=0}$, $\forall n$.

Cvičení 3 *Použitím vytvořující funkce ze cvičení 2 ukažte, že*

$$\int_{\mathbb{R}} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx = 2^n n! \pi^{1/2} \delta_{nm}.$$

Ukažte, že odtud plyne ortonormalita vlastních funkcí harmonického oscilátoru.

Návod:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} H_n(x) H_m(x) e^{-x^2} dx &= \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} \frac{\partial^m}{\partial \rho^m} \int_{\mathbb{R}} e^{x^2-(x-\xi)^2} e^{x^2-(x-\rho)^2} e^{-x^2} dx|_{\xi,\rho=0} \\ &= \frac{\partial^n}{\partial \xi^n} \frac{\partial^m}{\partial \rho^m} \sqrt{\pi} e^{2\xi\rho}|_{\xi,\rho=0} = 2^n n! \pi^{1/2} \delta_{nm}. \end{aligned}$$

Cvičení 4 *Mějme lineární harmonický oscilátor s vlastní frekvencí* $\omega = \hbar/M$. *Napište explicitní tvar vlastních funkcí hamiltoniánu* $\psi_n(x)$ *odpovídající energii* $\hbar\omega(n+\frac{1}{2})$ *pro* $n = 0, 1, 2$. *Určete příslušné hustoty pravděpodobnosti nalezení oscilátoru bodě* x. *Nakreslete grafy těchto rozdělení a srovnejte je s hustototu pravděpodobnosti výskytu klasického oscilátoru v daném místě. Jak vypadá hustota pravděpodobnosti, pokud je oscilátor ve stavu popsaném superpozicí* $\psi(x) = c(\psi_0(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\psi_1(x))$.

Výsledek:

$n = 0: \ \psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$,

$n = 1: \ \psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \sqrt{2} x e^{-\frac{x^2}{2}}$,

$n = 2: \ \psi(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2}} (2x^2 - 1) e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Příslušné rozdělení polohy oscilátoru je dáno kvadrátem absolutní hodnoty vlnové funkce. V grafech je počet maxim roven stupni příslušného Hermiteova polynomu +1. Pro zadanou superpozici dostaneme hustotu pravděpodobnosti

$$|\psi(x)|^2 = \frac{2}{3\sqrt{\pi}} (1 + x^2) e^{-x^2}.$$