Kapitola 1

Klasická mechanika a statistická fyzika

Cvičení 1 *Napište rozdělovací funkci Gaussova pravděpodobnostního rozdělení. Interpretujte význam jejích parametrů. Vypočítejte jeho momenty. Napište vzorec pro*

$$I(n,a,b) := \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{-ax^2+bx} dx, \ n \in \mathbb{Z}, \ a,b \in \mathbb{C}, \ \mathrm{Re}\ a > 0.$$

(Zapamatujte si jej pro n=0,1,2!)

Návod: Rozdělovací funkce

$$\rho(x) = N e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}}.$$

Normalizace:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \rho(x) dx = N\sqrt{2\pi}\sigma = 1, \quad \text{tj.} \quad N = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}.$$

Momenty: definice

$$\langle (x-\alpha)^n \rangle_\rho = N \int\limits_{\mathbb{R}} (x-\alpha)^n e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Výsledky se liší pro n liché, resp. sudé:

$$\langle (x-\alpha)^{2n+1} \rangle_\rho = 0, \quad \langle (x-\alpha)^{2n} \rangle_\rho = \sigma^{2n}(2n-1)!!$$

Hledaný vzorec:

$$I(n,a,b) = \frac{\partial^n}{\partial b^n} I(0,a,b) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{\partial^n}{\partial b^n} e^{\frac{b^2}{4a}}$$

Cvičení 2 *Popište jednorozměrný harmonický oscilátor Hamiltonovskou formulací klasické mechaniky. Napište a vyřešte pohybové rovnice. Napište rovnici pro fázové trajektorie. Hodnotou jaké fyzikální veličiny jsou určeny?*

Návod: $H(p,q) = \frac{p^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2 q^2$
Pohybové rovnice

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p},\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q},$$

tj.

$$\dot{q} = \frac{p}{M},\ \dot{p} = -M\omega^2 q.$$

Řešení: $q(t) = A\sin(\omega t + \alpha)$, $p(t) = A\omega M\cos(\omega t + \alpha)$,
Rovnice pro fázové trajektorie – získáme vyloučením času z pohybových rovnic, jsou určeny hodnotou energie

$$\frac{p^2}{2A^2\omega^2 M^2} + \frac{q^2}{2A^2} = 1.$$

Cvičení 3 *Jaká je hustota pravděpodobnosti nalezení klasického jednorozměrného oscilátoru s energií E v intervalu $(x, x+dx)$? Co potřebujeme znát, chceme-li tento pravděpodobnostní výrok změnit v deterministickou předpověď?*

Návod:

$$\rho(x)dx = \frac{\text{doba strávená v intervalu } \langle x, x+dx\rangle}{\text{půlperioda}} = \frac{\frac{dx}{|v(x)|}}{T/2} = \frac{dx}{\pi\sqrt{\frac{2E}{M\omega^2} - x^2}}.$$

Je vhodné si ověřit normalizaci

$$\int\limits_{-x_0}^{x_0} \rho(x)dx = 1, \quad x_0 = \sqrt{\frac{2E}{M\omega^2}}.$$

K deterministické předpovědi potřebujeme znát polohu a rychlost či hybnost v jednom časovém okamžiku (tj. počáteční podmínku).

Cvičení 4 *Nechť statistická rozdělovací funkce stavů klasického mechanického oscilátoru je dána Gibbsovou formulí*

$$w(p,q) = \frac{1}{Z}\, e^{-\frac{H(p,q)}{kT}}.$$

Spočtěte střední hodnotu energie.

Návod: Normalizace:

$$\frac{1}{Z}\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{kT}(\frac{p^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2 q^2)} dp\, dq = 1, \qquad \text{tj.} \quad Z = \frac{2\pi kT}{\omega}$$

Střední hodnota energie:

$$\frac{1}{Z}\int\limits_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{p^2}{2M} + \frac{1}{2}M\omega^2 q^2\right) e^{-\frac{1}{2kT}(\frac{p^2}{M} + M\omega^2 q^2)} dp\, dq = kT$$