Kapitola 1

Geometrická formulace Hamiltonovy mechaniky

Uvažujme varietu N a její kotečný bundle T^*N. Již víme, že je vhodným objektem pro matematický popis fázového prostoru mechanického systému s konfiguračním prostorem N. Na T^*N existuje význačná, tzv. **kanonická 1-forma** definovaná následujícím předpisem: buď $\pi : T^*N \to N$ projekce ve fibrovaném prostoru T^*N. Definujeme $\lambda \in \Gamma(T^*(T^*N))$ předpisem

$$(\forall \omega \in T^*N)(\lambda(\omega) = \pi^\star(\omega)).$$

V lokálních souřadnicích (x^i) na $U = U^\circ \subset N$ zavádíme souřadnice (p_i) na T^*U: $p_i(\omega_k(q)\,\mathrm{d}x^k) = \omega_i(q)$ pro $q \in U$. Společně (x^i, p_i) tvoří souřadnice na T^*U. V nich máme ($\lambda \in \Gamma(T^*(T^*U))$):

$$\lambda = p_i\,\mathrm{d}x^i.$$

Dále můžeme uvažovat **kanonickou (Cartanovu–Poincarého) 2-formu** $\omega = \mathrm{d}\lambda$. V lokálních souřadnicích máme

$$\omega = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}x^i.$$

Evidentně je ω exaktní a tudíž uzavřená. Dále je **nedegenerovaná** ve smyslu

$$(\forall a \in T^*N)(\forall X \in T_a(T^*N),\ X \neq 0)(\exists Y \in T_a(T^*N))(\omega(a)(X,Y) \neq 0).$$

Tyto vlastnosti jsou základem pro zobecnění. (Nedegenerovaná 2-forma umožňuje ztotožnit tečný a kotečný prostor $X \in T_a(T^*N) \to i_X\omega \in T_a^*(T^*N)$.)

Definice 1.1. Diferenciální varieta M vybavená nedegenerovanou uzavřenou diferenciální 2-formou ω se nazývá **symplektická**. Formu ω pak nazýváme **symplektická 2-forma**.

Příklad 1.1. $M = T^*N$ s formou $\omega = \mathrm{d}\lambda$.

Poznámka 1.1. Nechť V je vektorový prostor, ω je nedegenerovaná 2-forma na V. Pak $2 \,|\, \dim V$.

Důkaz. Nechť (e_i) je báze V, (e^i) je báze V^*. Pak $\omega = \omega_{ij}\,e^i \wedge e^j$, $e^i(e_j) = \delta^i_j$, tj. $\omega(X^ie_i, Y^je_j) = X^iY^j\omega(e_i,e_j) = X^iY^j(\omega_{ij} - \omega_{ji})$. Formu ω budeme dále vybírat jako antisymetrickou matici A. Forma ω je nedegenerovaná $\Leftrightarrow$ $(\forall X)(\omega_{ij}X^i \neq 0)$ $\Leftrightarrow$ $\operatorname{rank}\omega_{ij} = \dim V$ $\Leftrightarrow$ $\det(\omega_{ij}) \neq 0$. Platí $A + A^T = 0$, $\det A = \det A^T$ a současně $\det A = (-1)^{\dim V}\det A^T$. Když $\dim V$ je lichá, tak $\det A = -\det A^T$ a současně $\det A = \det A^T$, tj. $\det A = 0$. ∎

Věta 1.1. Darboux: Buď (M,ω) symplektická varieta, $q \in M$. Pak existuje okolí $U = U^\circ \subset M$, $q \in U$, a souřadnice $(p_i, x^i)_{i=1}^{\frac{\dim M}{2}}$ na U takové, že $\omega|_U = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i$. *(Bez důkazu.)*

Nyní se budeme snažit zformulovat hamiltonovskou mechaniku na symplektické varietě. Základní poznatek je, že nedegenerovaná forma $\omega \in \Omega^2(M)$ nám umožňuje ztotožnit T_qM a T_q^*M, resp. $\mathcal{X}(M)$ a $\Omega^1(M)$.

Věta 1.2. Zobrazení $\varphi : T_qM \to T_q^*M$, kde $\varphi(X) = i_X\omega(q)$ a ω je symplektická 2-forma, je izomorfizmus vektorových prostorů.

Důkaz. Linearita $\varphi : X \to i_X\omega$ je zřejmá. Dále pro jádro φ z nedegenerovanosti platí: $X \in \ker\varphi \Leftrightarrow i_X\omega(q) = 0 \Leftrightarrow (\forall Y \in T_qM)(i_X\omega(Y) = \omega(X,Y) = 0) \Leftrightarrow X = 0$. ∎

Věta 1.3. Zobrazení $\varphi : \mathcal{X}(M) \to \Omega^1(M)$, kde $\varphi(X) = i_X\omega$ a ω je symplektická 2-forma, je izomorfizmus vektorových prostorů.

Důkaz. V každém bodě $q \in M$ máme φ_q vzájemně jednoznačné. Hladkost vyplývá z hladké závislosti $i_X\omega$ na X. ∎

Definice 1.2. Vektorové pole X na symplektické varietě (M,ω) je

- **lokálně hamiltonovské** $\Leftrightarrow$ $i_X\omega$ je uzavřená, tj. $\mathrm{d}i_X\omega = 0$.
- **hamiltonovské** $\Leftrightarrow$ $i_X\omega$ je exaktní ve smyslu: $(\exists f \in C^\infty(M))(i_X\omega = -\mathrm{d}f)$. Pak značíme $X \equiv X_f$.

Poznámka 1.2. Důvod pro předchozí definici: Buď $M = T^*N$, $\omega = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}x^i$, $H(p_i,x^i) \in C^\infty(M)$. Pak $X_H = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right)$. Tudíž integrální křivky vektorového pole X_H jsou řešení Hamiltonových pohybových rovnic $\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i}$.

Věta 1.4. Vektorové pole $X \in \mathcal{X}(M)$ je lokálně hamiltonovské $\Leftrightarrow \mathscr{L}_X\omega = 0$.

Důkaz. (ω je uzavřená) $\mathscr{L}_X\omega = \mathrm{d}i_X\omega + i_X\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}i_X\omega$. ∎

Věta 1.5. Nechť N je diferencovatelná varieta, $\tau \in \Omega^\bullet(N)$, $X, Y \in \mathcal{X}(N)$. Pak $\mathscr{L}_X\tau = 0 \Leftrightarrow (\forall t \in \mathbb{R})(\forall q \in N)(\Psi_X^{t\star}\tau = \tau)$, pokud má $\Psi_X^t(q)$ smysl. Podobně $\mathscr{L}_XY = 0 \Leftrightarrow \Psi_{X\star}^t(Y) = Y$.

Důkaz. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Psi_X^{t\star}\tau) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}(\Psi_X^{s+t\star}\tau - \Psi_X^{t\star}\tau) = \lim_{s\to 0}\Psi_X^{t\star}(\frac{1}{s}(\Psi_X^{s\star}\tau - \tau)) = \Psi_X^{t\star}\mathscr{L}_X\tau = 0$ ∎

Věta 1.6. Toky komutujících vektorových polí X, Y komutují. Neboli mějme diferencovatelnou varietu N a $X, Y \in \mathcal{X}(N)$ takové, že $[X,Y] = 0$. Pak $(\forall q \in N)(\forall s,t \in \mathbb{R})$ taková, že výrazy mají smysl, platí

$$\Psi_Y^s \circ \Psi_X^t(q) = \Psi_X^t \circ \Psi_Y^s(q).$$

Důkaz. Nechť $q \in N$, γ_1 integrální křivka X z q, tj. $\gamma_1(t) = \Psi_X^t(q)$, vybereme pevně $s \in \mathbb{R}$, γ_2 integrální křivka X z $\tilde{q} = \Psi_Y^s(q)$, tj. $\gamma_2(t) = \Psi_X^t(\tilde{q}) = \Psi_X^t(\Psi_Y^s(q))$. Definujeme $\gamma_3 = \Psi_Y^s(\gamma_1(t))$. $\dot{\gamma_2}(t) = X(\gamma_2(t))$, $\dot{\gamma_3} = \Psi_{Y\star}^s(\dot{\gamma_1}(t)) = \Psi_{Y\star}^s(X(\gamma_1(t))) = X(\gamma_3(t))$, neboť $\mathscr{L}_XY = [X,Y]$, a tedy $\Psi_{Y\star}^s(X) = X$. Máme tedy $\gamma_2(t)$, $\gamma_3(t)$, které vyhovují stejné diferenciální rovnici se stejnou počáteční podmínkou a z jednoznačnosti řešení plyne $\gamma_2(t) = \gamma_3(t)$. ∎

Definice 1.3. Nechť (M,ω) je symplektická varieta. Pak zobrazení (transformaci) $\phi : M \to M$ nazveme **kanonické zobrazení** $\Leftrightarrow \phi^\star\omega = \omega$.

Definice 1.4. 1-parametrická lokální grupa transformací variety N je takové zobrazení ϕ, kde $\phi : U = U^\circ \subset \mathbb{R} \times N \to N$, $\{0\} \times N \subset U$, $(\forall q \in N)(\phi(0,q) = q)$, pro které platí

$$(\forall s,t \in \mathbb{R})(\forall q \in N)(((t,q) \in U \text{ a současně } (s,\phi(t,q)) \in U) \Rightarrow \phi(s,\phi(t,q)) = \phi(s+t,q)).$$

Věta 1.7. Nechť (M,ω) je symplektická varieta, $X \in \mathcal{X}(M)$. X je lokálně hamiltonovské $\Leftrightarrow$ jeho tok Ψ^t_X definuje 1-parametrickou lokální grupu kanonických transformací variety M.

Důkaz. $\mathscr{L}_X\omega = 0 \Leftrightarrow \Psi^{t\star}_X\omega = \omega$ ■

Definice 1.5. Nechť (M,ω) je symplektická varieta, $f,g \in C^\infty(M)$. **Poissonova závorka** na M je bilineární zobrazení $\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ dané předpisem

$$\{f,g\} = i_{X_f} i_{X_g} \omega.$$

Poznámka 1.3. $\{f,g\} = i_{X_f} i_{X_g}\omega = -i_{X_f}\mathrm{d}g = -X_f(g) = -i_{X_g} i_{X_f}\omega = i_{X_g}\mathrm{d}f = X_g(f)$

Poznámka 1.4. V Darbouxových souřadnicích máme $\omega = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}x^i$, $\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial p_i}$.

Věta 1.8. Nechť $f,g \in C^\infty(M)$. Pak $\boxed{X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]}$

Důkaz. $h = \{f,g\} = i_{X_f} i_{X_g}\omega$, $(\mathscr{L}_{X_g}\omega = 0,\ \mathscr{L}_{X_f}\omega = 0)$, tj. $i_{X_h}\omega = -\mathrm{d}(i_{X_f} i_{X_g}\omega) = -\mathscr{L}_{X_f}(i_{X_g}\omega) + i_{X_f}\mathrm{d}(i_{X_g}\omega) = -\mathscr{L}_{X_f} i_{X_g}\omega + i_{X_f}\mathscr{L}_{X_g}\omega = -i_{[X_f,X_g]}\omega - i_{X_g}\mathscr{L}_{X_f}\omega = -i_{[X_f,X_g]}\omega$ a tedy $X_h = -[X_f,X_g]$. ■

Věta 1.9. Poissonova závorka vyhovuje Jacobiho identitě, tj. $(f,g,h \in C^\infty(M))$:

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0.$$

Důkaz. $\{f,\{g,h\}\} = i_{X_f} i_{X_{\{g,h\}}}\omega = -i_{X_f}\mathrm{d}\{g,h\} = -\mathscr{L}_{X_f}\{g,h\} = -\mathscr{L}_{X_f} i_{X_g} i_{X_h}\omega = -i_{\mathscr{L}_{X_f}(X_g)} i_{X_h}\omega - i_{X_g} i_{\mathscr{L}_{X_f}(X_h)}\omega$. Navíc $\mathscr{L}_{X_f}(X_{g/h}) = [X_f, X_{g/h}] = -X_{\{f,g/h\}}$, takže $\{f,\{g,h\}\} = i_{X_{\{f,g\}}} i_{X_h}\omega + i_{X_g} i_{X_{\{f,h\}}}\omega = \{\{f,g\},h\} + \{g,\{f,h\}\}$. ■

Věta 1.10. Nechť $f,g \in C^\infty(M)$, $\{f,g\} = 0$. Pak $f \circ \Psi^t_{X_g} = f$, $g \circ \Psi^t_{X_f} = g$.

Důkaz. Zřejmý. ■

Poznámka 1.5. Naopak, máme-li lokální 1-parametrickou grupu kanonických transformací, tak je X (její generátor) lokálně hamiltonovské, a tedy existuje lokálně definované $f \in C^\infty(U) : X = X_f$, tj. integrál pohybu pokud grupa zachovává H.