Kapitola 1

Lieova derivace

Uvažujme tok Ψ_X daného vektorového pole $X \in \mathcal{X}(M)$. Z definice Ψ_X vyplývá, že $(\forall p \in M)(\forall s,t \in \mathbb{R})$ taková, že levá strana následujícího výrazu má smysl, platí (viz poznámky **??** a **??**):

$$\Psi_X(t, \Psi_X(s,p)) = \Psi_X(t+s,p).$$

Poznámka 1.1. Na jistém okolí každého $p \in M$ je pro jisté ε, kde $|t| < \varepsilon$, zobrazení Ψ_X^t difeomorfizmus a tedy na tomto okolí $\exists(\Psi_X^t)^{-1} : (\Psi_X^t)^{-1} = \Psi_X^{-t}$. Pro následující úvahy, kde nás bude zajímat limita $\lim_{t\to 0}$ v nějakém $p \in M$, lze chápat Ψ_X^t jako difeomorfizmus.

Definice 1.1. Buď $X \in \mathcal{X}(M)$, $\omega \in \Omega^\bullet(M)$. Definujeme **Lieovu derivaci** diferenciální formy ω ve směru vektorového pole X předpisem

$$\mathscr{L}_X\omega = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,(\Psi_X^{t\star}\omega - \omega).$$

Poznámka 1.2. Tedy $(\forall p \in M)(\mathscr{L}_X\omega(p) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,((\Psi_X^{t\star}\omega)(p) - \omega(p)))$.

Poznámka 1.3. $\mathscr{L}_X : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$

Poznámka 1.4. Platí $(\forall f \in C^\infty(M))(\mathscr{L}_X f = Xf)$, neboť $(\forall p \in M)(\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(\Psi_X^t(p)) - f(p)) = Xf(p))$.

Definice 1.2. Buď $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Definujeme **Lieovu derivaci** vektorového pole Y ve směru vektorového pole X předpisem

$$\mathscr{L}_X Y = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,(\Psi_X^{t\star}(Y) - Y).$$

Poznámka 1.5. $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,(\Psi_{X\star}^{-t}(Y) - Y) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,\Psi_{X\star}^{-t}(Y - \Psi_{X\star}^t(Y)) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,(Y - \Psi_{X\star}^t(Y))$, neboť $\lim_{t\to 0} \Psi_{X\star}^t(Z) = Z$. Takže $\mathscr{L}_X Y = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,(Y - \Psi_{X\star}^t(Y))$.

Definice 1.3. Kovariantní tenzor *T* k-tého řádu na varietě M je k-lineární (hladké) zobrazení $T : (\mathcal{X}(M))^k \to C^\infty(M)$ takové, že $T(X_1,\dots,X_k)(p)$ závisí pouze na hodnotách $X_1,\dots,X_k$ v bodě p.

Definice 1.4. Kontravariantní tenzor *S* k-tého řádu na varietě M je k-lineární zobrazení takové, že $S : (\Omega^1(M))^k \to C^\infty(M)$ a $S(\omega^1,\dots,\omega^k)(p)$ závisí pouze na $\omega^1(p),\dots,\omega^k(p)$.

Poznámka 1.6. Pro $\phi : M \to N$ a kovariatní tenzor T na N definujeme

$$(\phi^\star T)(X_1,\dots,X_k)(p) = T(\phi_\star X_1,\dots,\phi_\star X_k)(p),$$

pro difeomorfizmus $\phi : M \to N$ a kontravariantní tenzor S na M definujeme

$$(\phi_\star S)(\omega^1,\dots,\omega^k) = S(\phi^\star\omega^1,\dots,\phi^\star\omega^k).$$

S pomocí předchozí poznámky definujeme Lieovu derivaci libovolného kovariantního tenzoru na varietě M analogicky k definici Lieovy derivace pro formy. Pro kontravariantní tenzory užijeme definice Lieovy derivace pro vektorová pole.

Vlastnosti Lieovy derivace

1. $\boxed{\mathrm{d} \circ \mathscr{L}_X = \mathscr{L}_X \circ \mathrm{d}}$, tj. $(\forall \omega \in \Omega^\bullet(M))(\mathrm{d}\mathscr{L}_X\omega = \mathscr{L}_X \mathrm{d}\omega)$
2. $\boxed{\mathscr{L}_X \circ i_Y = i_Y \circ \mathscr{L}_X + i_{\mathscr{L}_X(Y)}}$
3. $(\forall \omega, \tau \in \Omega^\bullet(M))(\mathscr{L}_X(\omega \wedge \tau) = \mathscr{L}_X\omega \wedge \tau + \omega \wedge \mathscr{L}_X\tau)$
4. $(\forall Y, Z \in \mathcal{X}(M))(\mathscr{L}_X[Y,Z] = [\mathscr{L}_X Y, Z] + [Y, \mathscr{L}_X Z])$

Poznámka 1.7. Důkaz vlastnosti (2):

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_X i_Y\omega &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\Psi_X^{t\star} i_Y\omega - i_Y\omega\right) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(i_{\Psi_X^{t\star}Y}(\Psi_X^{t\star}\omega) - i_Y\omega\right)\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(i_{\Psi_X^{t\star}Y}(\Psi_X^{t\star}\omega) - i_{\Psi_X^{t\star}Y}(\omega) + i_{\Psi_X^{t\star}Y}(\omega) - i_Y\omega\right)\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(i_{\Psi_X^{t\star}Y}(\Psi_X^{t\star}\omega - \omega)\right) + i_{\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\Psi_X^{t\star}(Y)-Y)}\omega = i_Y(\mathscr{L}_X\omega) + i_{\mathscr{L}_X(Y)}\omega \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Z bodu (2) dostáváme důsledek $(f \in C^\infty(M), \mathscr{L}_X \mathrm{d}f = \mathrm{d}(Xf))$: $\mathscr{L}_X(i_Y \mathrm{d}f) = i_Y\mathscr{L}_X\mathrm{d}f + i_{\mathscr{L}_X(Y)}\mathrm{d}f$, tj. $\mathscr{L}_X(Yf) = i_Y(\mathrm{d}(Xf)) + \mathscr{L}_X(Y)f$, z čehož plyne $X(Yf) = Y(Xf) + (\mathscr{L}_X(Y))f$ neboli

$$\boxed{\mathscr{L}_X(Y) = [X,Y]}$$

Z tohoto vztahu a vlastnosti komutátorů pak plyne vlastnost (4). Vlastnost (1) plyne z poznámky **??**.

Poznámka 1.8. Dále je užitečné si uvědomit, že jakékoliv zobrazení $A : \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(M)$ vyhovující $(\forall \omega, \tau \in \Omega^\bullet(M))(A(\omega \wedge \tau) = (A\omega) \wedge \tau + \omega \wedge (A\tau))$, $\mathrm{d} \circ A = A \circ \mathrm{d}$, $(\forall f \in C^\infty(M))(Af = Xf)$, už nutně musí být totožné s $\mathscr{L}_X$.

Důkaz. $A(\mathrm{d}x^k) = \mathrm{d}(Ax^k) = \mathrm{d}(Xx^k) = \mathscr{L}_X(\mathrm{d}x^k)$. $\blacksquare$

Lemma 1.1. Platí $\boxed{i_X(\omega \wedge \tau) = i_X\omega \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge i_X\tau}$, kde $\omega \in \Lambda_p^k M$, $\tau \in \Lambda_p^l M$, $X \in T_pM$.

Důkaz.

$$\begin{aligned}
i_{X_0}(\omega \wedge \tau)(X_1,,\ldots,X_{k+l-1}) &= \sum_{\substack{\overrightarrow{I}\,\overrightarrow{J}\\ |I|=k,|J|=l}} \delta^{\overrightarrow{I}\,\overrightarrow{J}}_{(0,1,\ldots,k+l-1)}\omega(X_{\overrightarrow{I}})\tau(X_{\overrightarrow{J}}) = \sum_{0\in\overrightarrow{I}}(\ldots) + \sum_{0\in\overrightarrow{J}}(\ldots)\\
&= \sum_{\substack{\overrightarrow{H}\,\overrightarrow{J}\\ |H|=k-1,|J|=l}} \delta^{\overrightarrow{H}\,\overrightarrow{J}}_{(1,\ldots,k+l-1)}\omega(X_0, X_{\overrightarrow{H}})\tau(X_{\overrightarrow{J}}) + \sum_{\substack{\overrightarrow{I}\,\overrightarrow{G}\\ |I|=k,|G|=l-1}} \delta^{\overrightarrow{I}\,\overrightarrow{G}}_{(1,\ldots,k+l-1)}\omega(X_{\overrightarrow{I}})\tau(X_0, X_{\overrightarrow{G}})(-1)^k\\
&= (i_{X_0}\omega \wedge \tau)(X_1,\ldots,X_{k+l-1}) + (-1)^k(\omega \wedge\ i_{X_0}\tau)(X_1,\ldots,X_{k+l-1})
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Věta 1.1. Na $\Omega^\bullet(M)$ platí $\boxed{\mathscr{L}_X = \mathrm{d}\circ i_X + i_X\circ\mathrm{d}}$

Důkaz. Využitím předchozí poznámky a lemmatu. Na funkcích $i_X f = 0,\ i_X\mathrm{d}f = Xf = \mathscr{L}_X f$. Dále

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\circ\ i_X + i_X\circ\mathrm{d}) = \mathrm{d}^2\circ i_X + \mathrm{d}\circ i_X\circ\mathrm{d} = \mathrm{d}\circ i_X\circ\mathrm{d} = (\mathrm{d}\circ i_X + i_X\circ\mathrm{d})\circ\mathrm{d}.$$

Pro ověření všech vlastností ještě zbývá dokázat asociativitu:

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\circ i_X + i_X\circ\mathrm{d})\,\omega\wedge\tau &= \mathrm{d}i_X\omega\wedge\tau + (-1)^k\mathrm{d}\omega\wedge i_X\tau + (-1)^{k-1}i_X\omega\wedge\mathrm{d}\tau + \omega\wedge\mathrm{d}i_X\tau\\ &\quad + i_X\mathrm{d}\omega\wedge\tau + (-1)^k i_X\omega\wedge\mathrm{d}\tau + (-1)^{k+1}\mathrm{d}\omega\wedge i_X\tau + \omega\wedge i_X\mathrm{d}\tau\\ &= ((\mathrm{d}i_X + i_X\mathrm{d})\omega)\wedge\tau + \omega\wedge((\mathrm{d}i_X + i_X\mathrm{d})\tau)\end{aligned}$$

■

Důsledek 1.1. Nechť $\omega\in\Omega^1(M),\ X,Y\in\mathcal{X}(M)$. Pak platí tzv. **Cartanův vzorec**

$$\boxed{\mathrm{d}\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])}$$

Důkaz. $(i_X\omega\in C^\infty(M))$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega(X,Y) &= i_Y i_X\mathrm{d}\omega = i_Y(\mathscr{L}_X\omega - \mathrm{d}i_X\omega) = (i_Y\circ\mathscr{L}_X)\omega - Y(\omega(X))\\ &= (\mathscr{L}_X\circ i_Y)\omega - i_{\mathscr{L}_X(Y)}\omega - Y(\omega(X)) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])\end{aligned}$$

■

Věta 1.2. Zobecnění předchozího vzorce ($\omega\in\Omega^k(M)$, stříšky zde znamenají, že se daný prvek jako argument vynechá):

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega(X_1,\dots,X_{k+1}) &= \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j-1}X_j(\omega(X_1,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_{k+1}))\\ &\quad + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{k+1}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_{k+1}).\end{aligned}$$

Důkaz. Indukcí s využitím: $i_{X_{k+1}}\dots i_{X_1}\mathrm{d}\omega = -i_{X_{k+1}}\dots i_{X_2}\mathrm{d}f_{X_1}\omega + i_{X_{k+1}}\dots i_{X_3}(i_{X_2}\mathscr{L}_{X_1}\omega) = \dots$, kde $i_{X_2}\mathscr{L}_{X_1}\omega = \mathscr{L}_{X_1}i_{X_2}\omega - i_{[X_1,X_2]}\omega$, atd. ■

Poznámka 1.9. Levá strana předchozího vzorce závisí jen na $X_i|_p$, výrazy na pravé straně závisí i na X_i v okolí $p\in M$. Z odvození ovšem vyplývá, že celá pravá strana závisí jen na $X_i|_p$.

Věta 1.3. $\boxed{[\mathscr{L}_X,\mathscr{L}_Y] = \mathscr{L}_{[X,Y]}}$

Důkaz. Pro funkce a vektorová pole zřejmé, pro formy:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_X\mathscr{L}_Y - \mathscr{L}_Y\mathscr{L}_X &= \mathrm{d}i_X\mathrm{d}i_Y + \mathrm{d}i_X i_Y\mathrm{d} + i_X\mathrm{d}^2 i_Y + i_X\mathrm{d}i_Y\mathrm{d} - \mathrm{d}i_Y\mathrm{d}i_X - \mathrm{d}i_Y i_X\mathrm{d} - i_Y\mathrm{d}^2 i_X - i_Y\mathrm{d}i_X\mathrm{d}\\ &= \mathrm{d}\circ\mathscr{L}_X\circ i_Y - \mathrm{d}i_Y\circ\mathscr{L}_X + \mathscr{L}_X\circ i_Y\circ\mathrm{d} - i_Y\circ\mathscr{L}_X\circ\mathrm{d}\\ &= \mathrm{d}i_{[X,Y]} + i_{[X,Y]}\mathrm{d} = \mathscr{L}_{[X,Y]}\end{aligned}$$

Lze též jinak: $[i_X\mathrm{d} + \mathrm{d}i_X\mathscr{L}_Y] = \dots = -i_{\mathscr{L}_Y(X)}\mathrm{d} - \mathrm{d}i_{\mathscr{L}_Y(X)}$ ■