Kapitola 1

Integrace na varietách s hranicí, Stokesova věta

Věta 1.1. Buď ϕ difeomorfizmus variet M a N stejné dimenze n, $\omega \in \Omega^n(N)$, $U = U^\circ \subset M$. Pak platí:

$$\int_{\phi(U)} \omega = \int_U \phi^\star \omega.$$

Důkaz. Pomocí rozkladu jednotky převedeme na součet integrálů v $\mathbb{R}^n$, dále viz substituce v Lebesgueově integrálu. ∎

Definice 1.1. Buď M s orientací σ vnořená podvarieta N, $\phi : M \to N$ vnoření, $\dim M = m$, $\dim N = n \geq m$. Pak pro $\omega \in \Omega^m(N)$ definujeme:

$$\int_{(\phi(M),\phi)} \omega = \int_M \phi^\star \omega.$$

Poznámka 1.1. Hodnota integrálu opět nezávisí na konkrétním způsobu parametrizace N, ale může se lišit pro ϕ a ϕ', která nelze propojit difeomorfizmem $\psi : M \to M$ takovým, že $\phi = \phi' \circ \psi$.

Nyní chceme dospět k jedné ze základních vlastností integrálů z forem, tzv. Stokesově větě:

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Nejprve budeme uvažovat dva speciální případy, jež nám umožní větu odvodit:

Příklad 1.1. Uvažujme $\mathbb{R}^2[x, y]$ a oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vymezenou jako vnitřek konvexního lineárního obalu $\Omega = ([(0,0),(1,0),(0,1)]_\kappa)^\circ$. Hranici Ω popíšeme pomocí tří úseček parametrizovaných způsobem:

$$\begin{aligned} \gamma_1(\tau) &= (\tau, 0) \\ \gamma_2(\tau) &= (1-\tau, \tau) \qquad \tau \in \langle 0, 1\rangle \\ \gamma_3(\tau) &= (0, 1-\tau) \end{aligned}$$

Na $\mathbb{R}^2$ definujeme orientaci $\sigma((1,0),(0,1)) \equiv \sigma(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) = 1$, úseky hranice oblasti Ω orientujeme tak, aby $\sigma_i(\frac{\partial}{\partial \tau}) = 1 \Leftrightarrow \sigma(\vec{n}, \gamma_{i\star}(\frac{\partial}{\partial \tau})) = 1$, kde $\vec{n}$ je vnější normála k Ω v $q \in \gamma_i$ a τ je souřadnice podél γ_i.

Buď $\omega = \omega_x \mathrm{d}x + \omega_y \mathrm{d}y \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$, $\mathrm{d}\omega = (\partial_x\omega_y - \partial_y\omega_x)\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Pak platí:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathrm{d}\omega &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y\ (\partial_x\omega_y - \partial_y\omega_x) = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{1-y} \mathrm{d}x\ \partial_x\omega_y - \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y\ \partial_y\omega_x \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}y\ (\omega_y(1-y,y) - \omega_y(0,y)) - \int_0^1 \mathrm{d}x\ (\omega_x(x,1-x) - \omega_x(x,0)) \\ &= -\int_0^1 \mathrm{d}y\ \omega_y(0,y) + \int_0^1 \mathrm{d}x\ \omega_x(x,0) + \int_0^1 \mathrm{d}\tau\ \underbrace{(\omega_y(1-\tau,\tau) - \omega_x(1-\tau,\tau))}_{\gamma_2^*\omega,\ \text{kde}\ \gamma_2(\tau)=(1-\tau,\tau)} \\ &= \int_{\gamma_3}\omega + \int_{\gamma_1}\omega + \int_{\gamma_2}\omega = \int_{\partial\Omega}\omega.\end{aligned}$$

Příklad 1.2. $\mathbb{R}^n[x^1,\dots,x^n]$, (e_i) standardní báze $\mathbb{R}^n$, $x^i(a^j e_j) = x^j$, $\Omega = ([e_0,e_1,\dots,e_n]_\kappa)^\circ$, $e_0 \equiv \vec{0}$, orientace $\sigma(e_1,\dots,e_n) = 1$, $\partial\Omega = \bigcup_{i=0}^n [e_0,\dots,\hat{e}_i,\dots,e_n]_\kappa$, kde stříška značí vynechání prvku.

Na $\partial\Omega_i = [e_0,\dots,\hat{e}_i,\dots,e_n]_\kappa$ zavádíme orientaci opět tak, že $\sigma_i(f_1,\dots,f_{n-1})(z) \equiv \sigma(\vec{n},f_1,\dots,f_{n-1})(z)$, kde $f_1,\dots,f_{n-1} \in T_z(\partial\Omega_i)$ a $\vec{n}$ je ven orientovaná normála k nadrovině obsahující $\partial\Omega_i$. Dále nechť $\omega \in \Omega^{n-1}(V)$, tj. $\mathrm{d}\omega \in \Omega^n(V)$, kde $V = V^\circ \subset \mathbb{R}^n$, $\overline{\Omega} \subset V$:

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i (-1)^{i+1}\ \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n, \qquad \mathrm{d}\omega = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial\omega_i}{\partial x^i}\right) \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n.$$

Pro integrál dostáváme (nutno pamatovat na orientaci):

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathrm{d}\omega &= \int_{\substack{0<x^j<1 \\ \sum_{j=1}^n x^j<1}} \mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial\omega_i}{\partial x^i} \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\substack{0<x^j<1 \\ \sum_{j=1,\,j\neq i}^n x^j<1}} \mathrm{d}x^1 \dots \widehat{\mathrm{d}x^i} \dots \mathrm{d}x^n (\omega_i(x^1,\dots,\underbrace{1-\sum_{i\neq j} x^j}_{i\text{-tá pozice}},\dots,x^n) - \omega_i(x^1,\dots,\underbrace{0}_{i\text{-tá pozice}},\dots,x^n)) \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\substack{0<x^j<1 \\ \sum_{j=1,\,j\neq i}^n x^j<1}} \mathrm{d}x^1 \dots \widehat{\mathrm{d}x^i} \dots \mathrm{d}x^n (\omega_i(x^1,\dots,\underbrace{1-\sum_{i\neq j} x^j}_{i\text{-tá pozice}},\dots,x^n)) + \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega_i}\omega \\ &= \int_{\partial\Omega_0} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1}\omega_i\ \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n + \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega_i}\omega = \sum_{i=0}^n \int_{\partial\Omega_i}\omega \equiv \int_{\partial\Omega}\omega.\end{aligned}$$

Definice 1.2. Mějme $\mathbb{R}^p$ se standardní bází $(e_1,\dots,e_p)$ a orientací σ, $\sigma(e_1,\dots,e_p) = 1$. Definujeme **standardní *p*-simplex** Δ_p jako $(e_0 \equiv \vec{0})$:

$$\Delta_p = [e_0,e_1,\dots,e_p]_\kappa = \{a^i e_i \,|\, a^i \geq 0, \sum_{i=1}^p a^i \leq 1\}.$$

Definice 1.3. (Singulární) *p*-simplex v n-rozměrné varietě M je hladké zobrazení σ_p nějakého $U = U^\circ \subset \mathbb{R}^p$, kde $\Delta_p \subset U$, do M.

Poznámka 1.2. V předchozí definici se za definiční obor zobrazení bere okolí Δ_p a ne samo Δ_p mj. proto, že chceme, aby byla zajištěna existence derivací na hranicích. Dále pokládáme $\sigma_p \equiv \sigma_p(\Delta_p)$.

Poznámka 1.3. Dva singulární p-simplexy σ_p a σ'_p (z $U \subset \mathbb{R}^p$ do M) považujeme za **ekvivalentní**, pokud existuje $V = V^\circ \subset U$, $\Delta_p \subset V$ a difeomorfizmus $\phi : V \to \phi(V)$ takový, že $\phi(\Delta_p) = \Delta_p$ a $\sigma'_p\big|_{\phi(U)} = \sigma_p \circ \phi|_U$.

Definice 1.4. (Singulární) *p*-řetězec v n-rozměrné varietě M je libovolná formální lineární kombinace singulárních p-simplexů na M (modulo ekvivalence).

Definice 1.5. Operátor hranice ∂ přiřazuje p-řetězcům na M $(p-1)$-řetězce následovně:

- Standardnímu p-simplexu přiřadí

$$\partial\Delta_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \Delta_{p-1}^{(k)},$$

  kde $\Delta_{p-1}^{(k)} = [e_0, \ldots, \hat{e}_k, \ldots, e_p]_\kappa$ je třeba chápat jako singulární $(p-1)$-simplex ve varietě $\mathbb{R}^p$, $\Delta_{p-1}^{(k)} : U \subset \mathbb{R}^{p-1} \to \mathbb{R}^p$, kde $\Delta_{p-1} \subset U$.

- Singulárnímu p-simplexu σ_p přiřadí

$$\partial\sigma_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \sigma_p \circ \Delta_{p-1}^{(k)}.$$

- Lineárním rozšířením definujeme hranici libovolného p-řetězce.

Tj. operátor hranice přiřazuje p-simplexu orientovaný součet jeho stěn, kde orientace je indukována vnější normálou a orientací $\mathbb{R}^p$, tj. $\sigma'(f_1, \ldots, f_{p-1}) = \sigma(n, f_1, \ldots, f_{p-1})$

Poznámka 1.4. Z elementární geometrie dostáváme $\partial^2\Delta_p = \partial \circ \partial(\Delta_p) = 0$ a tudíž $\boxed{\partial^2 = 0}$ obecně.

Definice 1.6. Buď c_p singulární p-řetězec ve varietě M, $c_p = \sum_{i=1}^{k} a_i \sigma_p^{(i)}$. **Integrál *p*-formy $\boldsymbol{\omega}$** přes řetězec c_p je definován předpisem

$$\int_{c_p} \omega = \sum_{i=1}^{k} a_i \int_{(\sigma_p^{(i)}(\Delta_p), \sigma_p^{(i)})} \omega = \sum_{i=1}^{k} a_i \int_{\Delta_p} \sigma_p^{(i)\star} \omega.$$

Věta 1.2. (Stokesova pro *p*-řetězce) Buď c_p p-řetězec na varietě M, $\omega \in \Omega^{p-1}(M)$. Pak platí

$$\int_{c_p} \mathrm{d}\omega = \int_{\partial c_p} \omega.$$

Důkaz. Viz integrály po standardních simplexech a definice integrálu po p-řetězci. ∎

Definice 1.7. Buď N orientovatelná varieta, $\dim N = p$, ϕ její prosté vnoření do variety M. Buď dále $\overline{\phi(N)}$ kompaktní. Pak existuje **triangulace** vnořené podvariety N, tj. její pokrytí p-řetězcem $c_p = \sum_{k=1}^{m} \sigma_p^{(k)}$, který splňuje:

1. $(\forall q \in N)((\exists_1 k \in \hat{m})(q = \sigma_p^{(k)}(q_0), q_0 \in \Delta_p^\circ)$ nebo $(\exists k \in \hat{m})(q = \sigma_p^{(k)}(q_0), q_0 \in \Delta_p \setminus \Delta_p^\circ))$
2. $(\forall k \in \hat{m})(\sigma_p^{(k)} : U^{(k)} = U^{(k)\circ} \to N, \Delta_p \subset U^{(k)})$
3. $(\forall k \in \hat{m})(\sigma_p^{(k)}$ je prosté$)$
4. $(\forall k \in \hat{m})(\sigma_p^{(k)}$ zachovává orientaci variety $N)$

Takový řetězec nazýváme **simpliciální**.

$\partial c_p \equiv \partial N$ lze popsat jako konečné sjednocení vnořených variet překrývajících se na množině míry nula z hlediska $\int_{\partial c_p}$. Vnitřní stěny se při integraci (či rovnou v lineární kombinaci simplexů) navzájem vyruší, neboť jsou v ∂c_p vždy obsaženy dvakrát s navzájem opačnou orientací. Tudíž dostáváme následující větu.

Věta 1.3. (Stokes) Nechť N je orientovaná vnořená podvarieta M, N je kompaktní a jako podmnožina M je uzavřená, $\dim N = p$, $\omega \in \Omega^{p-1}(N)$. Pak platí

$$\int_{\partial N} \omega = \int_N \mathrm{d}\omega.$$