Geometrické metody fyziky 1

28. března 2024

Obsah

1 Diferencovatelné variety **2**

2 Tečné vektory k varietě **4**

3 Tečný bundle, vektorová pole, integrální křivky **7**

4 Abstraktnější pohled na vektorová pole **10**

5 Diferenciální formy **13**

6 Operace s diferenciálními formami **16**

7 Zobrazení indukovaná zobrazením variet, podvariety **20**

8 Lieova derivace **23**

9 Geometrická formulace Hamiltonovy mechaniky **26**

10 Integrace forem **29**

11 Integrace na varietách s hranicí, Stokesova věta **32**

12 Variety s dodatečnou strukturou **36**

Kapitola 1

Diferencovatelné variety

Geometrickými vlastnostmi matematických struktur se v principu zabývají dvě oblasti matematiky:

- **Algebraická geometrie** zkoumá útvary v daném prostoru ($\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n, \mathbb{CP}^n, \dots$) zadané jako množina řešení (systémů) polynomiálních rovnic, tzv. algebraické variety (angl. variety), které mohou obsahovat různé typy singularit, viz např. $x \cdot y = 0$ v $\mathbb{R}^2[x, y]$. Jedná se o velice abstraktní oblast matematiky.
- **Diferenciální geometrie**, neboli globální analýza, zkoumá topologické prostory, které jsou lokálně ztotožnitelné s $\mathbb{R}^n$, ze kterého se na ně přenáší pojmy známé z analýzy. Podstatné jsou vnitřní vlastnosti a jejich popis v různých souřadnicích, nikoliv způsob vnoření do nějakého vektorového či afinního prostoru. Základním pojmem je tzv. diferencovatelná (neboli hladká) varieta (angl. manifold).

V tomto skriptu se budeme věnovat základním pojmům druhé jmenované. Nejprve uveďme pár definic:

Definice 1.1. Topologický prostor (M, τ) je **Hausdorffův** $\Leftrightarrow (\forall x, y \in M, x \neq y)(\exists U = U^\circ, x \in U)(\exists V = V^\circ, y \in V)(U \cap V = \varnothing)$.

Definice 1.2. Nechť jsou $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I} \in \tau, \{V_\beta\}_{\beta\in J} \in \tau$ dvě otevřená pokrytí topologického prostoru (M, τ), tj. $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha = M = \bigcup_{\beta\in J} V_\beta$, pak $\{V_\beta\}_{\beta\in J}$ je **zjemněním** $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I} \Leftrightarrow (\forall \beta \in J)(\exists \alpha \in I)(V_\beta \subset U_\alpha)$.

Definice 1.3. Otevřené pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ topologického prostoru (M, τ) je **lokálně konečné** $\Leftrightarrow (\forall x \in M)(\exists J \subset I, \#\{J\} < +\infty)(\forall \alpha \in I \setminus J)(\{x\} \cap U_\alpha = \varnothing)$.

Definice 1.4. Topologický prostor (M, τ) je **parakompaktní** $\Leftrightarrow$ pro každé pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ existuje lokálně konečné zjemnění.

Definice 1.5. Nechť (M, τ) je topologický prostor, $U = U^\circ \subset M$, $V = V^\circ \subset \mathbb{R}^n$. Pak homeomorfizmus $\varphi : U \to V$ nazýváme **mapa** či **lokální souřadnice** na M. U nazýváme **souřadnicové okolí** v M.

Definice 1.6. Otevřené pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ topologického prostoru (M, τ) vybavené mapami $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \varphi_\alpha(U_\alpha)$ nazýváme **atlas** na M a n nazýváme **dimenzí atlasu**. Atlas obvykle značíme $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$. (Připomeňme, že $\varphi_\alpha(U_\alpha) = (\varphi_\alpha(U_\alpha))^\circ \subset \mathbb{R}^n$.)

Poznámka 1.1. Klademe $\dim M = n$ (n viz předchozí definice).

Poznámka 1.2. C^ω označuje analytické funkce (tj. jejichž Taylorův rozvoj konverguje v každém bodě). Standardně budeme uvažovat C^∞, tj. funkce libovolněkrát diferencovatelné.

Definice 1.7. Buď $k \in \mathbb{N}$, popř. $k \in \{\infty, \omega\}$. Atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ na M je **třídy C^k** $\Leftrightarrow$ $(\forall \alpha, \beta \in I : U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing)$ je zobrazení $\tau_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ třídy C^k a zároveň zobrazení inverzní je třídy C^k.

Definice 1.8. Zobrazení $\tau_{\alpha\beta}$ z předchozí definice nazýváme **přechodová funkce**.

Definice 1.9. Mapa (U, φ) je **C^k-kompatibilní** s atlasem $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ $\Leftrightarrow$ $(\forall \alpha \in I : U \cap U_\alpha \neq \varnothing)$ $(\varphi_\alpha \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap U_\alpha) \to \varphi_\alpha(U \cap U_\alpha)$ je třídy C^k a současně $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ je třídy C^k, tj. $\varphi \circ \varphi_\alpha^{-1}$ je difeomorfizmus třídy $C^k)$.

Definice 1.10. Atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ třídy C^k na M je **maximální** $\Leftrightarrow$ obsahuje všechny mapy s ním C^k-kompatibilní. Maximální atlas třídy C^∞ na M nazýváme **diferencovatelná** či **hladká struktura** na M.

Definice 1.11. Topologický Hausdorffův parakompaktní prostor (M, τ) vybavený diferencovatelnou strukturou nazýváme **diferencovatelná varieta** (neboli **hladká varieta**).

Poznámka 1.3. Místo parakompaktnosti se často žádá silnější podmínka, a to aby byl prostor (M, τ) **lokálně kompaktní** (tj. každý bod p má kompaktní okolí, tj. kompaktní množinu obsahující otevřenou množinu obsahující p) se **spočetnou bází topologie** (tj. $(\exists \{U_\alpha\}_{\alpha\in I} : U_\alpha = U_\alpha^\circ, I$ je spočetná$)(\forall V \in \tau)$ $(\exists J \subset I)(V = \bigcup_{\alpha\in J} U_\alpha)$).

Díky lokálnímu ztotožnění topologického prostoru M s prostorem $\mathbb{R}^n$ pomocí atlasu jsme najednou schopni na M např. derivovat, zkoumat hladkost atd. Většinou se setkáme s varietami pokrytými nejvýše spočetným systémem map. Pak lze topologii τ převést pomocí φ_α^{-1} z $\mathbb{R}^n$ a nemusí být zadána předem. Maximalita atlasu se vyžaduje za účelem jednoznačnosti pojmu varieta. Při praktickém počítání použijeme spíše atlas s minimálním počtem map.

Definice 1.12. Spojité zobrazení ϕ dvou diferencovatelných variet M a N $(\phi : M \to N)$ je **hladké** (tj. třídy C^∞) $\Leftrightarrow$ pro každou mapu $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ z atlasu M a pro každou mapu (V_β, ψ_β) z atlasu N, kde $\phi(U_\alpha) \cap V_\beta \neq \varnothing$, je zobrazení $\psi_\beta \circ \phi \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap \phi^{(-1)}(V_\beta)) \subset \mathbb{R}^m \to \psi_\beta(\phi(U_\alpha) \cap V_\beta) \subset \mathbb{R}^n$ hladké, kde $m = \dim M$ a $n = \dim N$.

Definice 1.13. Hladkou bijekci $\phi : M \to N$ takovou, že ϕ^{-1} je též hladké, nazýváme **difeomorfizmus** variet M a N.

Poznámka 1.4. Difeomorfní variety považujeme za ekvivalentní a pro praktické účely je ztotožňujeme, např. $S^2 \simeq \mathbb{CP}^1$.

Často diferencovatelné variety zadáváme pomocí vazeb, tj. jako vzor $F^{(-1)}(y_0)$ nějakého vybraného bodu $y_0 \in \mathbb{R}^r$ při zobrazení $F : \mathbb{R}^{n+r} \to \mathbb{R}^r$. Topologii na $F^{(-1)}(y_0)$ uvažujeme indukovanou z $\mathbb{R}^{n+r}$ (indukuje se tak lokální kompaktnost, spočetná báze a to, že prostor je Hausdorffův), mapy přenášíme pomocí věty o implicitní funkci. Její aplikací dostáváme následující větu.

Věta 1.1. Buď $F : \mathbb{R}^{r+n} \to \mathbb{R}^r$ třídy C^∞, $y_0 \in \mathbb{R}^r$, $F^{(-1)}(y_0) = \{x \in \mathbb{R}^{r+n} | F(x) = y_0\}$ a nechť $\forall x \in F^{(-1)}(y_0)$ platí $\operatorname{rank} \mathrm{d}F(x) = \dim \mathbb{R}^r = r$. Pak $F^{(-1)}(y_0)$ je diferencovatelnou varietou dimenze n s mapami vytvořenými s využitím věty o implicitní funkci.

Poznámka 1.5. Pokud $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{C}^n$, tak může nastat situace, kdy jsou všechny přechodové funkce $\tau_{\alpha\beta} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ na svém definičním oboru holomorfní. Tím pádem máme holomorfní atlas definující tzv. n-rozměrnou **komplexní varietu**. Každá n-rozměrná komplexní varieta je $2n$-rozměrnou reálnou varietou, opačná implikace obecně neplatí.

Poznámka 1.6. Máme-li $(M, \tau, \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I})$, $(N, \sigma, \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta\in J})$, $\dim M = m, \dim N = n$, dvě variety, pak lze na $M \times N$ přirozeně zavést **součinovou topologii** $\tau \times \sigma$ (otevřené množiny jsou konečné průniky a libovolná sjednocení kartézských součinů otevřených množin). S mapami $\chi_{\alpha\beta} : U_\alpha \times V_\beta \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $\chi_{\alpha\beta}(u, v) = (\varphi_\alpha(u), \psi_\beta(v))$, je pak taková množina $M \times N$ $(m + n)$-rozměrnou diferencovatelnou varietou.

Kapitola 2

Tečné vektory k varietě

Chceme zavést na varietě obdobu derivace ve směru vektoru v $\mathbb{R}^n$. Máme dvě možnosti: pomocí křivek a pomocí zobrazení.

Zavedení tečného vektoru pomocí křivek

Definice 2.1. Hladké zobrazení $\gamma : (a, b) \to M$, kde $a < 0 < b$, nazýváme **(hladká) křivka** ve varietě M vycházející z bodu $p_0 = \gamma(0)$.

Poznámka 2.1. $\boldsymbol{C^\infty(M)} := \{f : M \to \mathbb{R} \text{ třídy } C^\infty\}$

Poznámka 2.2. Zavádíme ekvivalenci mezi křivkami vycházejícími z $p_0 \in M$ ($f \circ \gamma : (a, b) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tj. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}$ má smysl):

$$\gamma \sim \tilde{\gamma} \Leftrightarrow (\forall f \in C^\infty(M)) \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma)\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \tilde{\gamma})\Big|_{t=0} \right).$$

Definice 2.2. Tečný vektor X k varietě M v bodě $p_0 \in M$ je libovolná třída ekvivalence křivek $[\gamma]$ vycházejících z bodu p_0.

Definice 2.3. Derivace funkce f ve směru tečného vektoru X, $f \in C^\infty(M)$, je dána vztahem $Xf = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma)\big|_{t=0}$ pro libovolnou $\gamma \in [\gamma]$.

V libovolných lokálních souřadnicích $x^i = \varphi^i(p)$, $p \in U = U^\circ$, $p_0 \in U$, $x_0 = \varphi(p_0)$ můžeme tečný vektor ztotožnit se směrovou derivací $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_{x_0}$, kde $X^i = X\varphi^i = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi^i \circ \gamma)\big|_{t=0} \in \mathbb{R}$ (všimněme si, že $\varphi^i \circ \gamma$ je i-tá složka křivky γ v souřadnicovém vyjádření φ), neboť dle vztahu pro derivaci složené funkce máme ($x_0 = \varphi(\gamma(0))$):

$$\sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{x_0} F = \sum_{i=1}^n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi^i \circ \gamma)\Big|_{t=0} \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \varphi^{-1})\Big|_{x_0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \varphi^{-1} \circ \varphi \circ \gamma)\Big|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f \circ \gamma)\Big|_{t=0}.$$

Tedy $Xf = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\big|_{x_0} F$. Reálnou funkci F, kde $F = f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) = \varphi(U)^\circ \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, nazýváme **vyjádření funkce f v lokálních souřadnicích** (x^i). Většinou ji značíme stejně jako samotnou fukci f a použité souřadnice vyplývají z kontextu.

Podobně většinou píšeme $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_{p_0}$ místo $\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_{\varphi(p_0)}$, tj. ztotožňujeme bod a jeho souřadnicové vyjádření v souřadnicích použitých v daném výrazu. Souřadnice až na výjimky píšeme s horními indexy.

Nadále budeme využívat sumační konvenci – index vyskytující se jednou nahoře a jednou dole se sčítá od 1 do dimenze variety.

Poznámka 2.3. Nechť $X^i \in \mathbb{R}$. Pak operátor X definovaný jako $X = X^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_{p_0}$ je působením tečného vektoru $[\gamma]$, kde γ je v souřadnicích (x^i) definována způsobem $\gamma^i(t) = x^i(p_0) + t\,X^i$.

Při změně souřadnic $(x^i) \to (\tilde{x}^i)$ se souřadnicové vyjádření tečného vektoru mění podle vztahu pro derivaci složené funkce: $X^i = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x^i(\gamma(t))\right|_{t=0}$ a $\tilde{X}^i = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\tilde{x}^i(\gamma(t))\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\right|_p \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} x^j(\gamma(t))\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\right|_p X^j$, z čehož plyne vztah

$$X = \tilde{X}^i \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\right|_p = X^j \left.\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\right|_p \left.\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\right|_p = X^j \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p .$$

Zavedení tečného vektoru pomocí zobrazení

Definice 2.4. Tečný vektor X k varietě M v bodě $p \in M$ je zobrazení $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ vyhovující následujícím podmínkám:

1. $(\forall f, g \in C^\infty(M))(\forall a \in \mathbb{R})(X(af + g) = aXf + Xg)$, tj. linearita
2. $(\forall f, g \in C^\infty(M))(X(fg) = f(p)(Xg) + (Xf)g(p))$, tj. Leibnizovo pravidlo
3. $(\forall f, g \in C^\infty(M))((\exists U = U^\circ, p \in U)(\forall r \in U)(f(r) = g(r)) \Rightarrow Xf = Xg)$

Věta 2.1. Uvedené dvě definice tečného vektoru jsou ekvivalentní.

Důkaz. $X = [\gamma] \to X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}, X^i = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varphi^i \circ \gamma)\right|_{t=0}$ splňuje linearitu, Leibnizovo pravidlo i rovnost na funkcích splývajících na okolí.

Naopak, mějme $X : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ vyhovující vlastnostem. Definujme $X^i = X\varphi^i$, kde (φ^i) jsou souřadnice na U okolí p. Přísně vzato potřebujeme φ jako funkci na celém M, k tomu si pomůžeme podmínkou (3). Nechť $U_1 \subset U_2$ jsou vzory otevřených do sebe vnořených koulí v $\mathbb{R}^n \cap \varphi(U)$ se středem v bodě $\varphi(p)$, tj. $U_1 \subset U_2 \subset U$, a definujeme:

$$\begin{aligned}
&\tilde{\varphi}^i = \varphi^i && \text{na } U_1\\
&\tilde{\varphi}^i = 0 && \text{na } M \setminus U_2\\
&\tilde{\varphi} \ = \text{hladká interpolace (viz funkcionální analýza)} && \text{na } U_2 \setminus U_1
\end{aligned}$$

Z této definice plyne $\tilde{\varphi}^i \in C^\infty(M)$ a $X\varphi^i \equiv X^i = X\tilde{\varphi}^i$ nezávisí na volbě U_1, U_2 (díky podmínce (3)). Definujme $\widetilde{X} = X^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$, což je tvar tečného vektoru podle první definice. Chceme ukázat, že $\forall f \in C^\infty(M)$ platí $Xf = \widetilde{X}f$. Funkce $f \in C^\infty(U_1)$ (viz rozšíření souřadnicových funkcí) má v lokálních souřadnicích tvar $f(x^1, \ldots, x^n)$. Bez újmy na obecnosti zvolíme $x^i(p) = 0$. Z Taylorova rozvoje pro funkci f plyne: $f(\vec{x}) = f(\vec{0}) + x^i \left.\frac{\partial f}{\partial x^i}\right|_{\vec{0}} + g(\vec{x})$, kde g je nějaká hladká funkce na okolí $\vec{0}$, $g(\vec{0}) = 0$, $\left.\frac{\partial g}{\partial x^i}\right|_{\vec{0}} = 0$

a tedy:

$$\begin{aligned} f(\vec{x}) - f(\vec{0}) &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\vec{x}t)\,\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1-t)\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\vec{x}t)\,\mathrm{d}t = -[(1-t)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\vec{x}t)]_0^1 + \int_0^1 (1-t)\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2} f(\vec{x}t)\,\mathrm{d}t \\ &= x^i\ \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_{\vec{0}} + \int_0^1 (1-t) x^i x^j \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} f(\vec{x}t)\,\mathrm{d}t \\ &= x^i\ \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_{\vec{0}} + \underbrace{x^i x^j \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} f(\vec{x}t)\,\mathrm{d}t}_{g(\vec{x}) = x^i x^j g_{ij}(\vec{x})}, \end{aligned}$$

kde $g_{ij}(\vec{x}) = \int_0^1 (1-t)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} f(\vec{x}t)\,\mathrm{d}t$ jsou nějaké hladké funkce. Z linearity a Leibnizova pravidla plyne $X(konst.) = 0$ a tedy: $Xf = 0 + X^i\ \frac{\partial f}{\partial x^i}\big|_{\vec{0}} + X(x^i x^j g_{ij}(\vec{x}))$. Použitím Leibnizova pravidla navíc dostáváme $X(x^i x^j g_{ij}(\vec{x})) = 0$, neboť nám po jeho aplikaci zůstane v každém členu alespoň jedno $x^i\big|_0 = 0$. Celkem $Xf = \widetilde{X} f$ a obě definice jsou tedy ekvivalentní. ■

Poznámka 2.4. Množina tečných vektorů k M v $p \in M$ má přirozenou strukturu vektorového prostoru.

Důkaz. Vycházejme z druhé definice tečného vektoru. Uvažovaná zobrazení $C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ tvoří vektorový prostor, neboť součet a konstantní násobek zobrazení splňující 1., 2., 3. splňuje 1., 2., 3. ■

Definice 2.5. Tečný prostor T_pM k varietě M v bodě $p \in M$ je vektorový prostor tvořený tečnými vektory k M v p. $\dim T_pM = \dim M$.

Kapitola 3

Tečný bundle, vektorová pole, integrální křivky

Zaveďme disjunktní sjednocení všech $T_pM,\ p \in M$ (tj. $V \in TM \Leftrightarrow (\exists p \in M)(\exists X \in T_pM)(V = X)$):

$$\boldsymbol{TM} = \coprod_{p\in M} T_pM = \{X_p \in T_pM |\ p \in M\}.$$

Na TM zavádíme zobrazení $\pi : TM \to M$, $\pi(X_p) = p$. Na TM můžeme přirozeným způsobem zavést strukturu diferencovatelné variety. Buď $\{U_\alpha, (x^i_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ diferencovatelný atlas na M, $\dim M = n$. Pak zavedeme na TM atlas $\{V_\alpha, \psi_\alpha\}_{\alpha\in I}$, kde $V_\alpha = \pi^{(-1)}(U_\alpha)$ a $\psi_\alpha : V_\alpha \to \mathbb{R}^{2n}$ jsou definovány předpisem:

$$\psi_\alpha(X_p) = (x^1_\alpha(p), \dots, x^n_\alpha(p), X^1_\alpha(p), \dots, X^n_\alpha(p)),\ \text{kde } X_p = X^i_\alpha(p)\ \frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_p .$$

Zobrazení ψ_α je bijekce. Zvolíme na TM takovou topologii, aby bylo ψ_α i π spojité. Přechodové zobrazení má tvar ($\tau_{\alpha\beta} = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1},\ X_p = X^i_\beta\ \frac{\partial}{\partial x^i_\beta}\Big|_p$):

$$\tau_{\alpha\beta}(x^1_\alpha, \dots, x^n_\alpha, X^1_\alpha, \dots, X^n_\alpha) = (x^1_\beta(x_\alpha), \dots, x^n_\beta(x_\alpha), X^1_\beta, \dots, X^n_\beta),$$

kde $X^i_\beta = \frac{\partial x^i_\beta}{\partial x^j_\alpha}\Big|_{x_\alpha} \cdot X^j_\alpha$. Zobrazení $\tau_{\alpha\beta}$ je hladké, neboť lineární zobrazení $(X^1_\alpha, \dots, X^n_\alpha) \to \left(\frac{\partial x^i_\beta}{\partial x^j_\alpha}\Big|_{x_\alpha} \cdot X^j_\alpha\right)_{i=1}^n$ je hladké jako funkce $2n$ proměnných x^i a X^i a $x_\beta \circ x_\alpha^{-1}$ je hladké z předpokladů.

Poznámka 3.1. U variet budeme dále implicitně uvažovat zobrazení, která jsou hladká.

Definice 3.1. Diferencovatelnou varietu TM nazýváme **tečný fibrovaný prostor** (též **tečný bundle**). TM je speciálním případem tzv. fibrovaného prostoru.

Definice 3.2. Fibrovaný prostor (angl. fibre bundle) je diferencovatelná varieta E, nazývaná **totální prostor**, vybavená následujícími dodatečnými strukturami:

1. Diferencovatelnou varietou M zvanou **báze** neboli **bázová varieta** se surjektivním zobrazením $\pi : E \to M$ zvaným **projekce** a otevřeným pokrytím $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$, $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha = M$.

2. Diferencovatelnou varietou F zvanou **typické vlákno** s difeomorfizmy $\psi_\alpha : \pi^{(-1)}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$ zvanými **lokální trivializace** splňujícími (π_1 je projekce na první složku kartézského součinu $U_\alpha \times F$):
$$\pi_1 \circ \psi_\alpha = \pi|_{\pi^{(-1)}(U_\alpha)}.$$

Definice 3.3. Nechť $p \in U_\alpha \cap U_\beta$. Zobrazení $\tau_{\alpha\beta} : F \to F$ takové, že
$$(\forall u \in F)((p, \tau_{\alpha\beta}(p)u) = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(p, u)),$$
nazýváme **přechodová funkce** na vlákně při přechodu z trivializace (U_α, ψ_α) do trivializace (U_β, ψ_β).

Poznámka 3.2. Neplést $\tau_{\alpha\beta}$ s přechodovou funkcí u variet.

Poznámka 3.3. Fibrovaný prostor $(E, M, F, \pi, \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in I})$ často značíme jen jako E nebo $E \xrightarrow{\pi} M$.

Často klademe omezení na přípustné lokální trivializace: připouštíme pouze takové trivializace, kdy všechny přechodové funkce na vlákně leží ve vhodně vybrané grupě zobrazení $F \to F$, tj. ve vhodné podgrupě grupy všech difeomorfizmů $\mathrm{Diff}(E)$. Vybranou grupu nazýváme **strukturní grupa** fibrovaného prostoru E. Může jít o případy, kdy má F dodatečnou strukturu, jako např. vektorový prostor nebo varieta s metrikou. Za přechodové funkce se pak vybírají zobrazení zachovávající onu strukturu, např. lineární zobrazení.

Poznámka 3.4. Pokud F má strukturu vektorového prostoru, je přirozené požadovat, aby strukturní grupa fibrovaného prostoru E s typickým vláknem F byla $GL(\dim F, \mathbb{R})$. Takový fibrovaný prostor nazýváme **vektorový fibrovaný prostor**.

Definice 3.4. Pro dané $p \in M$ nazýváme $\pi^{(-1)}(p)$ **vlákno nad bodem *p***. $\pi^{(-1)}(p)$ je diferencovatelná varieta izomorfní typickému vláknu F (izomorfizmus není určen jednoznačně, předpis pro něj zní: $x \to \pi_2(\psi_\alpha(x)),\ x \in \pi^{(-1)}(p)$).

Definice 3.5. Řez fibrovaného prostoru E definujeme jako hladké zobrazení $\sigma : M \to E$ vyhovující podmínce $\pi \circ \sigma = id$. Množinu všech řezů E značíme $\Gamma(E)$.

Definice 3.6. Lokální řez na okolí $U = U^\circ \subset M$ je hladké zobrazení $\sigma : U \to E$ splňující $\pi \circ \sigma = id|_U$.

Definice 3.7. Zobrazením fibrovaných prostorů (E, M, F, π) a $(\tilde{E}, \tilde{M}, \tilde{F}, \tilde{\pi})$ (angl. bundle map) nazveme dvojici zobrazení $\phi : E \to \tilde{E}$ a $\varphi : M \to \tilde{M}$ vyhovující podmínce: $\tilde{\pi} \circ \phi = \varphi \circ \pi$.

Definice 3.8. Fibrovaný prostor $E \xrightarrow{\pi} M$ je **triviální**, pokud existuje vzájemně jednoznačné zobrazení fibrovaných prostorů $E \xrightarrow{\pi} M$ a $M \times F \xrightarrow{\pi_1} M$.

Definice 3.9. Vektorové pole X na varietě M je řez tečného bundlu, tj. $X \in \Gamma(TM)$. Množinu všech vektorových polí na varietě M značíme $\mathcal{X}(M)$ nebo $\Gamma(TM)$ (viz důsledek 4.1).

Poznámka 3.5. Jinak řečeno, vektorové pole přiřazuje každému $p \in M$ tečný vektor $X(p) \in T_pM$ hladkým způsobem, tj. v libovolných souřadnicích $X(p) = X^i(p)\frac{\partial}{\partial x^i}$, kde $X^i \in C^\infty(U)$, $(X : M \to TM)$.

Definice 3.10. Integrální křivka vektorového pole $X \in \mathcal{X}(M)$ vycházející z bodu $p_0 \in M$ je hladké zobrazení $\gamma : (a, b) \to M,\ a < 0 < b,\ \gamma(0) = p_0$, takové, že $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma(t) \equiv \dot{\gamma}(t) = X|_{\gamma(t)}$. Přitom $\dot{\gamma}(t)$ je definováno jako tečný vektor v $\gamma(t) \in M$ určený třídou ekvivalence $[\tilde{\gamma}]$, kde $\tilde{\gamma}(s) = \gamma(t + s)$, $s \in (a - t, b - t)$.

Poznámka 3.6. V lokálních souřadnicích:
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma^i(t) = X^i(\gamma^1(t), \ldots, \gamma^n(t)),\ \gamma^i(0) = x^i(p_0),\ \forall i \in \hat{n},\ \text{kde } \gamma^i(t) = x^i(\gamma(t)).$$

Definice 3.11. Vektorové pole $X \in \mathcal{X}(M)$ je **úplné**, právě když lze každou jeho integrální křivku rozšířit na integrální křivku zobrazující $\mathbb{R}$ do M.

Definice 3.12. Tok vektorového pole $X \in \mathcal{X}(M)$ je zobrazení $\Psi_X : U \to M$, kde $U = U^\circ \subset M \times \mathbb{R}$ a $M \times \{0\} \subset U$, takové, že $(\forall p \in M)(\Psi_X(p,0) = p)$ a $\Psi_X(p,t) = \gamma_X^p(t)$ je integrální křivka vektorového pole X vycházející z bodu $p \in M$.

Poznámka 3.7. Z teorie diferenciálních rovnic vyplývá, že existuje právě jedno hladké zobrazení Ψ_X. Dále budeme často psát $\Psi_X(p,t) \equiv \Psi_X^t(p)$, kde $\Psi_X^t : M \to M$.

Poznámka 3.8. $\boxed{\Psi_X^s \circ \Psi_X^t(p) = \Psi_X^{s+t}(p)}$, pokud má pravá strana smysl, tj. $(\Psi_X^t(p), s) \in U,\ (p,t) \in U$.

V lokálních souřadnicích (x^i), kde jsme označili $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n) = (x^1(p), \dots, x^n(p))$, máme:

$$\Psi_X \leftrightarrow (\Psi_X^i) : V_1 \times V_2 \to \mathbb{R}^n,\ V_1 = V_1^\circ \subset \mathbb{R}^n,\ V_2 = V_2^\circ \subset \mathbb{R},\ 0 \in V_2 :$$
$$\Big(\forall (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n) \in V_1,\ t \in V_2\Big)\left(\frac{\partial}{\partial t}\Psi_X^i(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, t) = X^i(\Psi_X(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, t))\right),$$
$$\Big(\forall (\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n) \in V_1\Big)\Big(\Psi_X^i(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, 0) = \tilde{x}^i\Big).$$

Kapitola 4

Abstraktnější pohled na vektorová pole

Definice 4.1. Buď M neprázdná množina, Ω neprázdná množina n-árních zobrazení $M \times \cdots \times M \to M$. Potom dvojici (M, Ω) nazýváme **algebra**. Množinu M nazýváme **nosič algebry** (M, Ω).

Poznámka 4.1. Pro účely GMF budeme uvažovat pouze algebry, jejichž nosič je vektorový prostor V (ten má sám o sobě binární operaci sčítání a modulární operaci násobení číslem z tělesa). Množina Ω bude nadále tvořena pouze jedinou bilineární operací m.

Poznámka 4.2. Algebra (V, m) je:

1. **asociativní** $\Leftrightarrow (\forall u, v, w \in V)(m(u, m(v, w)) = m(m(u, v), w))$
2. **komutativní** neboli **abelovská** $\Leftrightarrow (\forall u, v \in V)(m(u, v) = m(v, u))$
3. **Lieova** $\Leftrightarrow \forall u, v, w \in V$ platí následující dvě podmínky:
   (a) $m(u, v) = -m(v, u)$, tj. antikomutativita
   (b) $m(u, m(v, w)) + m(v, m(w, u)) + m(w, m(u, v)) = 0$, tj. Jacobiho identita

Binární operaci v algebře (M, Ω) nazýváme obvykle *násobení* a pro $x, z \in M$, $\omega \in \Omega$ místo značení $\omega(x, y)$ používáme krátce $x.y$. Další možností značení je např. sčítání $x + y$. Vhodné značení vybíráme podle vlastností operace – asociativní násobení značíme jako součin, násobení v Lieově algebře nazýváme **Lieova závorka** a značíme $[\cdot, \cdot]$.

Příklad 4.1. Algebry lze zavést například následujícími způsoby:

- $(\mathcal{L}(V), m)$, kde $(\forall A, B \in \mathcal{L}(V))(m(A, B) = A \circ B)$, je asociativní algebra
- $(\mathcal{L}(V), [\cdot, \cdot])$, kde $(\forall A, B \in \mathcal{L}(V))([A, B] = A \circ B - B \circ A)$, je Lieova algebra
- $(C^\infty(M), [\cdot, \cdot])$, kde $[f, g] = \{f, g\}$ a $\{\cdot, \cdot\}$ je Poissonova závorka, je Lieova algebra
- $(C^\infty(M), \cdot)$, kde $(\forall f, g \in C^\infty(M))(\forall p \in M)((f \cdot g)(p) = f(p) \cdot g(p))$, je komutativní asociativní algebra

Definice 4.2. Derivace algebry (V, m) je libovolné lineární zobrazení $D : V \to V$ vyhovující podmínce $(\forall x, y \in V)(D(m(x, y)) = m(D(x), y) + m(x, D(y)))$.

Příklad 4.2. Nechť V je vektorový prostor, ukážeme, že na $(\mathcal{L}(V), \circ)$ je operace $D_C(\cdot) = [C, \cdot]$ derivací: $D_C(AB) = CAB - ABC = CAB - ACB + ACB - ABC = (CA - AC)B + A(CB - BC) = (D_C(A)) \circ B + A \circ (D_C(B))$.

Příklad 4.3. $(C^\infty(M), \{\cdot,\cdot\})$, $f \in C^\infty(M)$, $D_f(g) = \{f, g\}$

Věta 4.1. Uvažujme M hladkou varietu a $C^\infty(M)$ jako asociativní komutativní algebru s násobením $(f \cdot g)(p) = f(p) \cdot g(p)$. Označme $\mathcal{X}(M)$ vektorový prostor všech derivací algebry $C^\infty(M)$, tj. všech zobrazení $X : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ s vlastnostmi $X(af + g) = aXf + Xg$, $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$. Pak lze vzájemně jednoznačně zobrazit $\mathcal{X}(M)$ na množinu všech vektorových polí $\Gamma(TM)$ předpisem $X(p)(f) = (Xf)(p)$, $X \in \mathcal{X}(M)$, $\forall p \in M$. Tj. $\mathcal{X}(M) \simeq \Gamma(TM)$.

Důkaz. $X \in \Gamma(TM)$, tj. $X : M \to TM$, $X(p) \in T_pM$ hladké zobrazení $\Rightarrow$ definujme $\widetilde{X} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ předpisem $(\widetilde{X}f)(p) = X(p)f$. Z hladkosti X vyplývá, že $\widetilde{X}f$ je v každých lokálních souřadnicích hladké zobrazení, tj. je hladké i na celém M. Z vlastností tečných vektorů pak vyplývá linearita a podmínka na derivaci $\widetilde{X}(fg)(p) = (\widetilde{X}f)(p)g(p) + f(p)(\widetilde{X}g)(p)$.

Naopak, buď $\widetilde{X} \in \mathcal{X}(M)$. Definujme $X(p) : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$, $X(p)f = (\widetilde{X}f)(p)$. Evidentně platí $X(p)(af + g) = aX(p)f + X(p)g$, $X(p)(f \cdot g) = X(p)f \cdot g(p) + f(p) \cdot X(p)g$. Dále ověříme podmínku lokality, tj. $(\forall f, g \in C^\infty(M))((\exists U = U^\circ, p \in U)(\forall q \in U)(f(q) = g(q)) \Rightarrow Xf = Xg)$. Ekvivalentně ji uvažujeme ve tvaru:

$$(\forall f \in C^\infty(M))((\exists U = U^\circ \subset M,\ p \in U)(\forall q \in U)(f(q) = 0) \Rightarrow X(p)f = 0).$$

Uvažujme tedy funkci f, která je nulová na U, okolí bodu p. V lokálních souřadnicích lze do U vnořit otevřenou krychli se středem v bodě p. Dále zkonstruujeme pomocnou funkci $g \in C^\infty(M)$ takovou, že $(\forall q \notin U)(g(q) = 0)$ a $g(p) = 1$, sestavenou vhodným přeškálováním intervalu a kartézským součinem funkcí tvaru $g_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$$g_0(x) = \begin{cases} e \cdot e^{\frac{1}{x^2-1}} & |x| < 1 \\ 0 & |x| \geq 1 \end{cases}$$

Lze snadno ověřit, že $(\forall n \in \mathbb{N}_0)(\lim_{x \to 1^-} g_0^{(n)}(x) = 0)$. Tudíž $(\forall q \in M)((gf)(q) = 0) \Rightarrow \widetilde{X}(fg) = 0$, $0 = X(p)(gf) = X(p)g \cdot f(p) + g(p) \cdot X(p)f$, kde $f(p) = 0$ a $g(p) = 1 \Rightarrow X(p)f = 0$, tj. $X(p)$ vyhovuje i lokalitě. Už tedy víme, že $X(p) \in T_pM$. Zbývá dokázat hladkost vzniklého vektorového pole, tj. $X \in \Gamma(TM)$. Ta vyplývá z toho, že $\widetilde{X} : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, a tudíž složky vektorového pole v souřadnicovém vyjádření, které se dají určit způsobem $X^i(p) = \widetilde{X}(x^i)(p)$, jsou hladké funkce.

(Je vhodné si uvědomit, že díky již dokázané lokalitě $\widetilde{X} \in \mathcal{X}(M)$, tj. nezávislosti $(\widetilde{X}f)(p)$ na chování f mimo okolí bodu p, lze k $\widetilde{X} \in \mathcal{X}(M)$ definovat jeho zúžení $\widetilde{X}\big|_U \in \mathcal{X}(U)$ tak, že $(\forall q \in U)(\forall f \in C^\infty(M))$ $((\widetilde{X}\big|_U f)(q) = (\widetilde{X}f)(q))$. Poté můžeme $\widetilde{X}\big|_U$ aplikovat na souřadnicové funkce $x^i : U \to \mathbb{R}$ a definovat $X = \widetilde{X}(x^i)\frac{\partial}{\partial x^i}$, kde $\widetilde{X}(x^i) \in C^\infty(U)$.) ∎

Důsledek 4.1. Nadále budeme ztotožňovat $\mathcal{X}(M)$ a $\Gamma(TM)$ a využívat definici vektorového pole vhodnější pro právě řešenou úlohu.

Věta 4.2. Množina všech derivací $\mathrm{Der}(A)$ dané algebry A tvoří Lieovu algebru.

Důkaz. To, že $\mathrm{Der}(A)$ je vektorový prostor, je zřejmé. Lieova závorka na $\mathrm{Der}(A)$ se definuje $[D_1, D_2] =$

$D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1$. Ověření:

$$\begin{aligned}
[D_1, D_2]\ m(u,v) &= (D_1 \circ D_2 - D_2 \circ D_1) m(u,v) \\
&= D_1(m(D_2 u, v) + m(u, D_2 v)) - D_2(m(D_1 u, v) + m(u, D_1 v)) \\
&= m(D_1 D_2 u, v) + m(D_2 u, D_1 v) + m(D_1 u, D_2 v) + m(u, D_1 D_2 v) \\
&\quad - m(D_2 D_1 u, v) - m(D_1 u, D_2 v) - m(D_2 u, D_1 v) - m(u, D_2 D_1 v) \\
&= m(D_1 D_2 u, v) + m(u, D_1 D_2 v) - m(D_2 D_1 u, v) - m(u, D_2 D_1 v) \\
&= m([D_1, D_2] u, v) + m(u, [D_1, D_2] v).
\end{aligned}$$

Antisymetrie $[\cdot,\cdot]$ a Jacobiho identita vyplývá ze způsobu definice $[\cdot,\cdot]$. ∎

Důsledek 4.2. $(\mathcal{X}(M), [\cdot,\cdot])$ je nekonečněrozměrná *Lieova algebra vektorových polí* na varietě M s Lieovou závorkou definovanou způsobem $(\forall X, Y \in \mathcal{X}(M))([X,Y] = X \circ Y - Y \circ X)$.

Poznámka 4.3. Často uvažujeme i vektorová pole definovaná na podmnožině $U \subset M$ jako $X : U \to TM$, $\pi \circ X = id|_U$. Pokud $U = U^\circ$, pak lze všechny vlastnosti $\mathcal{X}(M)$ přepsat jako vlastnosti $\mathcal{X}(U)$. Jinak některé pojmy, např. $[\cdot,\cdot]$, mohou ztratit význam.

Poznámka 4.4. Nechť (x^i) jsou souřadnice na $U = U^\circ$, $X = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $f \in C^\infty(U)$. Pak

$$\begin{aligned}
[X,Y]f &= X^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(Y^j \frac{\partial}{\partial x^j} f\right) - Y^i \frac{\partial}{\partial x^i}\left(X^j \frac{\partial}{\partial x^j} f\right) \\
&= X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} f - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} f = \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial x^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial x^i}\right) \frac{\partial}{\partial x^j} f
\end{aligned}$$

a tedy

$$\boxed{[X,Y] = \left(X(Y^j) - Y(X^j)\right) \frac{\partial}{\partial x^j}}$$

Kapitola 5

Diferenciální formy

Definice 5.1. V každém bodě p variety M můžeme uvažovat vektorový prostor duální k tečnému prostoru T_pM. Značíme ho $\boldsymbol{T_p^*M}$ a nazýváme **kotečný prostor** k varietě M v bodě p. Prvky T_p^*M obvykle značíme řeckými písmeny a nazýváme **1-formy v bodě $\boldsymbol{p}$**, tedy

$$\omega \in T_p^*M \Leftrightarrow \omega : T_pM \to \mathbb{R} \text{ a platí } (\forall X, Y \in T_pM)(\forall a \in \mathbb{R})(\omega(aX+Y) = a\,\omega(X) + \omega(Y)).$$

Mějme lokální souřadnice (x^i) na $U = U^\circ \subset M$, $p \in U$. Pak báze T_pM má tvar $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\big|_p\right)_{i=1}^n$. Bázi T_p^*M k ní duální, tj. funkcionály $\varphi^i \in T_p^*M : \varphi^i\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p\right) = \delta^i_j$, značíme $\left(\mathrm{d}x^i\big|_p\right)_{i=1}^n$. Jinak psáno tedy $\mathrm{d}x^i\big|_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\big|_p\right) = \delta^i_j$ (důvod pro toto značení bude zřejmý později). Souřadnice 1-formy ω v bázi $(\mathrm{d}x^i)$ značíme ω_i, tj.

$$\omega = \omega_i\, \mathrm{d}x^i\big|_p .$$

Při změně souřadnic $\tilde{x}^i = \tilde{x}^i(x^j)$, $(\delta^k_i = \mathrm{d}\tilde{x}^k\big|_p\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\right))$, máme

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\bigg|_p = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}\bigg|_p \frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_p \Rightarrow \mathrm{d}\tilde{x}^k\big|_p\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i}\right) = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}\,\mathrm{d}\tilde{x}^k\big|_p\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta^k_i .$$

Poslední rovnost vynásobíme výrazem $\frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^l}$ a vysčítáme přes index i, čímž dostáváme

$$\mathrm{d}\tilde{x}^k\big|_p\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right) = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^l}\bigg|_p ,$$

a pro přechod mezi souřadnicemi tedy platí

$$\boxed{\mathrm{d}\tilde{x}^k\big|_p = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^j}\bigg|_p \mathrm{d}x^j\big|_p}$$

Pro $\omega = \omega_i\,\mathrm{d}x^i = \tilde{\omega}_j\,\mathrm{d}\tilde{x}^j$ dosazením získáváme

$$\tilde{\omega}_j\,\mathrm{d}\tilde{x}^j = \tilde{\omega}_j \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\,\mathrm{d}x^i,$$

a tedy $\omega_i = \tilde{\omega}_j \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}$ neboli

$$\boxed{\tilde{\omega}_j = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\bigg|_p \omega_i}$$

Definice 5.2. Podobně jako jsme zavedli tečný fibrovaný prostor, zavádíme i strukturu známou jako **kotečný fibrovaný prostor** neboli **kotečný bundle** (angl. cotangent bundle) $\boldsymbol{T^*M}$:

1. totální prostor $T^*M = \coprod_{p\in M} T_p^*M$
2. projekce $\pi : T^*M \to M$ splňující $(\forall \omega \in T_p^*M)(\pi(\omega) = p)$
3. typické vlákno $F \simeq \mathbb{R}^n$
4. lokální trivializace – buďte $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I} : \bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha = M,\ U_\alpha = U_\alpha^\circ$ souřadnicová okolí se souřadnicemi (x_α^i), pak definujeme systém lokálních trivializací $(V_\alpha, \psi_\alpha), V_\alpha = \pi^{(-1)}(U_\alpha),\ \psi_\alpha : V_\alpha \to U_\alpha \times F$, kde $(\omega = \omega_i^\alpha \left.\mathrm{d}x_\alpha^i\right|_p)$:
$$\psi_\alpha(\omega) = (p, (\omega_i^\alpha)_{i=1}^n).$$

Topologii na T^*M zavádíme jako topologii indukovanou vzory otevřených množin při $\psi_\alpha,\ \alpha \in I$.

Poznámka 5.1. Buď $p \in U_\alpha \cap U_\beta$. Pak z předchozí definice vyplývá, že přechodové funkce na vlákně tvaru
$$\tau_{\alpha\beta}(p)\left((\omega_i^\alpha)_{i=1}^n\right) = \left(\frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^i}\ \omega_k^\alpha\right)_{i=1}^n,$$
kde $\omega = \omega_i^\alpha \left.\mathrm{d}x_\alpha^i\right|_p = \omega_j^\beta \left.\mathrm{d}x_\beta^j\right|_p$, $\psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1}(p, (\omega_i^\alpha(p))_{i=1}^n) = (p, \left(\omega_k^\alpha \frac{\partial x_\alpha^k}{\partial x_\beta^j}(p)\right)_{j=1}^n)$, jsou *inverzemi* přechodových funkcí na vlákně tečného bundlu a tečný a kotečný bundle jsou tedy geometricky odlišné struktury. Navíc $(\omega_i^\alpha)_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$, a tedy $\tau_{\alpha\beta}(p) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ hladce závisející na p.

Definice 5.3. Diferenciální 1-forma $\boldsymbol{\omega}$ na M je řez kotečného fibrovaného prostoru, $\omega \in \Gamma(T^*M)$.

V lokálních souřadnicích (x^i) na souřadnicovém okolí U bodu p máme vyjádření formy $\omega \in \Gamma(T^*M)$ ve tvaru $\omega(p) = \omega_i(p)\,\mathrm{d}x^i(p)$, kde $\omega_i \in C^\infty(U)$. Většinou značíme $\Gamma(T^*M) = \boldsymbol{\Omega^1(M)}$.

Definice 5.4. Buď $1 < k \le n = \dim M,\ p \in M$. Pak **$k$-forma v bodě p** je k-lineární totálně antisymetrické zobrazení $\omega : \underbrace{T_pM \times \cdots \times T_pM}_{k\text{-krát}} \to \mathbb{R}$. Tedy $\forall X_1, \ldots, X_k \in T_pM,\ \forall \pi \in S_k = \mathrm{Bij}(\{1, \ldots, k\})$ platí:
$$\omega(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(k)}) = \operatorname{sgn}\pi\ \omega(X_1, \ldots, X_k).$$

Vektorový prostor všech k-forem v bodě p značíme $\Lambda^k(T_p^*M)$ nebo $\boldsymbol{\Lambda_p^k M}$, $\dim \Lambda_p^k M = \binom{n}{k}$.

Buď $\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right)_{i=1}^n$ báze T_pM, $\left(\left.\mathrm{d}x^i\right|_p\right)_{i=1}^n$ báze T_p^*M, $i_1, \ldots, i_k \in \hat{n}$. Bazické vektory prostoru $\Lambda_p^k M$ značíme $\left.dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}\right|_p$ (symbol $\wedge$ se nazývá **skobka** (angl. wedge)) a definujeme způsobem $(j_1, \ldots, j_k \in \hat{n})$:
$$\left.\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\right)\right|_p = \sum_{\pi\in S_k} \operatorname{sgn}\pi\ \delta_{j_1}^{i_{\pi(1)}} \ldots \delta_{j_k}^{i_{\pi(k)}}.$$

Příklad 5.1. $\mathbb{R}^3[x^1, x^2, x^3] : \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2\left(\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^1}\right) = -1,\ \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^3\left(\frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^1}\right) = 0$

Poznámka 5.2. Zavádíme tzv. **multiindexy**, kde $j_1, \ldots, j_k \in \hat{n},\ |J| = k$ ($|J|$ označuje délku indexu):

- $J = (j_1, \ldots, j_k)$
- $\overrightarrow{J} = (j_1, \ldots, j_k),\ 1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le n$

- $\delta^I_J = \sum_{\pi\in S_k} \operatorname{sgn}\pi\ \delta^{i_{\pi(1)}}_{j_1} \dots\ \delta^{i_{\pi(k)}}_{j_k}$
- $\mathrm{d}x^{\overrightarrow{J}} = \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_k}$

Poznámka 5.3. $\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\right) = \delta^I_J$

Souřadnicové vyjádření $\omega \in \Lambda^k_p M$ je

$$\omega = \sum_{j_1<\ldots<j_k} \omega_{j_1,\ldots,j_k}\mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_k} = \omega_{\overrightarrow{J}}\,\mathrm{d}x^{\overrightarrow{J}},$$

kde $\omega_{\overrightarrow{J}} = \omega_{j_1,\ldots,j_k} = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\right)$. Tudíž $(\mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k})_{i_1<\ldots<i_k}$ neboli $(\mathrm{d}x^{\overrightarrow{J}})$ tvoří bázi vektorového prostoru $\Lambda^k_p M$ (jehož dimenze je rovna $\binom{n}{k}$).

Podobně jako pro kotečný prostor konstruujeme vektorový fibrovaný prostor označený $\Lambda^k(T^*M)$ nebo $\boldsymbol{\Lambda^k M}$ jako disjunktní sjednocení $\Lambda^k(T^*M) = \coprod_{p\in M} \Lambda^k(T^*_pM)$. Jeho bazickou varietou je M, projekcí $\pi : \Lambda^k M \to M$, kde $(\forall\omega \in \Lambda^k_p M)(\pi(\omega) = p)$, a typickým vláknem $F = \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$.

Lokální trivializace na prostoru $\Lambda^k M$ zavádíme pomocí atlasu $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ na varietě M způsobem $\psi_\alpha : \pi^{(-1)}(U_\alpha) \to U_\alpha \times F$, kde $(p \in U_\alpha,\ \omega \in \Lambda^k_p M,\ \omega = \omega_{\overrightarrow{J}}\,\mathrm{d}x^{\overrightarrow{J}}_\alpha\big|_p$, $(\omega_{j_1,\ldots,j_k})_{j_1<j_2<\ldots<j_k}$ je $\binom{n}{k}$-tice čísel):

$$\psi_\alpha(\omega_{\overrightarrow{J}}\,\mathrm{d}x^{\overrightarrow{J}}|_p) = (p, (\omega_{j_1,\ldots,j_k})_{j_1<j_2<\ldots<j_k}).$$

Definice 5.5. Zobrazení $\omega \in \Gamma(\Lambda^k M)$ nazýváme **diferenciální k-forma** na varietě M. Značíme $\boldsymbol{\Omega^k(M)} = \Gamma(\Lambda^k M)$.

Poznámka 5.4. Též je možné používat vyjádření:

$$\begin{aligned}\Omega^k(M) = \{\omega : \mathcal{X}(M) \times \ldots \times \mathcal{X}(M) \to C^\infty(M) |\ & (\forall X_1, \ldots, X_k \in \mathcal{X}(M))(\forall\pi \in S_k)\\ & (\omega(X_{\pi(1)}, \ldots, X_{\pi(k)}) = \operatorname{sgn}\pi\ \omega(X_1, \ldots, X_k)) \text{ a současně}\\ & (\forall X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_k \in \mathcal{X}(M))(\forall p \in M)(\forall j \in \hat{n} : X_j(p) = Y_j(p))\\ & (\omega(X_1, \ldots, X_k)(p) = \omega(Y_1, \ldots, Y_k)(p))\}.\end{aligned}$$

Poznámka 5.5. $\Lambda^0_p M \equiv \mathbb{R}$

Direktním součtem všech nenulových $\Lambda^k_p M$ (tj. $k \in \hat{n} \cup \{0\}$, kde $n = \dim M$) dostáváme 2^n-rozměrný vektorový prostor $\Lambda^\bullet_p M$, tedy:

$$\Lambda^0_p M \oplus \Lambda^1_p M \oplus \ldots \oplus \Lambda^n_p M = \Lambda^\bullet_p M.$$

K němu příslušný vektorový fibrovaný prostor (tj. vybudovaný podobně jako výše) značíme $\Lambda^\bullet(T^*M)$ nebo $\boldsymbol{\Lambda^\bullet M}$. Prostor jeho řezů značíme $\boldsymbol{\Omega^\bullet(M)} = \Gamma(\Lambda^\bullet M)$.

Definice 5.6. Prvky $\Omega^\bullet(M)$ nazýváme **diferenciální formy** na varietě M.

Poznámka 5.6. Každá diferenciální forma $\omega \in \Omega^\bullet(M)$ se dá jednoznačně rozložit na $\omega(p) = \sum_{k=0}^n \omega^{(k)}$, kde $\omega^{(k)} \in \Omega^k(M)$, tj. lokálně:

$$\omega(p) = \sum_{k=0}^n \omega^{(k)}, \quad \text{kde} \quad \omega^{(k)}(p) = \sum_{|J|=k} \omega_{\overrightarrow{J}}(p)\mathrm{d}x^{\overrightarrow{J}}.$$

Kapitola 6

Operace s diferenciálními formami

Definice 6.1. Na vektorovém prostoru $\Lambda_p^\bullet M$ zavádíme binární operaci zvanou **vnější součin** následujícím způsobem ($\tau \in \Lambda_p^k M,\ \omega \in \Lambda_p^l M,\ X_1, \dots, X_{k+l} \in T_p M$):

$$\tau \wedge \omega\,(X_1, \dots, X_{k+l}) = \sum_{\substack{\vec{I}\,,\,\vec{J} \\ |I|=k, |J|=l}} \delta^{\vec{I}\,\vec{J}}_{(1,\dots,k+l)}\ \tau\,(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})\ \omega\,(X_{j_1}, \dots, X_{j_l})\,.$$

Z této definice je zřejmé, že $\tau \wedge \omega \in \Lambda_p^{k+l} M$ (multilinearita roznásobením pravé strany, antisymetrie využitím $\operatorname{sgn}\pi_1 \circ \pi_2 = \operatorname{sgn}\pi_1 \cdot \operatorname{sgn}\pi_2$)

Příklad 6.1. Nechť $\omega = \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}$ a $\tau = \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_l}$. Pak $\omega \wedge \tau = \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_l}$.

Vlastnosti vnějšího součinu

1. bilinearita, tj. $(\forall \omega, \tau_1, \tau_2 \in \Lambda_p^\bullet M)(\forall a \in \mathbb{R})$
   $((a\tau_1 + \tau_2) \wedge \omega = a\tau_1 \wedge \omega + \tau_2 \wedge \omega$ a současně $\tau \wedge (a\omega_1 + \omega_2) = a\tau \wedge \omega_1 + \tau \wedge \omega_2)$
2. $(\forall \omega \in \Lambda_p^k M)(\forall \tau \in \Lambda_p^l M)$ $\boxed{\tau \wedge \omega = (-1)^{k \cdot l}\ \omega \wedge \tau}$
3. asociativita, tj. $(\forall \sigma, \tau, \omega \in \Lambda_p^\bullet M)((\sigma \wedge \tau) \wedge \omega = \sigma \wedge (\tau \wedge \omega))$

Poznámka 6.1. Důkaz vlastnosti ve druhém bodu. Nechť $\omega \in \Lambda_p^k M$, $\tau \in \Lambda_p^l M$. Pak:

$$\begin{aligned}\tau \wedge \omega\,(X_1, \dots, X_{k+l}) &= \omega \wedge \tau\,(X_{l+1}, \dots, X_{k+l}, X_1, \dots, X_l) \\ &= \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1, & \dots & , k, & k+1, \dots, k+l \\ l+1, \dots, k+l, & 1, & \dots & , l \end{pmatrix} \omega \wedge \tau\,(X_1, \dots, X_{k+l}).\end{aligned}$$ ∎

Poznámka 6.2. Důkaz asociativity. Nechť $\omega \in \Lambda^k_p M$, $\tau \in \Lambda^l_p M$, $\sigma \in \Lambda^m_p M$. Pak $(X_{\overrightarrow{I}} \equiv (X_{i_1}, \ldots, X_{i_k}))$:

$$\begin{aligned}
\omega \wedge (\tau \wedge \sigma)(X_1, \ldots, X_{k+l+m}) &= \sum_{\substack{\overrightarrow{I},\overrightarrow{M} \\ |I|=k,|M|=l+m}} \delta^{\overrightarrow{I}\,\overrightarrow{M}}_{(1,\ldots,k+l+m)}\ \omega\left(X_{\overrightarrow{I}}\right)\ (\tau \wedge \sigma)\left(X_{\overrightarrow{M}}\right) \\
&= \sum_{\substack{\overrightarrow{I},\overrightarrow{M} \\ |I|=k,|M|=l+m}} \sum_{\substack{\overrightarrow{J},\overrightarrow{K} \\ |J|=l,|K|=m}} \delta^{\overrightarrow{I}\,\overrightarrow{M}}_{(1,\ldots,k+l+m)}\ \delta^{\overrightarrow{J}\,\overrightarrow{K}}_{\overrightarrow{M}}\ \omega\left(X_{\overrightarrow{I}}\right)\ \tau\left(X_{\overrightarrow{J}}\right)\ \sigma\left(X_{\overrightarrow{K}}\right) \\
&= \sum_{\substack{\overrightarrow{I},\overrightarrow{J},\overrightarrow{K} \\ |I|=k,|J|=l,|K|=m}} \delta^{\overrightarrow{I}\,\overrightarrow{J}\,\overrightarrow{K}}_{(1,\ldots,k+l+m)}\ \omega\left(X_{\overrightarrow{I}}\right)\ \tau\left(X_{\overrightarrow{J}}\right)\ \sigma\left(X_{\overrightarrow{K}}\right).
\end{aligned}$$

Pro $(\omega \wedge \tau) \wedge \sigma$ bychom dostali tentýž výsledek. (V poslední rovnosti jsme využili skutečnost, že $\delta^{\overrightarrow{I}\,\overrightarrow{M}}_{\overrightarrow{O}}\ \delta^{\overrightarrow{J}\,\overrightarrow{K}}_{\overrightarrow{M}} = \delta^{\overrightarrow{I}\,\overrightarrow{J}\,\overrightarrow{K}}_{\overrightarrow{O}} = \delta^{\overrightarrow{N}\,\overrightarrow{K}}_{\overrightarrow{O}} \delta^{\overrightarrow{I}\,\overrightarrow{J}}_{\overrightarrow{N}}$.) ∎

Pro obecné prvky $\tau, \omega \in \Lambda^\bullet_p M$ vnější součin definujeme distributivně:

$$\tau = \tau^{(0)} + \tau^{(1)} + \ldots + \tau^{(n)},\ \omega = \omega^{(0)} + \omega^{(1)} + \ldots + \omega^{(n)} \Rightarrow \tau \wedge \omega = \sum_{a,b=0}^{n} \tau^{(a)} \wedge \omega^{(b)}.$$

V lokálních souřadnicích (x^i) máme $\tau = \tau_{\overrightarrow{I}}\, \mathrm{d}x^{\overrightarrow{I}}$, $|I| = k$, $\omega = \omega_{\overrightarrow{J}}\, \mathrm{d}x^{\overrightarrow{J}}$, $|J| = l$, a tedy:

$$\begin{gathered}
\tau \wedge \omega = \tau_{\overrightarrow{I}} \cdot \omega_{\overrightarrow{J}}\ \mathrm{d}x^{\overrightarrow{I}} \wedge \mathrm{d}x^{\overrightarrow{J}} = (\tau \wedge \omega)_{\overrightarrow{K}}\, \mathrm{d}x^{\overrightarrow{K}},\ \text{kde} \\
(\tau \wedge \omega)_{\overrightarrow{K}} = (\tau \wedge \omega)(X_{\overrightarrow{K}}) = \delta^{\overrightarrow{I}\,\overrightarrow{J}}_{\overrightarrow{K}}\ \tau_{\overrightarrow{I}}\ \omega_{\overrightarrow{J}}, \quad \mathrm{d}x^{\overrightarrow{I}} \wedge \mathrm{d}x^{\overrightarrow{J}} = \delta^{\overrightarrow{I}\,\overrightarrow{J}}_{\overrightarrow{K}}\, \mathrm{d}x^{\overrightarrow{K}},\ |K| = k + l.
\end{gathered}$$

Takto konstruovanou 2^n-rozměrnou asociativní nekomutativní algebru $\Lambda^\bullet_p M$ s operací vnější součin nazýváme **vnější algebra** v bodě $p \in M$. Vnější součin zavádíme i na $\Omega^\bullet(M)$ způsobem:

$$(\tau \wedge \omega)(p) = \tau(p) \wedge \omega(p),\ \tau, \omega \in \Omega^\bullet(M), \forall p \in M.$$

Tím se $\Omega^\bullet(M)$ stává algebrou. Je však současně též tzv. $C^\infty(M)$-modulem, neboť máme násobení $\omega \in \Omega^\bullet(M)$ libovolnou funkcí $f \in C^\infty(M) : (f\omega)(p) = f(p)\omega(p)$ a platí $f(\omega_1 + \omega_2) = (f\omega_1) + (f\omega_2)$, $(fg)\omega = f(g\omega)$. Struktura $C^\infty(M)$-modulu a algebry na $\Omega^\bullet(M)$ jsou kompatibilní ve smyslu:

$$(f\tau) \wedge \omega = \tau \wedge (f\omega) = f(\tau \wedge \omega),\ f \in C^\infty(M),\ \tau, \omega \in \Omega^\bullet(M).$$

Definice 6.2. Na prostoru forem $\Omega^\bullet(M)$ dále zavádíme **vnější derivaci**, což je lineární zobrazení $\mathrm{d} : \Omega^k(M) \to \Omega^{k+1}(M)$ vyhovující následujícím podmínkám:

1. $(\forall k \in \hat{n} \cup \{0\})(\forall \tau \in \Omega^k(M))(\forall \omega \in \Omega^\bullet(M))(\mathrm{d}(\tau \wedge \omega) = \mathrm{d}\tau \wedge \omega + (-1)^k \tau \wedge \mathrm{d}\omega)$
2. $(\forall f \in C^\infty(M) = \Omega^0(M))(\forall X \in \mathcal{X}(M))(\mathrm{d}f(X) = Xf)$
3. $(\forall \omega \in \Omega^\bullet(M))(\mathrm{d}^2\omega = 0)$

Druhá podmínka v lokálních souřadnicích (x^i) znamená, že $\mathrm{d}f = \frac{\partial f}{\partial x^i}\, \mathrm{d}x^i$, tj. vnější derivace funkce je prostě její derivací (totálním diferenciálem). Současně je zřejmý význam označení bazických 1-forem $\mathrm{d}x^i$. Jsou to skutečně diferenciály souřadnicových funkcí x^i.

Poznámka 6.3. Existenci a jednoznačnost operátoru d ukážeme v souřadnicích. Pak ukážeme, že nezávisí na výběru souřadnic. V souřadnicích (x^i) na okolí $p \in M$ budeme zkoumat $\mathrm{d}\omega(p)$, nejprve pro $f \in C^\infty(M)$:

$$\mathrm{d}f = (\mathrm{d}f)_i \, \mathrm{d}x^i \Rightarrow \ (\forall X^i \in \mathbb{R})(\mathrm{d}f(X) = (\mathrm{d}f)_i \, X^i \text{ a současně } \mathrm{d}f(X) = Xf = X^i \frac{\partial f}{\partial x^i}).$$

Tedy $(\mathrm{d}f)_i\,(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$ a $\mathrm{d}f(p) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)\,\mathrm{d}x^i$. Pro formu $\omega = \omega_{\overrightarrow{J}} \mathrm{d}x^{\overrightarrow{J}}$ definujeme $\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}\omega_{\overrightarrow{J}} \wedge \mathrm{d}x^{\overrightarrow{J}} = \frac{\partial \omega_{\overrightarrow{J}}}{\partial x^i}\, \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^{\overrightarrow{J}}$. Ověříme vlastnosti $\mathrm{d}^2 = 0,\ \mathrm{d}(\omega_1 \wedge \omega_2)$ pro formy ve tvaru $\omega_a = f_a \, \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_k}$ (dále linearitou):

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_k} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\ \mathrm{d}x^i \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_k} \\
\mathrm{d}\omega^2 &= \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}}_{\text{sym. v } i,j} \underbrace{\mathrm{d}x^j \wedge \mathrm{d}x^i}_{\text{antisym. v } i,j} \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_k} = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(\omega_1 \wedge \omega_2) &= \mathrm{d}(f_1 f_2)\, \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_k} \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_l} \\
&= (f_2\, \mathrm{d}f_1 + f_1\, \mathrm{d}f_2) \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_k} \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_l} \\
&= (\mathrm{d}f_1 \wedge \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_k}) \wedge (f_2\, \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_l}) \\
&\quad + (-1)^k (f_1\, \mathrm{d}x^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{j_k}) \wedge (\mathrm{d}f_2 \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_l}) \\
&= \mathrm{d}\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge \mathrm{d}\omega_2.
\end{aligned}$$

Při změně souřadnic máme $\omega = f\, \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} = f\, \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^{j_1}} \ldots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial \tilde{x}^{j_k}}\, \mathrm{d}\tilde{x}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\tilde{x}^{j_k}$ a tedy

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\omega &= \mathrm{d}\left(f\, \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^{j_1}} \ldots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial \tilde{x}^{j_k}} \right) \wedge \mathrm{d}\tilde{x}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\tilde{x}^{j_k} \\
&= \mathrm{d}f \wedge \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^{j_1}} \ldots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial \tilde{x}^{j_k}} \right) \mathrm{d}\tilde{x}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\tilde{x}^{j_k} \\
&\quad + f \left(\left(\underbrace{\frac{\partial^2 x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^{j_1} \partial \tilde{x}^j}}_{\text{sym v } j_1, j} \ldots \right) \underbrace{\mathrm{d}\tilde{x}^j \wedge \mathrm{d}\tilde{x}^{j_1}}_{\text{antisym v } j_1, j} \wedge \ldots + \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^{j_1}} \underbrace{\frac{\partial^2 x^{i_2}}{\partial \tilde{x}^{j_2} \partial \tilde{x}^j}}_{\text{sym. v } j_2, j} \ldots \right) \underbrace{\mathrm{d}\tilde{x}^{j_1} \wedge \ \ldots}_{\text{antisym. v } j_2, j} + \ \ldots \right) \\
&= \mathrm{d}f \wedge \left(\frac{\partial x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^{j_1}} \ldots \frac{\partial x^{i_k}}{\partial \tilde{x}^{j_k}} \right) \mathrm{d}\tilde{x}^{j_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\tilde{x}^{j_k} \\
&= \mathrm{d}f \wedge \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{i_k}
\end{aligned}$$

tj. definice d nezávisí na výběru lokálních souřadnic. ∎

Speciální třídy k-forem

- forma $\omega \in \Omega^\bullet(M)$ je **uzavřená** $\Leftrightarrow \mathrm{d}\omega = 0$
- forma $\omega \in \Omega^\bullet(M)$ je **exaktní** $\Leftrightarrow (\exists \tau \in \Omega^\bullet(M))(\omega = \mathrm{d}\tau)$

Poznámka 6.4. Exaktní forma je uzavřená.

Ukazuje se, že pro libovolnou uzavřenou formu $\omega \in \Omega^\bullet(M),\ \omega \notin \Omega^0(M)$ a bod $p \in M$ existuje okolí $U = U^0$, $p \in U$ a $\tau \in \Omega^\bullet(U)$ takové, že $\omega|_U = \mathrm{d}\tau$.

Definice 6.3. Buď $\omega \in \Lambda^k_p M,\ X \in T_pM$. $(k-1)$-formu definovanou předpisem

$$i_X\omega(X_1, \ldots, X_{k-1}) = \omega(X, X_1, \ldots, X_{k-1}).$$

nazýváme **vnitřní součin** či **zúžení** X a ω a značíme jako $i_X\omega \equiv X \lrcorner \omega$.

Pro $\omega \in \Omega^k(M)$, $X \in \mathcal{X}(M)$ je vnitřní součin definován bodově. Speciálně pro $\omega \in \Omega^1(M)$ se zavádí značení: $i_X\omega = \omega(X) \equiv \langle \omega, X\rangle \equiv \langle X, \omega\rangle$, kde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je párování T_pM a T^*_pM.

Kapitola 7

Zobrazení indukovaná zobrazením variet, podvariety

Tečné a kotečné zobrazení

Uvažujme dvě variety M a N a hladké zobrazení $\phi : M \to N$.

Definice 7.1. Tečné zobrazení $\phi_\star$ v bodě $p \in M$ indukované zobrazením ϕ je takové zobrazení $\phi_\star : T_pM \to T_{\phi(p)}N$, pro něž platí

$$(\forall X \in T_pM)(\forall f \in C^\infty(N))((\phi_\star(X))f = X(f \circ \phi)).$$

V souřadnicích (x^i) na $U = U^\circ$, kde $p \in U$, (y^a) na $V = V^\circ$, kde $\phi(p) \in V$, máme $\phi_\star$ vyjádřené předpisem $\phi_\star(X) = (\phi_\star(X))^a \left.\frac{\partial}{\partial y^a}\right|_{\phi(p)}$ a tedy

$$\boxed{\phi_\star(X) = X^i \left.\frac{\partial \varphi^a}{\partial x^i}\right|_p \left.\frac{\partial}{\partial y^a}\right|_{\phi(p)}}$$

jak vyplývá ze vztahu $(\phi_\star(X))^a = (\phi_\star(X))y^a = X(\varphi^a(x^i))$, kde $\varphi^a = y^a \circ \phi$, $X = X^i \left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p$.

Poznámka 7.1. Zobrazení $\phi_\star$ je lineární.

Definice 7.2. Kotečné zobrazení $\phi^\star$ v bodě $\phi(p) \in N$ indukované zobrazením ϕ je takové zobrazení $\phi^\star : T^*_{\phi(p)}N \to T^*_pM$, pro něž platí

$$(\forall X \in T_pM)(\forall\, \omega \in T^*_{\phi(p)}N)((\phi^\star(\omega))X = \omega(\phi_\star(X))).$$

V souřadnicích (x^i) na $U = U^\circ$, kde $p \in U$, (y^a) na $V = V^\circ$, kde $\phi(p) \in V$, máme pro $\phi^\star$ výrazy $\phi^\star(\omega) = (\phi^\star(\omega))_i \left.\mathrm{d}x^i\right|_p$, $\omega = \omega_a \left.\mathrm{d}y^a\right|_{\phi(p)}$, $\phi_\star\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right) = \left.\frac{\partial \varphi^a}{\partial x^i}\right. \left.\frac{\partial}{\partial y^a}\right|_{\phi(p)}$ (viz výše), z čehož plyne vztah $(\phi^\star(\omega))_i = \omega\left(\phi_\star\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p\right)\right) = \omega_a \left.\frac{\partial \varphi^a}{\partial x^i}\right|_p$ a tedy

$$\boxed{\phi^\star(\omega) = \omega_a \left.\frac{\partial \varphi^a}{\partial x^i}\right|_p \left.\mathrm{d}x^i\right|_p}$$

Kotečné zobrazení $\phi^\star$ můžeme dále přirozeně rozšířit na $\phi^\star : \Lambda^k_{\phi(p)} N \to \Lambda^k_p M$ následujícím způsobem:

$$(\forall X_1, \dots, X_k \in T_p M)(\forall\, \omega \in \Lambda^k_{\phi(p)} N)((\phi^\star(\omega))(X_1, \dots, X_k) = \omega(\phi_\star(X_1), \dots, \phi_\star(X_k))).$$

Máme definována zobrazení $\phi_\star$ v bodě p, $\phi^\star$ v bodě $\phi(p)$. Lze je rozšířit na zobrazení celého $\mathcal{X}(M)$, resp. $\Omega^\bullet(M)$? V případě kotečného zobrazení ano. Pro libovolnou k-formu $\omega \in \Omega^k(N)$ definujeme $\phi^\star(\omega) \in \Omega^k(M)$ předpisem

$$(\forall X_1, \dots, X_k \in \mathcal{X}(M))((\phi^\star(\omega))(p)(X_1, \dots, X_k) = \omega(\phi(p))(\phi_\star(X_1|_p), \dots, \phi_\star(X_k|_p))),$$

(linearita, antisymetrie, závislost pouze na $X_i(p)$ je zřejmá, hladkost je vidět v lokálních souřadnicích).

Poznámka 7.2. Dále budeme obvykle místo $\phi_\star(X)$, resp. $\phi^\star(\omega)$, psát $\phi_\star X$, resp. $\phi^\star\omega$.

Poznámka 7.3. Pro $f \in C^\infty(N)$ definujeme $\phi^\star f = f \circ \phi$, z čehož plyne vztah $(\phi_\star X) f = X(\phi^\star f)$.

Příklad 7.1. Pro $\gamma : \mathbb{R}[t] \to M$ máme $\gamma_\star \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\Big|_{t=0} = [\gamma]$. Obecněji: $\gamma_\star \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\Big|_t = \dot\gamma(t)$.

Definice 7.3. Výše zavedené zobrazení $\phi^\star : \Omega^\bullet(N) \to \Omega^\bullet(M)$ nazýváme **pullback** při zobrazení ϕ.

Naopak $\phi_\star : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(N)$ obecně definovat nelze. Důvody:

- $(\phi_\star X)(\phi(p)) \equiv \phi_\star(X|_p)$ není definován na celém N, ale jen na $\phi(M)$,
- nemusí být korektní: pokud $(\exists p, \tilde p \in M)(\phi(p) = \phi(\tilde p)$ a současně $\phi_\star(X_p) \neq \phi_\star(X_{\tilde p}) \in T_{\phi(p)} N)$.

Pokud je ϕ difeomorfizmus, pak $\phi_\star : \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(N)$ existuje a je definováno předpisem

$$(\phi_\star X)(\phi(p)) = \phi_\star(X|_p).$$

Pokud je ϕ prosté, je $\phi_\star(X)$ definováno jako prvek $\mathcal{X}(\phi(M))$, kde $\phi(M)$ není nutně otevřená množina. Podobně, pokud pro dané ϕ a X nevzniká problém s nejednoznačností, můžeme použít pro výsledek konstrukce bod po bodu označení $\phi_\star(X)$.

Poznámka 7.4. Máme-li difeomorfizmus $\phi : M \to N$, můžeme definovat též $\phi^\star : \mathcal{X}(N) \to \mathcal{X}(M)$ jako

$$(\phi^\star X) f = X(f \circ \phi^{-1}), \text{ kde } f \in C^\infty(M), \text{ tj. } \phi^\star X = (\phi^{-1})_\star X, \text{ neboli } \phi^\star \circ \phi_\star = id|_{\mathcal{X}(M)}.$$

Poznámka 7.5. Změna souřadnic na $U = U^\circ$ je speciálním případem difeomorfizmu $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ na $\tilde U \subset \mathbb{R}^n$ a dříve zavedené změny složek vektoru, resp. formy, při změně souřadnic je možné odvodit z obecných vztahů pro tečné, resp. kotečné, zobrazení.

Při skládání zobrazení $\phi : M \to N$, $\psi : N \to O$ dostáváme pro tečné a kotečné zobrazení identity

$$(\psi \circ \phi)_\star = \psi_\star \circ \phi_\star, \quad (\psi \circ \phi)^\star = \phi^\star \circ \psi^\star.$$

Dosazením do definice vnějšího součinu a z definice $\phi^\star$ dále obdržíme vztah

$$\boxed{\phi^\star(\omega_1 \wedge \omega_2) = \phi^\star\omega_1 \wedge \phi^\star\omega_2}$$

Poznámka 7.6. Platí $(\forall \omega \in \Omega^\bullet(N))(\mathrm{d}\phi^\star\omega = \phi^\star \mathrm{d}\omega)$, tj. (odvození je stejné jako při důkazu nezávislosti $\mathrm{d}\omega$ na výběru souřadnic):

$$\boxed{\mathrm{d}_M \circ \phi^\star = \phi^\star \circ \mathrm{d}_N}$$

Věta 7.1. Buď $\phi : M \to N$, $p \in M$, $X \in T_pM$, $\omega \in \Lambda^k_{\phi(p)}N$. Pak platí

$$\phi^\star(i_{\phi_\star(X)}\omega) = i_X(\phi^\star\omega).$$

Důkaz. Dosazením. ■

Poznámka 7.7. Na $X \in \mathcal{X}(M)$, $\omega \in \Omega^\bullet(N)$ lze tvrzení věty aplikovat, pokud je ϕ difeomorfizmus.

Věta 7.2. Pro difeomorfizmus $\phi : M \to N$ platí $(X, Y \in \mathcal{X}(M))$:

$$\phi_\star[X, Y] = [\phi_\star(X), \phi_\star(Y)].$$

Důkaz. $\forall p \in M$, $\forall f \in C^\infty(N)$, ϕ difeomorfizmus, tj. $\phi(M) = N$ a

$$\begin{aligned}(\phi_\star[X,Y])(\phi(p))f &= X(Y(f\circ\phi))(p) - Y(X(f\circ\phi))(p)\\ &= X(\phi_\star Y(f)\circ\phi)(p) - Y(\phi_\star X(f)\circ\phi)(p)\\ &= (\phi_\star X(\phi_\star Y(f))\circ\phi)(p) - (\phi_\star Y(\phi_\star X(f))\circ\phi)(p)\\ &= ([\phi_\star X, \phi_\star Y]f)(\phi(p))\end{aligned}$$

■

Podvariety

Definice 7.4. Mějme $\phi : M \to N$ hladké zobrazení. ϕ nazýváme **vnoření** (angl. immersion) M do N, pokud $\phi_\star$ je prosté v každém bodě $p \in M$. M pak nazýváme **vnořená podvarieta** variety N.

Definice 7.5. Pokud ϕ je prosté vnoření takové, že $\forall p \in M$ existuje okolí $U = U^\circ \subset N$ bodu $\phi(p)$ a souřadnice $(y^a)_{a=1}^{\dim N}$ na U takové, že $\phi(M) \cap U = \{q \in U | y^a(q) = 0, a \in \hat{k}\}$, kde $k = \dim N - \dim M$, nazýváme zobrazení ϕ **vložení** (angl. embedding) a M nazýváme **(vložená) podvarieta** variety N kodimenze k.

Věta 7.3. Whitneyho věta o vnoření: Každá diferencovatelná varieta dimenze n je difeomorfní nějaké vložené C^ω-podvarietě Euklidovského prostoru $\mathbb{R}^{2n}$. (*Bez důkazu.*)

Kapitola 8

Lieova derivace

Uvažujme tok Ψ_X daného vektorového pole $X \in \mathcal{X}(M)$. Z definice Ψ_X vyplývá, že $(\forall p \in M)(\forall s,t \in \mathbb{R})$ taková, že levá strana následujícího výrazu má smysl, platí (viz poznámky 3.7 a 3.8):

$$\Psi_X(t, \Psi_X(s,p)) = \Psi_X(t+s,p).$$

Poznámka 8.1. Na jistém okolí každého $p \in M$ je pro jisté ε, kde $|t| < \varepsilon$, zobrazení Ψ_X^t difeomorfizmus a tedy na tomto okolí $\exists(\Psi_X^t)^{-1} : (\Psi_X^t)^{-1} = \Psi_X^{-t}$. Pro následující úvahy, kde nás bude zajímat limita $\lim_{t\to 0}$ v nějakém $p \in M$, lze chápat Ψ_X^t jako difeomorfizmus.

Definice 8.1. Buď $X \in \mathcal{X}(M)$, $\omega \in \Omega^\bullet(M)$. Definujeme **Lieovu derivaci** diferenciální formy ω ve směru vektorového pole X předpisem

$$\mathscr{L}_X\omega = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,(\Psi_X^{t\star}\omega - \omega).$$

Poznámka 8.2. Tedy $(\forall p \in M)(\mathscr{L}_X\omega(p) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,((\Psi_X^{t\star}\omega)(p) - \omega(p)))$.

Poznámka 8.3. $\mathscr{L}_X : \Omega^k(M) \to \Omega^k(M)$

Poznámka 8.4. Platí $(\forall f \in C^\infty(M))(\mathscr{L}_X f = Xf)$, neboť $(\forall p \in M)(\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(\Psi_X^t(p)) - f(p)) = Xf(p))$.

Definice 8.2. Buď $X, Y \in \mathcal{X}(M)$. Definujeme **Lieovu derivaci** vektorového pole Y ve směru vektorového pole X předpisem

$$\mathscr{L}_X Y = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,(\Psi_X^{t\star}(Y) - Y).$$

Poznámka 8.5. $\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,(\Psi_{X\star}^{-t}(Y) - Y) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,\Psi_{X\star}^{-t}(Y - \Psi_{X\star}^t(Y)) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,(Y - \Psi_{X\star}^t(Y))$, neboť $\lim_{t\to 0} \Psi_{X\star}^t(Z) = Z$. Takže $\mathscr{L}_X Y = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\,(Y - \Psi_{X\star}^t(Y))$.

Definice 8.3. Kovariantní tenzor T k-tého řádu na varietě M je k-lineární (hladké) zobrazení $T : (\mathcal{X}(M))^k \to C^\infty(M)$ takové, že $T(X_1,\dots,X_k)(p)$ závisí pouze na hodnotách $X_1,\dots,X_k$ v bodě p.

Definice 8.4. Kontravariantní tenzor S k-tého řádu na varietě M je k-lineární zobrazení takové, že $S : (\Omega^1(M))^k \to C^\infty(M)$ a $S(\omega^1,\dots,\omega^k)(p)$ závisí pouze na $\omega^1(p),\dots,\omega^k(p)$.

Poznámka 8.6. Pro $\phi : M \to N$ a kovariatní tenzor T na N definujeme

$$(\phi^\star T)(X_1,\dots,X_k)(p) = T(\phi_\star X_1,\dots,\phi_\star X_k)(p),$$

pro difeomorfizmus $\phi : M \to N$ a kontravariantní tenzor S na M definujeme

$$(\phi_\star S)(\omega^1,\dots,\omega^k) = S(\phi^\star\omega^1,\dots,\phi^\star\omega^k).$$

S pomocí předchozí poznámky definujeme Lieovu derivaci libovolného kovariantního tenzoru na varietě M analogicky k definici Lieovy derivace pro formy. Pro kontravariantní tenzory užijeme definice Lieovy derivace pro vektorová pole.

Vlastnosti Lieovy derivace

1. $\boxed{\mathrm{d} \circ \mathscr{L}_X = \mathscr{L}_X \circ \mathrm{d}}$, tj. $(\forall \omega \in \Omega^\bullet(M))(\mathrm{d}\mathscr{L}_X\omega = \mathscr{L}_X \mathrm{d}\omega)$
2. $\boxed{\mathscr{L}_X \circ i_Y = i_Y \circ \mathscr{L}_X + i_{\mathscr{L}_X(Y)}}$
3. $(\forall \omega, \tau \in \Omega^\bullet(M))(\mathscr{L}_X(\omega \wedge \tau) = \mathscr{L}_X\omega \wedge \tau + \omega \wedge \mathscr{L}_X\tau)$
4. $(\forall Y, Z \in \mathcal{X}(M))(\mathscr{L}_X[Y,Z] = [\mathscr{L}_X Y, Z] + [Y, \mathscr{L}_X Z])$

Poznámka 8.7. Důkaz vlastnosti (2):

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}_X i_Y\omega &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\Psi_X^{t\star} i_Y\omega - i_Y\omega\right) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(i_{\Psi_X^{t\star}Y}(\Psi_X^{t\star}\omega) - i_Y\omega\right)\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(i_{\Psi_X^{t\star}Y}(\Psi_X^{t\star}\omega) - i_{\Psi_X^{t\star}Y}(\omega) + i_{\Psi_X^{t\star}Y}(\omega) - i_Y\omega\right)\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(i_{\Psi_X^{t\star}Y}(\Psi_X^{t\star}\omega - \omega)\right) + i_{\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(\Psi_X^{t\star}(Y)-Y)}\omega = i_Y(\mathscr{L}_X\omega) + i_{\mathscr{L}_X(Y)}\omega \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Z bodu (2) dostáváme důsledek $(f \in C^\infty(M), \mathscr{L}_X \mathrm{d}f = \mathrm{d}(Xf))$: $\mathscr{L}_X(i_Y \mathrm{d}f) = i_Y\mathscr{L}_X\mathrm{d}f + i_{\mathscr{L}_X(Y)}\mathrm{d}f$, tj. $\mathscr{L}_X(Yf) = i_Y(\mathrm{d}(Xf)) + \mathscr{L}_X(Y)f$, z čehož plyne $X(Yf) = Y(Xf) + (\mathscr{L}_X(Y))f$ neboli

$$\boxed{\mathscr{L}_X(Y) = [X,Y]}$$

Z tohoto vztahu a vlastnosti komutátorů pak plyne vlastnost (4). Vlastnost (1) plyne z poznámky 7.6.

Poznámka 8.8. Dále je užitečné si uvědomit, že jakékoliv zobrazení $A : \Omega^\bullet(M) \to \Omega^\bullet(M)$ vyhovující $(\forall \omega, \tau \in \Omega^\bullet(M))(A(\omega \wedge \tau) = (A\omega) \wedge \tau + \omega \wedge (A\tau))$, $\mathrm{d} \circ A = A \circ \mathrm{d}$, $(\forall f \in C^\infty(M))(Af = Xf)$, už nutně musí být totožné s $\mathscr{L}_X$.

Důkaz. $A(\mathrm{d}x^k) = \mathrm{d}(Ax^k) = \mathrm{d}(Xx^k) = \mathscr{L}_X(\mathrm{d}x^k)$. $\blacksquare$

Lemma 8.1. Platí $\boxed{i_X(\omega \wedge \tau) = i_X\omega \wedge \tau + (-1)^k \omega \wedge i_X\tau}$, kde $\omega \in \Lambda_p^k M$, $\tau \in \Lambda_p^l M$, $X \in T_pM$.

Důkaz.

$$\begin{aligned}
i_{X_0}(\omega \wedge \tau)(X_1,,\ldots,X_{k+l-1}) &= \sum_{\substack{\overrightarrow{I}\,\overrightarrow{J}\\ |I|=k,|J|=l}} \delta^{\overrightarrow{I}\,\overrightarrow{J}}_{(0,1,\ldots,k+l-1)}\omega(X_{\overrightarrow{I}})\tau(X_{\overrightarrow{J}}) = \sum_{0\in\overrightarrow{I}}(\ldots) + \sum_{0\in\overrightarrow{J}}(\ldots)\\
&= \sum_{\substack{\overrightarrow{H}\,\overrightarrow{J}\\ |H|=k-1,|J|=l}} \delta^{\overrightarrow{H}\,\overrightarrow{J}}_{(1,\ldots,k+l-1)}\omega(X_0, X_{\overrightarrow{H}})\tau(X_{\overrightarrow{J}}) + \sum_{\substack{\overrightarrow{I}\,\overrightarrow{G}\\ |I|=k,|G|=l-1}} \delta^{\overrightarrow{I}\,\overrightarrow{G}}_{(1,\ldots,k+l-1)}\omega(X_{\overrightarrow{I}})\tau(X_0, X_{\overrightarrow{G}})(-1)^k\\
&= (i_{X_0}\omega \wedge \tau)(X_1,\ldots,X_{k+l-1}) + (-1)^k(\omega \wedge\ i_{X_0}\tau)(X_1,\ldots,X_{k+l-1})
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Věta 8.1. Na $\Omega^\bullet(M)$ platí $\boxed{\mathscr{L}_X = \mathrm{d}\circ i_X + i_X\circ\mathrm{d}}$

Důkaz. Využitím předchozí poznámky a lemmatu. Na funkcích $i_X f = 0,\ i_X\mathrm{d}f = Xf = \mathscr{L}_X f$. Dále

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\circ\ i_X + i_X\circ\mathrm{d}) = \mathrm{d}^2\circ i_X + \mathrm{d}\circ i_X\circ\mathrm{d} = \mathrm{d}\circ i_X\circ\mathrm{d} = (\mathrm{d}\circ i_X + i_X\circ\mathrm{d})\circ\mathrm{d}.$$

Pro ověření všech vlastností ještě zbývá dokázat asociativitu:

$$\begin{aligned}(\mathrm{d}\circ i_X + i_X\circ\mathrm{d})\,\omega\wedge\tau &= \mathrm{d}i_X\omega\wedge\tau + (-1)^k\mathrm{d}\omega\wedge i_X\tau + (-1)^{k-1}i_X\omega\wedge\mathrm{d}\tau + \omega\wedge\mathrm{d}i_X\tau\\ &\quad + i_X\mathrm{d}\omega\wedge\tau + (-1)^k i_X\omega\wedge\mathrm{d}\tau + (-1)^{k+1}\mathrm{d}\omega\wedge i_X\tau + \omega\wedge i_X\mathrm{d}\tau\\ &= ((\mathrm{d}i_X + i_X\mathrm{d})\omega)\wedge\tau + \omega\wedge((\mathrm{d}i_X + i_X\mathrm{d})\tau)\end{aligned}$$

■

Důsledek 8.1. Nechť $\omega\in\Omega^1(M),\ X,Y\in\mathcal{X}(M)$. Pak platí tzv. **Cartanův vzorec**

$$\boxed{\mathrm{d}\omega(X,Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])}$$

Důkaz. $(i_X\omega\in C^\infty(M))$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega(X,Y) &= i_Y i_X\mathrm{d}\omega = i_Y(\mathscr{L}_X\omega - \mathrm{d}i_X\omega) = (i_Y\circ\mathscr{L}_X)\omega - Y(\omega(X))\\ &= (\mathscr{L}_X\circ i_Y)\omega - i_{\mathscr{L}_X(Y)}\omega - Y(\omega(X)) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X,Y])\end{aligned}$$

■

Věta 8.2. Zobecnění předchozího vzorce ($\omega\in\Omega^k(M)$, stříšky zde znamenají, že se daný prvek jako argument vynechá):

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega(X_1,\dots,X_{k+1}) &= \sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j-1}X_j(\omega(X_1,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_{k+1}))\\ &\quad + \sum_{\substack{i,j=1\\ i<j}}^{k+1}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\dots,\hat{X}_i,\dots,\hat{X}_j,\dots,X_{k+1}).\end{aligned}$$

Důkaz. Indukcí s využitím: $i_{X_{k+1}}\dots i_{X_1}\mathrm{d}\omega = -i_{X_{k+1}}\dots i_{X_2}\mathrm{d}f_{X_1}\omega + i_{X_{k+1}}\dots i_{X_3}(i_{X_2}\mathscr{L}_{X_1}\omega) = \dots$, kde $i_{X_2}\mathscr{L}_{X_1}\omega = \mathscr{L}_{X_1}i_{X_2}\omega - i_{[X_1,X_2]}\omega$, atd. ■

Poznámka 8.9. Levá strana předchozího vzorce závisí jen na $X_i|_p$, výrazy na pravé straně závisí i na X_i v okolí $p\in M$. Z odvození ovšem vyplývá, že celá pravá strana závisí jen na $X_i|_p$.

Věta 8.3. $\boxed{[\mathscr{L}_X,\mathscr{L}_Y] = \mathscr{L}_{[X,Y]}}$

Důkaz. Pro funkce a vektorová pole zřejmé, pro formy:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}_X\mathscr{L}_Y - \mathscr{L}_Y\mathscr{L}_X &= \mathrm{d}i_X\mathrm{d}i_Y + \mathrm{d}i_X i_Y\mathrm{d} + i_X\mathrm{d}^2 i_Y + i_X\mathrm{d}i_Y\mathrm{d} - \mathrm{d}i_Y\mathrm{d}i_X - \mathrm{d}i_Y i_X\mathrm{d} - i_Y\mathrm{d}^2 i_X - i_Y\mathrm{d}i_X\mathrm{d}\\ &= \mathrm{d}\circ\mathscr{L}_X\circ i_Y - \mathrm{d}i_Y\circ\mathscr{L}_X + \mathscr{L}_X\circ i_Y\circ\mathrm{d} - i_Y\circ\mathscr{L}_X\circ\mathrm{d}\\ &= \mathrm{d}i_{[X,Y]} + i_{[X,Y]}\mathrm{d} = \mathscr{L}_{[X,Y]}\end{aligned}$$

Lze též jinak: $[i_X\mathrm{d} + \mathrm{d}i_X\mathscr{L}_Y] = \dots = -i_{\mathscr{L}_Y(X)}\mathrm{d} - \mathrm{d}i_{\mathscr{L}_Y(X)}$ ■

Kapitola 9

Geometrická formulace Hamiltonovy mechaniky

Uvažujme varietu N a její kotečný bundle T^*N. Již víme, že je vhodným objektem pro matematický popis fázového prostoru mechanického systému s konfiguračním prostorem N. Na T^*N existuje význačná, tzv. **kanonická 1-forma** definovaná následujícím předpisem: buď $\pi : T^*N \to N$ projekce ve fibrovaném prostoru T^*N. Definujeme $\lambda \in \Gamma(T^*(T^*N))$ předpisem

$$(\forall \omega \in T^*N)(\lambda(\omega) = \pi^\star(\omega)).$$

V lokálních souřadnicích (x^i) na $U = U^\circ \subset N$ zavádíme souřadnice (p_i) na T^*U: $p_i(\omega_k(q)\,\mathrm{d}x^k) = \omega_i(q)$ pro $q \in U$. Společně (x^i, p_i) tvoří souřadnice na T^*U. V nich máme ($\lambda \in \Gamma(T^*(T^*U))$):

$$\lambda = p_i\,\mathrm{d}x^i.$$

Dále můžeme uvažovat **kanonickou (Cartanovu–Poincarého) 2-formu** $\omega = \mathrm{d}\lambda$. V lokálních souřadnicích máme

$$\omega = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}x^i.$$

Evidentně je ω exaktní a tudíž uzavřená. Dále je **nedegenerovaná** ve smyslu

$$(\forall a \in T^*N)(\forall X \in T_a(T^*N),\ X \neq 0)(\exists Y \in T_a(T^*N))(\omega(a)(X,Y) \neq 0).$$

Tyto vlastnosti jsou základem pro zobecnění. (Nedegenerovaná 2-forma umožňuje ztotožnit tečný a kotečný prostor $X \in T_a(T^*N) \to i_X\omega \in T_a^*(T^*N)$.)

Definice 9.1. Diferenciální varieta M vybavená nedegenerovanou uzavřenou diferenciální 2-formou ω se nazývá **symplektická**. Formu ω pak nazýváme **symplektická 2-forma**.

Příklad 9.1. $M = T^*N$ s formou $\omega = \mathrm{d}\lambda$.

Poznámka 9.1. Nechť V je vektorový prostor, ω je nedegenerovaná 2-forma na V. Pak $2 \,|\, \dim V$.

Důkaz. Nechť (e_i) je báze V, (e^i) je báze V^*. Pak $\omega = \omega_{ij}\,e^i \wedge e^j$, $e^i(e_j) = \delta^i_j$, tj. $\omega(X^ie_i, Y^je_j) = X^iY^j\omega(e_i,e_j) = X^iY^j(\omega_{ij} - \omega_{ji})$. Formu ω budeme dále vybírat jako antisymetrickou matici A. Forma ω je nedegenerovaná $\Leftrightarrow$ $(\forall X)(\omega_{ij}X^i \neq 0) \Leftrightarrow \operatorname{rank}\omega_{ij} = \dim V \Leftrightarrow \det(\omega_{ij}) \neq 0$. Platí $A + A^T = 0$, $\det A = \det A^T$ a současně $\det A = (-1)^{\dim V}\det A^T$. Když $\dim V$ je lichá, tak $\det A = -\det A^T$ a současně $\det A = \det A^T$, tj. $\det A = 0$. ∎

Věta 9.1. Darboux: Buď (M,ω) symplektická varieta, $q \in M$. Pak existuje okolí $U = U^\circ \subset M$, $q \in U$, a souřadnice $(p_i, x^i)_{i=1}^{\frac{\dim M}{2}}$ na U takové, že $\omega|_U = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}q^i$. *(Bez důkazu.)*

Nyní se budeme snažit zformulovat hamiltonovskou mechaniku na symplektické varietě. Základní poznatek je, že nedegenerovaná forma $\omega \in \Omega^2(M)$ nám umožňuje ztotožnit T_qM a T_q^*M, resp. $\mathcal{X}(M)$ a $\Omega^1(M)$.

Věta 9.2. Zobrazení $\varphi : T_qM \to T_q^*M$, kde $\varphi(X) = i_X\omega(q)$ a ω je symplektická 2-forma, je izomorfizmus vektorových prostorů.

Důkaz. Linearita $\varphi : X \to i_X\omega$ je zřejmá. Dále pro jádro φ z nedegenerovanosti platí: $X \in \ker\varphi \Leftrightarrow i_X\omega(q) = 0 \Leftrightarrow (\forall Y \in T_qM)(i_X\omega(Y) = \omega(X,Y) = 0) \Leftrightarrow X = 0$. ∎

Věta 9.3. Zobrazení $\varphi : \mathcal{X}(M) \to \Omega^1(M)$, kde $\varphi(X) = i_X\omega$ a ω je symplektická 2-forma, je izomorfizmus vektorových prostorů.

Důkaz. V každém bodě $q \in M$ máme φ_q vzájemně jednoznačné. Hladkost vyplývá z hladké závislosti $i_X\omega$ na X. ∎

Definice 9.2. Vektorové pole X na symplektické varietě (M,ω) je

- **lokálně hamiltonovské** $\Leftrightarrow$ $i_X\omega$ je uzavřená, tj. $\mathrm{d}i_X\omega = 0$.
- **hamiltonovské** $\Leftrightarrow$ $i_X\omega$ je exaktní ve smyslu: $(\exists f \in C^\infty(M))(i_X\omega = -\mathrm{d}f)$. Pak značíme $X \equiv X_f$.

Poznámka 9.2. Důvod pro předchozí definici: Buď $M = T^*N$, $\omega = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}x^i$, $H(p_i,x^i) \in C^\infty(M)$. Pak $X_H = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial H}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial p_i}\right)$. Tudíž integrální křivky vektorového pole X_H jsou řešení Hamiltonových pohybových rovnic $\dot{x}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x^i}$.

Věta 9.4. Vektorové pole $X \in \mathcal{X}(M)$ je lokálně hamiltonovské $\Leftrightarrow \mathscr{L}_X\omega = 0$.

Důkaz. (ω je uzavřená) $\mathscr{L}_X\omega = \mathrm{d}i_X\omega + i_X\mathrm{d}\omega = \mathrm{d}i_X\omega$. ∎

Věta 9.5. Nechť N je diferencovatelná varieta, $\tau \in \Omega^\bullet(N)$, $X, Y \in \mathcal{X}(N)$. Pak $\mathscr{L}_X\tau = 0 \Leftrightarrow (\forall t \in \mathbb{R})(\forall q \in N)(\Psi_X^{t\star}\tau = \tau)$, pokud má $\Psi_X^t(q)$ smysl. Podobně $\mathscr{L}_XY = 0 \Leftrightarrow \Psi_{X\star}^t(Y) = Y$.

Důkaz. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\Psi_X^{t\star}\tau) = \lim_{s\to 0}\frac{1}{s}(\Psi_X^{s+t\star}\tau - \Psi_X^{t\star}\tau) = \lim_{s\to 0}\Psi_X^{t\star}(\frac{1}{s}(\Psi_X^{s\star}\tau - \tau)) = \Psi_X^{t\star}\mathscr{L}_X\tau = 0$ ∎

Věta 9.6. Toky komutujících vektorových polí X, Y komutují. Neboli mějme diferencovatelnou varietu N a $X, Y \in \mathcal{X}(N)$ takové, že $[X,Y] = 0$. Pak $(\forall q \in N)(\forall s,t \in \mathbb{R})$ taková, že výrazy mají smysl, platí

$$\Psi_Y^s \circ \Psi_X^t(q) = \Psi_X^t \circ \Psi_Y^s(q).$$

Důkaz. Nechť $q \in N$, γ_1 integrální křivka X z q, tj. $\gamma_1(t) = \Psi_X^t(q)$, vybereme pevně $s \in \mathbb{R}$, γ_2 integrální křivka X z $\tilde{q} = \Psi_Y^s(q)$, tj. $\gamma_2(t) = \Psi_X^t(\tilde{q}) = \Psi_X^t(\Psi_Y^s(q))$. Definujeme $\gamma_3 = \Psi_Y^s(\gamma_1(t))$. $\dot{\gamma_2}(t) = X(\gamma_2(t))$, $\dot{\gamma_3} = \Psi_{Y\star}^s(\dot{\gamma_1}(t)) = \Psi_{Y\star}^s(X(\gamma_1(t))) = X(\gamma_3(t))$, neboť $\mathscr{L}_XY = [X,Y]$, a tedy $\Psi_{Y\star}^s(X) = X$. Máme tedy $\gamma_2(t)$, $\gamma_3(t)$, které vyhovují stejné diferenciální rovnici se stejnou počáteční podmínkou a z jednoznačnosti řešení plyne $\gamma_2(t) = \gamma_3(t)$. ∎

Definice 9.3. Nechť (M,ω) je symplektická varieta. Pak zobrazení (transformaci) $\phi : M \to M$ nazveme **kanonické zobrazení** $\Leftrightarrow \phi^\star\omega = \omega$.

Definice 9.4. 1-parametrická lokální grupa transformací variety N je takové zobrazení ϕ, kde $\phi : U = U^\circ \subset \mathbb{R} \times N \to N$, $\{0\} \times N \subset U$, $(\forall q \in N)(\phi(0,q) = q)$, pro které platí

$$(\forall s,t \in \mathbb{R})(\forall q \in N)(((t,q) \in U \text{ a současně } (s,\phi(t,q)) \in U) \Rightarrow \phi(s,\phi(t,q)) = \phi(s+t,q)).$$

Věta 9.7. Nechť (M,ω) je symplektická varieta, $X \in \mathcal{X}(M)$. X je lokálně hamiltonovské $\Leftrightarrow$ jeho tok Ψ_X^t definuje 1-parametrickou lokální grupu kanonických transformací variety M.

Důkaz. $\mathscr{L}_X\omega = 0 \Leftrightarrow \Psi_X^{t\star}\omega = \omega$ ■

Definice 9.5. Nechť (M,ω) je symplektická varieta, $f,g \in C^\infty(M)$. **Poissonova závorka** na M je bilineární zobrazení $\{\cdot,\cdot\} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ dané předpisem

$$\{f,g\} = i_{X_f} i_{X_g} \omega.$$

Poznámka 9.3. $\{f,g\} = i_{X_f} i_{X_g}\omega = -i_{X_f}\mathrm{d}g = -X_f(g) = -i_{X_g} i_{X_f}\omega = i_{X_g}\mathrm{d}f = X_g(f)$

Poznámka 9.4. V Darbouxových souřadnicích máme $\omega = \mathrm{d}p_i \wedge \mathrm{d}x^i$, $\{f,g\} = \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial p_i}$.

Věta 9.8. Nechť $f,g \in C^\infty(M)$. Pak $\boxed{X_{\{f,g\}} = -[X_f, X_g]}$

Důkaz. $h = \{f,g\} = i_{X_f} i_{X_g}\omega$, $(\mathscr{L}_{X_g}\omega = 0,\ \mathscr{L}_{X_f}\omega = 0)$, tj. $i_{X_h}\omega = -\mathrm{d}(i_{X_f} i_{X_g}\omega) = -\mathscr{L}_{X_f}(i_{X_g}\omega) + i_{X_f}\mathrm{d}(i_{X_g}\omega) = -\mathscr{L}_{X_f} i_{X_g}\omega + i_{X_f}\mathscr{L}_{X_g}\omega = -i_{[X_f,X_g]}\omega - i_{X_g}\mathscr{L}_{X_f}\omega = -i_{[X_f,X_g]}\omega$ a tedy $X_h = -[X_f,X_g]$. ■

Věta 9.9. Poissonova závorka vyhovuje Jacobiho identitě, tj. $(f,g,h \in C^\infty(M))$:

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h,\{f,g\}\} = 0.$$

Důkaz. $\{f,\{g,h\}\} = i_{X_f} i_{X_{\{g,h\}}}\omega = -i_{X_f}\mathrm{d}\{g,h\} = -\mathscr{L}_{X_f}\{g,h\} = -\mathscr{L}_{X_f} i_{X_g} i_{X_h}\omega = -i_{\mathscr{L}_{X_f}(X_g)} i_{X_h}\omega - i_{X_g} i_{\mathscr{L}_{X_f}(X_h)}\omega$. Navíc $\mathscr{L}_{X_f}(X_{g/h}) = [X_f, X_{g/h}] = -X_{\{f,g/h\}}$, takže $\{f,\{g,h\}\} = i_{X_{\{f,g\}}} i_{X_h}\omega + i_{X_g} i_{X_{\{f,h\}}}\omega = \{\{f,g\},h\} + \{g,\{f,h\}\}$. ■

Věta 9.10. Nechť $f,g \in C^\infty(M)$, $\{f,g\} = 0$. Pak $f \circ \Psi_{X_g}^t = f$, $g \circ \Psi_{X_f}^t = g$.

Důkaz. Zřejmý. ■

Poznámka 9.5. Naopak, máme-li lokální 1-parametrickou grupu kanonických transformací, tak je X (její generátor) lokálně hamiltonovské, a tedy existuje lokálně definované $f \in C^\infty(U) : X = X_f$, tj. integrál pohybu pokud grupa zachovává H.

Kapitola 10

Integrace forem

Jedním z důvodů zavedení diferenciálních forem na varietách je to, že jsou přirozenými objekty, které se dají integrovat. Uvažujme na n-rozměrné varietě M n-formu v lokálních souřadnicích (x^i), resp. $(\tilde{x}^j)$. Máme

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_{12\dots n}\ \mathrm{d}x^1 \wedge \mathrm{d}x^2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n = \omega_{1\dots n}(x(\tilde{x}))\frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^{i_n}}\,\mathrm{d}\tilde{x}^{i_1} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\tilde{x}^{i_n} \\ &= \sum_{\vec{I}} \omega_{1\dots n}\ \delta^{\vec{I}}_{(1\dots n)}\frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^{i_n}}\,\mathrm{d}\tilde{x}^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\tilde{x}^n = \det\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \cdot \omega_{1\dots n}(x(\tilde{x}))\,\mathrm{d}\tilde{x}^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}\tilde{x}^n,\end{aligned}$$

tedy

$$\tilde{\omega}_{1\dots n}(\tilde{x}) = \det\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j} \cdot \omega_{1\dots n}(x(\tilde{x})).$$

Tento vztah připomíná větu o substituci v Lebesgueově integrálu ($x^i = \varphi^i(\tilde{x})$):

$$\int_{\varphi(\Omega)} f\ \mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^n = \int_\Omega f \circ \varphi\ \left|\det\frac{\partial \varphi^i}{\partial \tilde{x}^j}\right| \mathrm{d}\tilde{x}^1 \dots \mathrm{d}\tilde{x}^n.$$

V definici integrálu n-formy ovšem narazíme na dvě nesnáze:

1. rozdíl v absolutní hodnotě jakobiánu – řešíme zavedením orientace
2. možná neexistence globálních souřadnic na M – řešíme pomocí tzv. rozkladu jednotky

Definice 10.1. Orientace vektorového prostoru V, $\dim V = n$, je zobrazení σ přiřazující každé n-tici LN vektorů číslo ± 1 a vyhovující $\forall e_1, \dots, e_n \in V$, $(e_1, \dots, e_n)$ LN, $T \in GL(V)$:

$$\sigma(T(e_1), \dots, T(e_n)) = \frac{\det T}{|\det T|}\ \sigma(e_1, \dots, e_n).$$

Definice 10.2. Mějme vektorový prostor V s orientací σ, $\dim V = n$, $U = U^\circ \subset V$, diferencovatelnou varietu M, $\dim M \geq n$, hladké zobrazení $F : U \to M$ a formu $\omega \in \Omega^n(M)$. Označme $\tilde{U} = F(U)$. Definujeme **integrál z formy ω na množině $\tilde{U}$** při parametrizaci F předpisem

$$\int_{(\tilde{U},F)} \omega = \sigma(e_1, \dots, e_n) \int_U (F^\star\omega)_{1\dots n}\ \mathrm{d}x^1 \dots \mathrm{d}x^n,$$

kde $(x^1, \dots, x^n)$ jsou standardní souřadnice na V, $x^j(a^i e_i) = a^j$, ve zvolené bázi $(e_1, \dots, e_n)$ vektorového prostoru V, $e_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Takto definovaný integrál $\int_{(\tilde{U},F)}\omega$ má následující vlastnost: při výběru jiného V',σ',U' a F' takového, že $F'(U')=\tilde{U}$ a že existuje difeomorfizmus $\phi: U\to U'$ zachovávající orientaci ve smyslu $\sigma'(\phi_\star(\frac{\partial}{\partial x^1}\big|_p),\dots,\phi_\star(\frac{\partial}{\partial x^n}\big|_p))=\sigma(\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n})$ pro všechny báze $\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ prostoru $T_pV\equiv V$, pro který současně platí $F=F'\circ\phi$, plyne z věty o substituci v Lebesgueově integrálu:

$$\int_{(\tilde{U},F)}\omega=\int_{(\tilde{U},F')}\omega.$$

Poznámka 10.1. Pokud je F prosté, tak až na orientaci hodnota integrálu na F nezávisí.

Definice 10.3. Orientace σ variety M, kde $\dim M=n$, je zobrazení přiřazující každému $p\in M$ orientaci tečného prostoru T_pM tak, že $\forall U=U^\circ\subset M,\ \forall X_1,\dots,X_n\in\mathcal{X}(U)$ taková, že $(X_1|_p,\dots,X_n|_p)$ je LN $\forall p\in U$, platí:

$$\sigma(p)(X_1|_p,\dots,X_n|_p)=f(p)\text{ je konstantní (či ekvivalentně hladká) funkce na }U.$$

Varietu, na níž existuje orientace, nazýváme **orientovatelná**.

Poznámka 10.2. Označení: $\sigma(p)(X_1|_p,\dots,X_n|_p)=\sigma(X_1|_p,\dots,X_n|_p)$.

Poznámka 10.3. Pokud na M, $\dim M=n$, existuje $\omega\in\Omega^n(M)$ taková, že $(\forall p\in M)(\omega(p)\neq 0)$, tak je M orientovatelná a $(X_1,\dots,X_n\in T_pM$ jsou LN):

$$\sigma(X_1|_p,\dots,X_n|_p)=\frac{\omega(X_1,\dots,X_n)(p)}{|\omega(X_1,\dots,X_n)(p)|}.$$

Důsledek 10.1. T^*M je vždy orientovatelná, TM orientovatelná být nemusí.

Pokud v M existuje křivka $\gamma:\langle 0,1\rangle\to M$ taková, že $\gamma(0)=\gamma(1)$, $\gamma(\langle 0,1\rangle)\subset U=U^\circ$ a pro pole $X\in\mathcal{X}(U)$ a $\forall t\in\langle 0,1\rangle$ splňuje $\dot\gamma(t)=X(\gamma(t))$, a LN vektory $E_1,\dots,E_n\in T_{\gamma(0)}M=T_{\gamma(1)}M$ takové, že $(\Psi^1_{X\star}(E_1),\dots,\Psi^1_{X\star}(E_n))$ je báze opačně orientovaná než $(E_1,\dots,E_n)$, tj. matice přechodu z jedné báze do druhé má záporný determinant, pak M není orientovatelná.

Příklad 10.1. Möbiův list není orientovatelný.

Definice 10.4. Buď M diferencovatelná varieta s orientací σ, $\dim M=n$, $U=U^\circ$ souřadnicové okolí se souřadnicemi (x^i), $\varphi: x(U)\subset\mathbb{R}^n\to U$ zobrazení inverzní k souřadnicím. Buď dále forma $\omega\in\Omega^n(M)$ a nosič této formy $\operatorname{supp}\omega=\overline{\{p\in M|\omega(p)\neq 0\}}\subset U$. Definujeme **integrál z formy ω na varietě M** předpisem

$$\int_M\omega=\int_{(U,\varphi)}\omega=\sigma\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\dots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right)\int_{x(U)}(\varphi^\star\omega)_{1\dots n}\mathrm{d}x^1\dots\mathrm{d}x^n.$$

Poznámka 10.4. Dle výše uvedeného nezávisí $\int_M\omega$ na výběru souřadnic na U.

Jak integrovat formy, jejichž nosič nelze pokrýt jedinou mapou?

Definice 10.5. Buď M diferencovatelná varieta, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ její otevřené pokrytí. Indexová množina J a soubor funkcí $f_\beta\in C^\infty(M)$, $\beta\in J$, tvoří **rozklad jednotky** podřízený pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ pokud jsou splněny následující podmínky:

1. $(\forall\beta\in J)(\exists\alpha\in I)(\operatorname{supp}f_\beta\subset U_\alpha$ a současně je $\operatorname{supp}f_\beta$ kompaktní)
2. $(\forall p\in M)(\exists K_p\subset J,\#\{K_p\}<+\infty)(\exists U=U^\circ,\ p\in U)(\forall\beta\in J\setminus K_p)(\operatorname{supp}f_\beta\cap U=\varnothing)$
3. $(\forall\beta\in J)(\forall p\in M)(f_\beta(p)\geq 0)$

4. $(\forall p \in M)(\sum_{\beta\in J} f_\beta(p) = \sum_{\beta\in K_p} f_\beta(p) = 1)$

Věta 10.1. Ke každému otevřenému pokrytí $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ variety M existuje jemu podřízený rozklad jednotky. (Přičemž není určen jednoznačně.)

Důkaz. Bez důkazu. K platnosti věty potřebujeme parakompaktnost v definici variety. ■

Definice 10.6. Buď M diferencovatelná varieta s orientací σ, $\dim M = n$ a $\omega \in \Omega^n(M)$. Definujeme **integrál z n-formy ω na varietě M** předpisem

$$\int_M \omega = \sum_{\beta\in J} \int_M f_\beta\, \omega,$$

kde $\{f_\beta\}_{\beta\in J}$ je rozklad jednotky podřízený nějakému atlasu $\{U_\alpha, (x^i_\alpha)\}_{\alpha\in I}$.

Poznámka 10.5. $\int_M \omega$ nezávisí na výběru $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

Důkaz. Společné zjemnění $\{U_\alpha \cap \tilde{U}_\beta\}_{\alpha\in I,\, \beta\in\tilde{I}}$ a jemu podřízený rozklad jednotky. ■

Kapitola 11

Integrace na varietách s hranicí, Stokesova věta

Věta 11.1. Buď ϕ difeomorfizmus variet M a N stejné dimenze n, $\omega \in \Omega^n(N)$, $U = U^\circ \subset M$. Pak platí:

$$\int_{\phi(U)} \omega = \int_U \phi^\star \omega.$$

Důkaz. Pomocí rozkladu jednotky převedeme na součet integrálů v $\mathbb{R}^n$, dále viz substituce v Lebesgueově integrálu. ∎

Definice 11.1. Buď M s orientací σ vnořená podvarieta N, $\phi : M \to N$ vnoření, $\dim M = m$, $\dim N = n \geq m$. Pak pro $\omega \in \Omega^m(N)$ definujeme:

$$\int_{(\phi(M),\phi)} \omega = \int_M \phi^\star \omega.$$

Poznámka 11.1. Hodnota integrálu opět nezávisí na konkrétním způsobu parametrizace N, ale může se lišit pro ϕ a ϕ', která nelze propojit difeomorfizmem $\psi : M \to M$ takovým, že $\phi = \phi' \circ \psi$.

Nyní chceme dospět k jedné ze základních vlastností integrálů z forem, tzv. Stokesově větě:

$$\int_M \mathrm{d}\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Nejprve budeme uvažovat dva speciální případy, jež nám umožní větu odvodit:

Příklad 11.1. Uvažujme $\mathbb{R}^2[x, y]$ a oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vymezenou jako vnitřek konvexního lineárního obalu $\Omega = ([(0,0),(1,0),(0,1)]_\kappa)^\circ$. Hranici Ω popíšeme pomocí tří úseček parametrizovaných způsobem:

$$\begin{aligned} \gamma_1(\tau) &= (\tau, 0) \\ \gamma_2(\tau) &= (1-\tau, \tau) \qquad \tau \in \langle 0, 1\rangle \\ \gamma_3(\tau) &= (0, 1-\tau) \end{aligned}$$

Na $\mathbb{R}^2$ definujeme orientaci $\sigma((1,0),(0,1)) \equiv \sigma(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}) = 1$, úseky hranice oblasti Ω orientujeme tak, aby $\sigma_i(\frac{\partial}{\partial \tau}) = 1 \Leftrightarrow \sigma(\vec{n}, \gamma_{i\star}(\frac{\partial}{\partial \tau})) = 1$, kde $\vec{n}$ je vnější normála k Ω v $q \in \gamma_i$ a τ je souřadnice podél γ_i.

Buď $\omega = \omega_x \mathrm{d}x + \omega_y \mathrm{d}y \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$, $\mathrm{d}\omega = (\partial_x \omega_y - \partial_y \omega_x)\ \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$. Pak platí:

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mathrm{d}\omega &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y\ (\partial_x \omega_y - \partial_y \omega_x) = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{1-y} \mathrm{d}x\ \partial_x \omega_y - \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y\ \partial_y \omega_x \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}y\ (\omega_y(1-y,y) - \omega_y(0,y)) - \int_0^1 \mathrm{d}x\ (\omega_x(x,1-x) - \omega_x(x,0)) \\
&= -\int_0^1 \mathrm{d}y\ \omega_y(0,y) + \int_0^1 \mathrm{d}x\ \omega_x(x,0) + \int_0^1 \mathrm{d}\tau\ \underbrace{(\omega_y(1-\tau,\tau) - \omega_x(1-\tau,\tau))}_{\gamma_2^*\omega,\ \text{kde}\ \gamma_2(\tau)=(1-\tau,\tau)} \\
&= \int_{\gamma_3} \omega + \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\partial\Omega} \omega.
\end{aligned}$$

Příklad 11.2. $\mathbb{R}^n[x^1,\ldots,x^n]$, (e_i) standardní báze $\mathbb{R}^n$, $x^i(a^j e_j) = x^j$, $\Omega = ([e_0,e_1,\ldots,e_n]_\kappa)^\circ$, $e_0 \equiv \vec{0}$, orientace $\sigma(e_1,\ldots,e_n) = 1$, $\partial\Omega = \bigcup_{i=0}^n [e_0,\ldots,\hat{e}_i,\ldots,e_n]_\kappa$, kde stříška značí vynechání prvku.

Na $\partial\Omega_i = [e_0,\ldots,\hat{e}_i,\ldots,e_n]_\kappa$ zavádíme orientaci opět tak, že $\sigma_i(f_1,\ldots,f_{n-1})(z) \equiv \sigma(\vec{n},f_1,\ldots,f_{n-1})(z)$, kde $f_1,\ldots,f_{n-1} \in T_z(\partial\Omega_i)$ a $\vec{n}$ je ven orientovaná normála k nadrovině obsahující $\partial\Omega_i$. Dále nechť $\omega \in \Omega^{n-1}(V)$, tj. $\mathrm{d}\omega \in \Omega^n(V)$, kde $V = V^\circ \subset \mathbb{R}^n$, $\overline{\Omega} \subset V$:

$$\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i (-1)^{i+1}\ \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n, \qquad \mathrm{d}\omega = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x^i}\right) \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n.$$

Pro integrál dostáváme (nutno pamatovat na orientaci):

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \mathrm{d}\omega &= \int_{\substack{0<x^j<1 \\ \sum_{j=1}^n x^j<1}} \mathrm{d}x^1 \ldots \mathrm{d}x^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{\substack{0<x^j<1 \\ \sum_{j=1,\,j\neq i}^n x^j<1}} \mathrm{d}x^1 \ldots \widehat{\mathrm{d}x^i} \ldots \mathrm{d}x^n (\omega_i(x^1,\ldots,\underbrace{1-\sum_{i\neq j} x^j}_{i\text{-tá pozice}},\ldots,x^n) - \omega_i(x^1,\ldots,\underbrace{0}_{i\text{-tá pozice}},\ldots,x^n)) \\
&= \sum_{i=1}^n \int_{\substack{0<x^j<1 \\ \sum_{j=1,\,j\neq i}^n x^j<1}} \mathrm{d}x^1 \ldots \widehat{\mathrm{d}x^i} \ldots \mathrm{d}x^n (\omega_i(x^1,\ldots,\underbrace{1-\sum_{i\neq j} x^j}_{i\text{-tá pozice}},\ldots,x^n)) + \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega_i} \omega \\
&= \int_{\partial\Omega_0} \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} \omega_i\ \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{\mathrm{d}x^i} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n + \sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega_i} \omega = \sum_{i=0}^n \int_{\partial\Omega_i} \omega \equiv \int_{\partial\Omega} \omega.
\end{aligned}$$

Definice 11.2. Mějme $\mathbb{R}^p$ se standardní bází $(e_1,\ldots,e_p)$ a orientací σ, $\sigma(e_1,\ldots,e_p) = 1$. Definujeme **standardní *p*-simplex** Δ_p jako $(e_0 \equiv \vec{0})$:

$$\Delta_p = [e_0,e_1,\ldots,e_p]_\kappa = \{a^i e_i \,|\, a^i \geq 0, \sum_{i=1}^p a^i \leq 1\}.$$

Definice 11.3. (Singulární) *p*-simplex v n-rozměrné varietě M je hladké zobrazení σ_p nějakého $U = U^\circ \subset \mathbb{R}^p$, kde $\Delta_p \subset U$, do M.

Poznámka 11.2. V předchozí definici se za definiční obor zobrazení bere okolí Δ_p a ne samo Δ_p mj. proto, že chceme, aby byla zajištěna existence derivací na hranicích. Dále pokládáme $\sigma_p \equiv \sigma_p(\Delta_p)$.

Poznámka 11.3. Dva singulární p-simplexy σ_p a σ'_p (z $U \subset \mathbb{R}^p$ do M) považujeme za **ekvivalentní**, pokud existuje $V = V^\circ \subset U$, $\Delta_p \subset V$ a difeomorfizmus $\phi : V \to \phi(V)$ takový, že $\phi(\Delta_p) = \Delta_p$ a $\sigma'_p\big|_{\phi(U)} = \sigma_p \circ \phi|_U$.

Definice 11.4. (Singulární) *p*-řetězec v n-rozměrné varietě M je libovolná formální lineární kombinace singulárních p-simplexů na M (modulo ekvivalence).

Definice 11.5. Operátor hranice ∂ přiřazuje p-řetězcům na M $(p-1)$-řetězce následovně:

- Standardnímu p-simplexu přiřadí

$$\partial\Delta_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \Delta_{p-1}^{(k)},$$

  kde $\Delta_{p-1}^{(k)} = [e_0, \ldots, \hat{e}_k, \ldots, e_p]_\kappa$ je třeba chápat jako singulární $(p-1)$-simplex ve varietě $\mathbb{R}^p$, $\Delta_{p-1}^{(k)} : U \subset \mathbb{R}^{p-1} \to \mathbb{R}^p$, kde $\Delta_{p-1} \subset U$.

- Singulárnímu p-simplexu σ_p přiřadí

$$\partial\sigma_p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \sigma_p \circ \Delta_{p-1}^{(k)}.$$

- Lineárním rozšířením definujeme hranici libovolného p-řetězce.

Tj. operátor hranice přiřazuje p-simplexu orientovaný součet jeho stěn, kde orientace je indukována vnější normálou a orientací $\mathbb{R}^p$, tj. $\sigma'(f_1, \ldots, f_{p-1}) = \sigma(n, f_1, \ldots, f_{p-1})$

Poznámka 11.4. Z elementární geometrie dostáváme $\partial^2\Delta_p = \partial \circ \partial(\Delta_p) = 0$ a tudíž $\boxed{\partial^2 = 0}$ obecně.

Definice 11.6. Buď c_p singulární p-řetězec ve varietě M, $c_p = \sum_{i=1}^{k} a_i \sigma_p^{(i)}$. **Integrál *p*-formy $\boldsymbol{\omega}$** přes řetězec c_p je definován předpisem

$$\int_{c_p} \omega = \sum_{i=1}^{k} a_i \int_{(\sigma_p^{(i)}(\Delta_p), \sigma_p^{(i)})} \omega = \sum_{i=1}^{k} a_i \int_{\Delta_p} \sigma_p^{(i)\star} \omega.$$

Věta 11.2. (Stokesova pro *p*-řetězce) Buď c_p p-řetězec na varietě M, $\omega \in \Omega^{p-1}(M)$. Pak platí

$$\int_{c_p} \mathrm{d}\omega = \int_{\partial c_p} \omega.$$

Důkaz. Viz integrály po standardních simplexech a definice integrálu po p-řetězci. ∎

Definice 11.7. Buď N orientovatelná varieta, $\dim N = p$, ϕ její prosté vnoření do variety M. Buď dále $\overline{\phi(N)}$ kompaktní. Pak existuje **triangulace** vnořené podvariety N, tj. její pokrytí p-řetězcem $c_p = \sum_{k=1}^{m} \sigma_p^{(k)}$, který splňuje:

1. $(\forall q \in N)((\exists_1 k \in \hat{m})(q = \sigma_p^{(k)}(q_0), q_0 \in \Delta_p^\circ)$ nebo $(\exists k \in \hat{m})(q = \sigma_p^{(k)}(q_0), q_0 \in \Delta_p \setminus \Delta_p^\circ))$
2. $(\forall k \in \hat{m})(\sigma_p^{(k)} : U^{(k)} = U^{(k)\circ} \to N, \Delta_p \subset U^{(k)})$
3. $(\forall k \in \hat{m})(\sigma_p^{(k)}$ je prosté$)$
4. $(\forall k \in \hat{m})(\sigma_p^{(k)}$ zachovává orientaci variety $N)$

Takový řetězec nazýváme **simpliciální**.

$\partial c_p \equiv \partial N$ lze popsat jako konečné sjednocení vnořených variet překrývajících se na množině míry nula z hlediska $\int_{\partial c_p}$. Vnitřní stěny se při integraci (či rovnou v lineární kombinaci simplexů) navzájem vyruší, neboť jsou v ∂c_p vždy obsaženy dvakrát s navzájem opačnou orientací. Tudíž dostáváme následující větu.

Věta 11.3. (Stokes) Nechť N je orientovaná vnořená podvarieta M, N je kompaktní a jako podmnožina M je uzavřená, $\dim N = p$, $\omega \in \Omega^{p-1}(N)$. Pak platí

$$\int_{\partial N} \omega = \int_N \mathrm{d}\omega.$$

Kapitola 12

Variety s dodatečnou strukturou

VZHLEDEM K NE ZCELA PŘESNÝM ZÁPISKŮM Z PŘEDNÁŠEK NENÍ TATO KAPITOLA ZPRACOVÁNA V CELISTVÉ PODOBĚ A DOST VĚCÍ CHYBÍ NEBO JSOU NEPŘESNÉ!

Poznámka 12.1. Mějme vektorové prostory V a W konečných dimenzí. Pak zobrazení $A : V \to W$ je lineární $\Leftrightarrow$ $A : V \times W^* \to \mathbb{R}$ je bilineární $\Leftrightarrow$ $A : V \otimes W^* \to \mathbb{R}$ je lineární. Prostory lineárních zobrazení a lineárních funkcionálů jsou tedy kanonicky sdružené.

Definice 12.1. Tenzor q-krát kovariantní a r-krát kontravariantní na varietě M je zobrazení, které $p \in M$ přiřadí $T(p) \in (T_p^*M)^{\otimes q} \otimes (T_pM)^{\otimes r}$. Neboli tenzor T je multilineární zobrazení $T : (\mathcal{X}(M))^{\times q} \times (\Omega^1(M))^{\times r} \to C^\infty(M)$.

Definice 12.2. Metrika na varietě M je kovariantní symetrický tenzor 2. řádu na M nedegenerovaný v každém bodě $p \in M$.

Poznámka 12.2. Varietu M s metrikou g značíme (M, g).

Definice 12.3. Metrika g na varietě M se nazývá

- **riemannovská** $\Leftrightarrow \forall p \in M$ je $g(p)$ pozitivně definitní.
- **Lorentzova (pseudoriemannovská)** $\Leftrightarrow \forall p \in M$ má $g(p)$ signaturu $(\dim M - 1, 1)$.

Poznámka 12.3. Někdy se používá definice se signaturou $(1, \dim M - 1)$. Je to podobné, jako kdybychom v Riemannovské metrice měli negativní definitnost.

Poznámka 12.4. Metrika umožňuje měřit délky tečných vektorů. Na varietě může být zavedeno více metrik, je třeba vždy uvést, kterou uvažujeme.

Metrika se při změně souřadnic transformuje způsobem ($p \in M$, $g_{ij}(p) = g_{ji}(p)$):

$$g(p) = g_{ij}(p)\,\mathrm{d}x^i \otimes \mathrm{d}x^j \equiv g_{ij}(p)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j \quad \to \quad g(p) = g'_{ij}(p)\,\mathrm{d}x'^i \otimes \mathrm{d}x'^j, \text{ kde } g'_{ij} = \frac{\partial x^a}{\partial x'^i} g_{ij} \frac{\partial x^b}{\partial x'^j}$$

Definice 12.4. Nechť je M vnořená podvarieta N, $\Phi : M \to N$ a g riemannovská metrika na N. Pak $\Phi^\star g$ definuje Riemannovskou metriku na M. Tato metrika se nazývá **indukovaná metrika**.

Poznámka 12.5. Metrika umožňuje vzájemně jednoznačně zobrazit T_pM a T_p^*M pomocí zobrazení $\flat : T_pM \to T_p^*M$ a $\sharp(p) : T_p^*M \to T_pM$, pro která platí $\flat \circ \sharp = id$ a

$$\flat(p)V(W) = g(V, W), \quad g(\sharp(p)\alpha, V) = \alpha(V), \quad \forall V, W \in T_pM$$

Definice 12.5. (Afinní) konexe (někdy též **kovariantní derivace**, angl. affine connection) na varietě M je zobrazení $\nabla : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ vyhovující vztahům ($\forall f \in C^\infty(M)$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$, $\nabla(X,Y) \equiv \nabla_X(Y)$):

1. $\nabla_{fX+Y}(Z) = f\nabla_X(Z) + \nabla_Y(Z)$
2. $\nabla_X(aY + Z) = a\nabla_X(Y) + \nabla_X(Z)$
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X(Y) + (Xf)Y$

Poznámka 12.6. Kvůli třetí podmínce není konexe tenzor.

Mějme na $U = U^\circ \subset M$ referenční souřadný systém, tj. $e_1, \ldots, e_n \in \mathcal{X}(U)$, $(e_1|_p, \ldots, e_n|_p)$ je LN $\forall p \in U$. Pak definujeme složky konexe ∇ vzhledem k $(e_1, \ldots, e_n)$, které značíme Γ^k_{ij} a které splňují ($X = X^i e_i, Y = Y^i e_i, X^i, Y^i \in C^\infty(U)$):

$$\nabla e_i(e_j)(p) = \Gamma^k_{ij}(p) e_k(p)$$

$$\nabla_X(Y) = X^i \nabla_{e_i}(Y^j e_j) = X^i Y^j \Gamma^k_{ij} e_k + X^i e_i(Y^j)\, e_j = X^i Y^j \Gamma^k_{ij} e_k + X(Y^j) e_j$$

Definice 12.6. Tenzor torze konexe ∇ je zobrazení $T : \mathcal{X}(M) \times \mathcal{X}(M) \to \mathcal{X}(M)$ zadané vztahem ($\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$):

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y].$$

Definice 12.7. Tenzor křivosti konexe ∇ je definován vztahem ($\forall X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$):

$$R(X,Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

Poznámka 12.7. Máme-li varietu s metrikou (M, g), pak na M existuje význačná konexe, která se nazývá **Levi-Civitova**, splňuje vztah $X(g(Y,Z)) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ a pro její torzi platí $T \equiv 0$.

Mějme (M, g) s orientací σ, pak na M existuje význačná forma maximálního stupně s předpisem

$$\omega_g = \mathrm{vol}_g = \sigma\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right) \sqrt{|\det g|}\; \mathrm{d}x^1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^n.$$

Definice 12.8. $(M, g), f \in C^\infty(M)$:

$$\int_M f = \int_M f \omega_g$$

Literatura

[1] Marián Fecko: *Diferenciálna geometria a Lieove grupy pre fyzikov*

[2] Theodor Frankel: *The Geometry of Physics*, Cambridge University Press

[3] Jürgen Jost: *Geometry and Physics*, Springer 2010

Poznámka na konec

Přepsal Jaroslav Kysela (`kyseljar@fjfi.cvut.cz`) na základě poznámek Doc. Ing. Libora Šnobla, Ph.D., (na adrese `http://www.fjfi.cvut.cz/files/k402/Pers_Hpgs/snobl/GMF1.pdf`) a vlastních poznámek z přednášek konaných v zimním semestru akademického roku 2012/2013.