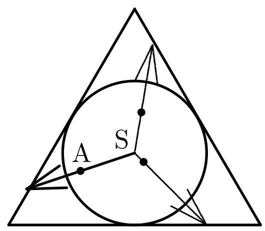


Obrázek 0.1.1: Bijekce kruhu na trojúhelník

0.1 Brouwerova věta o pevném bodě

Následující věta má velmi zajímavý důkaz, který využívá jen jedinou maličkost z teorie grafů, a sice že součet všech stupňů vrcholů grafu je sudý. Přesto je zařazena do této přednášky jako příklad aplikace teorie grafů tam, kde bychom to možná nečekali.

Věta 0.1.1. (Brouwer)
Nechť f je spojité zobrazení uzavřené koule $B \subset \mathbb{R}^d$ do B. Potom f má pevný bod, tj.

$$(\exists x \in B)\,(f(x) = x)\,.$$

Poznámka. Pokud $d = 1$, je důkaz tvrzení snadný. Uzavřená koule reprezentuje uzavřený interval na reálné ose. Vezměme tedy například

$$f : [0,1] \mapsto [0,1].$$

Definujme

$$g(x) = f(x) - x$$

a ptejme se, zda existuje $x \in [0,1]$ takové, že $g(x) = 0$. Zřejmě platí

$$\begin{aligned} g(0) = f(0) - 0 &\geq 0, \\ g(1) = f(1) - 1 &\leq 0. \end{aligned}$$

Protože f je spojitá funkce, je i g spojitá a proto nutně $(\exists x \in [0,1])\,(g(x) = 0)$.

Skutečný důkaz Brouwerovy věty provedeme detailně jen pro $d = 2$. Pro obecné d je myšlenka důkazu stejná, ale technické detaily jsou komplikovanější: Ukážeme totiž platnost věty pro trojúhelník místo pro kouli v $\mathbb{R}^2$ (což je kruh). Pro obecné d bychom větu dokazovali pro d-simplex místo pro kouli v $\mathbb{R}^d$.

Nejprve předvedeme, jak platnost tvrzení pro trojúhelník implikuje jeho platnost pro kruh. Existuje totiž spojitá bijekce φ kruhu B na trojúhelník T, což můžeme vidět na obrázku 0.1.1. Kruhu s poloměrem r opíšeme libovolný trojúhelník. Každý bod A v kruhu B kromě středu spojíme se středem S polopřímkou p, která protíná kružnici B ve vzdálenosti r od S a trojúhelník T ve vzdálenosti t od S. Hodnotu $\varphi(A)$ pak definujeme jako bod na p ve vzdálenosti $\frac{t}{r}\left|\overline{AS}\right|$ od S.

Nechť nyní $f : B \mapsto B$ je spojité zobrazení. Potom zobrazení $h = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ je $h : T \mapsto T$ a je spojité. Podle Brouwerovy věty dokázané pro trojúhelník existuje $x \in T$ takový, že $h(x) = x$, neboli $\varphi\left(f\left(\varphi^{-1}(x)\right)\right) = x$. Potom ale

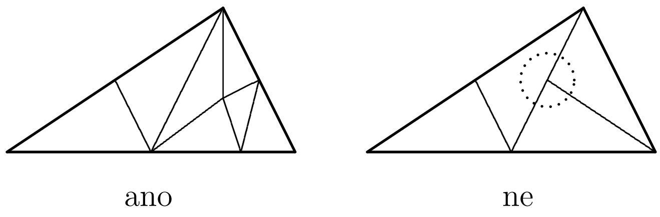
$$f\left(\varphi^{-1}(x)\right) = \varphi^{-1}(x),$$

takže $\varphi^{-1}(x) \in B$ je pevným bodem zobrazení f.

Dále tedy budeme směřovat k důkazu Brouwerovy věty pro trojúhelník.

Definice 0.1.2. Nechť T je trojúhelník. Trojúhelníky $T_1, T_2, ..., T_k$ nazveme **triangulizací** (angl. *simplicial subdivision*) trojúhelníku T, jestliže $\bigcup_{i=1}^{k} T_i = T$ a pro každé $i, j \in \hat{k}, i \neq j$ je $T_i \cap T_j$ buď $\emptyset$, nebo společný vrchol trojúhelníků T_i a T_j, nebo společná strana trojhelníků T_i a T_j.

Příklad. V levém trojúhelníku na obrázku 0.1.2 je vytvořena triangulizace, v pravém však nikoliv, neboť některé trojúhelníky mají průnik tvořící jen část strany jednoho z nich.



Obrázek 0.1.2: „Správná“ a „nesprávná“ triangulizace

Definice 0.1.3. Buď T trojúhelník s vrcholy e_1, e_2, e_3, nechť $T_1, T_2, ..., T_k$ je jeho trianglulizace. Obarvení vrcholů trojúhelníků $T_1, T_2, ..., T_k$ barvami $1, 2, 3$ se nazývá vlastní, jestliže pro každé $i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$ platí

1. e_i má barvu i,
2. vrcholy trojúhelníků ležící na úsečce $\overline{e_i e_j}$ mají barvu i nebo j.

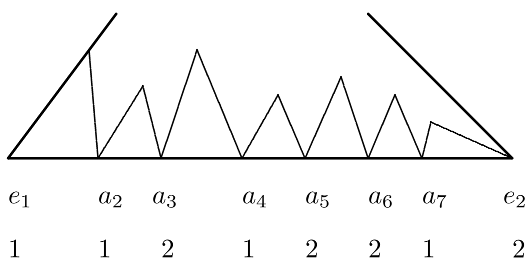
Barvy vrcholů uvnitř trojúhelníku T nejsou důležité.

Lemma 0.1.4. (Sperner, 1928)
Nechť T je trojúhelník, $T_1, T_2, ..., T_k$ jeho triangulizace. Potom při každém vlastním obarvení vrcholů trojúhelníků $T_1, T_2, ..., T_k$ barvami $1, 2, 3$ existuje $i \in \hat{k}$ takové, že T_i má vrcholy obarveny všemi třemi barvami.

Důkaz. Dané triangulizaci přiřadíme graf $G = (V, E)$, jenž bude zkonstruován takto:

- Množina vrcholů V grafu G bude tvořena trojúhelníky $T, T_1, T_2, ..., T_k$.
- Množina hran bude splňovat následující dvě podmínky:
  - $\{T_i, T_j\} \in E$, právě když $T_i \cap T_j$ je jejich společná strana, jejíž konce jsou vrcholy (trojúhelníků) obarvené právě oběma barvami 1 a 2.
  - $\{T, T_i\} \in E$, právě když T_i má stranu s koncovými vrcholy obarvenými oběma barvami 1 a 2 a tato strana leží ve straně trojúhelníka T (jejíž koncové vrcholy jsou tedy také obarveny barvami 1 a 2).

Je jasné, že pro stupně vrcholů T_i grafu G platí $0 \leq d_G(T_i) \leq 2$ pro každé $i \in \hat{k}$. Není totiž možné, aby všechny tři strany trojúhelníka měly konce obarvené oběma barvami 1 a 2. Stupeň T jako vrcholu grafu G je svázán s pokrytím strany $\overline{e_1 e_2}$ trojúhelníky z triangulizace:



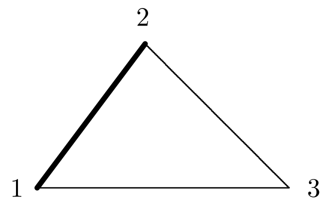
Předpokládejme, že na hraně $\overline{e_1 e_2}$ jsou zleva doprava uspořádány vrcholy

$$e_1 = a_1, a_2, ..., a_{l-1}, a_l = e_2.$$

Jestliže barva a_j se liší od barvy a_{j+1}, tak podle definice grafu G je trojúhelník T_i , který má jako jednu z hran úsečku $\overline{a_j a_{j+1}}$, v hraně s T. Každá změna barvy vrcholu $1 \to 2$ nebo $2 \to 1$ při procházení strany $\overline{e_1 e_2}$ zleva doprava tedy přispívá jedničkou ke stupni T. Protože ale $e_1 = a_1$ má barvu 1 a $e_2 = a_l$ má barvu 2, tak těchto změn je lichý počet. Stupeň T je tedy lichý. Nyní využijeme, že

$$\sum_{v \in V} d_G(v) = \sum_{i=1}^{k} d_G(T_i) + d_G(T) = 2\#E,$$

takže součet $\sum_{i=1}^{k} d_G(T_i) + d_G(T)$ je sudý. Tím pádem $\sum_{i=1}^{k} T_i$ je lichý. Existuje tedy další vrchol grafu G (tj. trojúhelník triangulace T_i) s lichým stupněm, který tak musí být roven 1. Jinými slovy, tento trojúhelník má v G jen jediného souseda, což znamená, že dva jeho vrcholy mají barvy 1 a 2, ale třetí vrchol už musí mít barvu 3:



$\square$

Nyní už můžeme dokázat přímo Brouwerovu větu:

Důkaz. Mějme tedy trojúhelník T s vrcholy e_1, e_2, e_3 v lineárním prostoru $\mathbb{R}^2$. Každý bod $x \in T$ můžeme vyjádřit jako konvexní kombinaci

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3,$$

kde

$$\alpha_i \geq 0,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1. \tag{0.1.1}$$

Označme si obecně pro libovolný $x \in T$ i-tou souřadnici bodu x v uvedené konvexní kombinaci jako $\alpha_i(x)$. Obdobně

$$f(x) = \alpha'_1 e_1 + \alpha'_2 e_2 + \alpha'_3 e_3,$$

kde

$$\alpha'_i \geq 0,$$

$$\alpha'_1 + \alpha'_2 + \alpha'_3 \quad = \quad 1. \tag{0.1.2}$$

Označme si obdobně i-tou souřadnici $f(x)$ v konvexní kombinaci bodů e_1, e_2, e_3 jako $\alpha'_i(x)$. Je-li x pevným bodem zobrazení f, potom $\alpha'_i(x) = \alpha_i(x)$ pro každé $i \in \{1, 2, 3\}$.

Postupujme sporem, tj. předpokládejme, že f nemá pevný bod. Potom lze korektně definovat obarvení každého bodu $x \in T$ jako zobrazení

$$b(x) := \min \{ i \in \{1, 2, 3\} | \, \alpha_i(x) > \alpha'_i(x) \} . \tag{0.1.3}$$

Pro toto obarvení platí:

- $(\forall i \in \{1, 2, 3\}) \, (b(e_i) = i)$. Například $e_1 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$, takže s přihlédnutím k (0.1.1) a (0.1.2) nutně $\alpha_1(e_1) > \alpha'_1(e_1)$.
- Dále $(\forall i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j) \, (x \in \overline{e_i e_j} \Rightarrow b(x) \in \{i, j\})$. Například každé $x \in \overline{e_1 e_2}$ má barvu 1 nebo 2. Pro takové x je totiž $\alpha_3(x) = 0$, takže nemůže být $\alpha_3(x) > \alpha'_3(x)$.

Zvolme nyní posloupnost triangulací trojúhelníku T označenou

$$T_1^{(n)}, T_2^{(n)}, ..., T_{k_n}^{(n)}$$

tak, že pro $n \to \infty$ jde maximum obvodů trojúhelníků z n-té triangulace k nule. Obarvíme-li všechny vrcholy v triangulizaci podle zobrazení b, bude se jednat o vlastní obarvení. Podle Spernerova lemmatu existuje pro každé n trojúhelník $T_{i_n}^{(n)}$, který má vrcholy obarveny všemi třemi barvami. Označme

x_n vrchol $T_{i_n}^{(n)}$ s barvou 1,

y_n vrchol $T_{i_n}^{(n)}$ s barvou 2,

z_n vrchol $T_{i_n}^{(n)}$ s barvou 3.

Protože T je kompaktní množina, existuje konvergentní podposloupnost $(x_{j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ vybraná z $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, kterou budeme nadále označovat opět jako $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. To samé platí pro posloupnosti $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nechť w je limita posloupnosti $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Potom však

$$y_n = \underbrace{y_n - x_n}_{\to 0} + x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} w$$

a stejně tak

$$z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} w.$$

Protože x_n má pro každé n barvu 1, tak podle (0.1.3) platí $\alpha_1(x) > \alpha_1'(x)$. Protože f je spojitá, je i souřadnice $\alpha_1'(x)$ spojitou funkcí $\alpha_1(x)$ (a rovněž ostatních souřadnic), takže v limitě platí

$$\alpha_1(w) \quad \geq \quad \alpha_1'(w).$$

Pro ostatní souřadnice však dostaneme z vlastností y_n a z_n stejný vztah:

$$\begin{aligned} \alpha_2(w) \quad &\geq \quad \alpha_2'(w), \\ \alpha_2(w) \quad &\geq \quad \alpha_2'(w). \end{aligned}$$

Po sečtení všech nerovností dostaneme

$$1 = \alpha_1(w) + \alpha_2(w) + \alpha_3(w) \geq \alpha_1'(w) + \alpha_2'(w) + \alpha_3'(w) = 1$$

a proto musí platit rovnosti $\alpha_i(w) = \alpha_i'(w)$ pro každé $i \in \{1, 2, 3\}$. To ale znamená, že $f(w) = w$, což je spor. $\square$