0.1 Toky v sítích

Definice 0.1.1. Nechť V je konečná množina, $A \subset V \times V$. Uspořádanou dvojici $D = (V, A)$ nazýváme **orientovaným grafem** (angl. *directed graph, „digraph“*). Prvky množiny A se nazývají orientované hrany (angl. *arcs*).

Definice 0.1.2. Nechť $D = (V, A)$ je orientovaný graf, $X \subset V$, $Y \subset V$, $X, Y \neq \emptyset$ a nechť je dáno zobrazení $c : A \mapsto \mathbb{N}$. Potom uspořádaná čtveřice (D, X, Y, c) se nazývá **síť** (angl. *network*).

Vrcholy z X se nazývají **zdroje** (angl. *sources*), vrcholy z Y **spotřebiče** (angl. *sinks*), vrcholy z $I := V \backslash X \backslash Y$ se nazývají **uzlové body** (angl. *intermediate vertices*). Pro $a \in A$ představuje $c(a)$ **kapacitu hrany** a.

Definice 0.1.3. Nechť $N = (D, X, Y, c)$ je síť. Zobrazení $f : A \mapsto \mathbb{R}_0^+$ nazveme **tokem** v síti N, jestliže platí

1. $(\forall a \in A)\,(f(a) \leq c(a))$, tj. tok po hraně je omezen její kapacitou,
2. $(\forall v \in I) \left(\sum\limits_{(u,v) \in A} f((u,v)) = \sum\limits_{(v,u) \in A} f((v,u)) \right)$, tj. v uzlových bodech platí, že „co do vrcholu vtéká, to z něj také vytéká“.

Definice 0.1.4. Nechť f je tok v síti $N = (D, X, Y, c)$. Nechť $S \subset V$ je taková, že $X \subset S$, $S \cap Y = \emptyset$. Označme $\bar{S} = V \backslash S$. Potom dvojici $(S, \bar{S})$ nazýváme **řezem** (angl. *cut*) v síti N. **Kapacitou řezu** $(S, \bar{S})$ rozumíme číslo

$$c\left((S, \bar{S})\right) = \sum_{\substack{(u,v) \in A \\ u \in S, v \in \bar{S}}} c((u,v))$$

Dále označme

$$f^+(S) = \sum_{\substack{(u,v) \in A \\ u \in S, v \in \bar{S}}} f(u,v) - \sum_{\substack{(u,v) \in A \\ u \in \bar{S}, v \in S}} f(u,v).$$

Číslo $\operatorname{val} f := f^+(X)$ nazýváme **hodnotou toku** f (angl. *value of* f) v síti N.

Poznámka. Je snadné ukázat, že pro každý řez $(S, \bar{S})$ v síti N platí $f^+(S) = f^+(X)$. Formálně by to bylo možné provést postupnou konstrukcí množiny S z množiny X přidáváním vrcholů jednoho po druhém. Z definice toku f pak plyne, že přidání jediného vrcholu do S nezmění hodnotu $f^+(S)$.

Definice 0.1.5. Tok f v síti N nazveme **maximální**, jestliže pro každý jiný tok $\tilde{f}$ v N platí $\operatorname{val} f \geq \operatorname{val} \tilde{f}$.

Pozorování 0.1.6. *Pro každý tok f a řez $(S, \bar{S})$ v síti N platí*

$$\operatorname{val} f \leq c\left((S, \bar{S})\right).$$

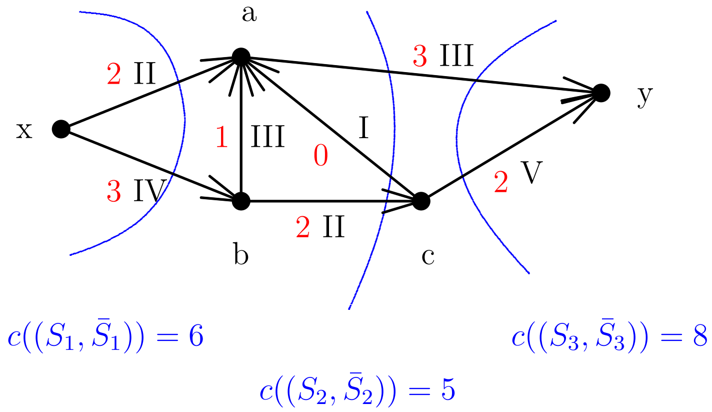
Poznámka 0.1.7. Speciálně platí, že hodnota maximálního toku je $\leq$ než hodnota minimálního řezu, tj. řezu s nejmenší kapacitou. Najdeme-li tok f a řez $(S, \bar{S})$ tak, že

$$\operatorname{val} f = c\left((S, \bar{S})\right),$$

pak tok f je maximální a řez $(S, \bar{S})$ je minimální.

Příklad. Na obrázku 0.1.1 jsou římskými číslicemi vyznačeny kapacity hran a arabskými číslicemi tok f po jednotlivých hranách. Dále jsou tam vyznačeny řezy $(S_1, \bar{S}_1), (S_2, \bar{S}_2), (S_3, \bar{S}_3)$ a jejich kapacity. Protože $\operatorname{val} f = 5 = c\left((S_2, \bar{S}_2)\right)$, je řez $(S_2, \bar{S}_2)$ minimální a tok f je maximální.

Poznámka. Každou síť lze snadno převést na síť s jediným zdrojem a jediným spotřebičem. Přidáme zdroj x_0, spotřebič y_0 a všechny původní zdroje spojíme s vrcholem x_0 hranami o dostatečně velké kapacitě (např. rovné součtu všech kapacit v síti). To samé provedeme pro spotřebiče. Díky tomu můžeme dále bez újmy na obecnosti uvažovat pouze sítě s jediným zdrojem a jediným spotřebičem, které budeme místo $(D, \{x_0\}, \{y_0\}, c)$ značit jen jako (D, x_0, y_0, c).



Obrázek 0.1.1: Tok v síti a minimální řez

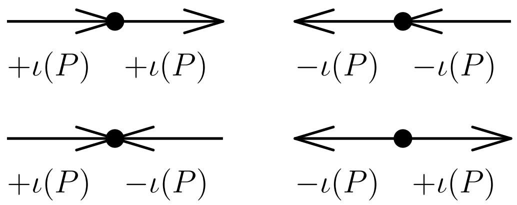
0.1.1 Hledání maximálního toku pomocí f-nenasycených cest

Definice 0.1.8. Nechť f je tok v síti $N = (D, x_0, y_0, c)$ a nechť P je neorientovaná[1] (!!) cesta s počátečním vrcholem x_0. Pro každou hranu $a \in P$ [2] položme

$$\iota(a) = \begin{cases} c(a) - f(a) & \text{je-li } a \text{ (na cestě } P\text{) orientována ve směru z } x_0 \\ f(a) & \text{je-li } a \text{ (na cestě } P\text{) orientována ve směru do } x_0 \end{cases}$$

Jestliže $\iota(P) := \min_{a \in P} \iota(a) > 0$, pak řekneme, že cesta P je f-**nenasycená**.

Příklad. Na obrázku 0.1.2 je tlustou čarou znázorněna f-nenasycená cesta P. Význam číslic je vysvětlen v minulém příkladě. Podle definice zjistíme, že $\iota(P) = 2$. Nyní upravíme tok v síti následovně. Na hranách, které vedou po cestě P ve směru od x, zvýšíme tok o $\iota(P)$ a na hranách vedoucích po P ve směru do x snížíme tok o $\iota(P)$. Potom nové zobrazení $\tilde{f}$, které vznikne z f uvedenými úpravami, je opět $\tilde{f} : A \mapsto \mathbb{R}_0^+$ a též první podmínka na tok v definici 0.1.3 je zřejmě splněna. Co se týká druhé podmínky, lze situace, které nastanou na cestě P, shrnout na následujících schématech:



Je vidět, že ať jsou hrany na vrcholech cesty P orientovány jakkoliv, bude v každém uzlovém bodě stále zachována bilance „vtoku“ a „výtoku“. Proto $\tilde{f}$ je tok, který má hodnotu $\operatorname{val} \tilde{f} = \operatorname{val} f + \iota(P)$.

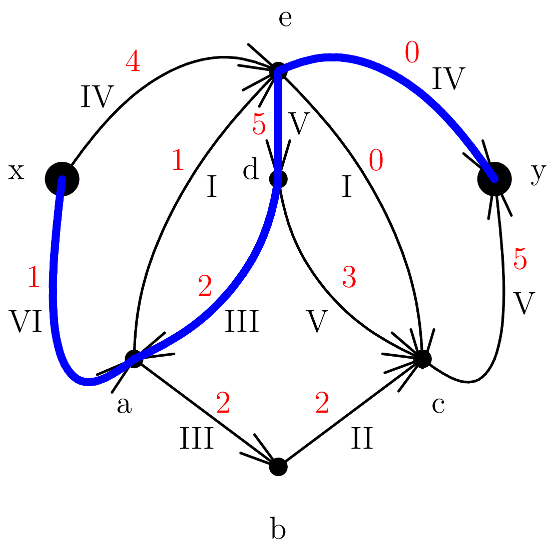
Věta 0.1.9. *Tok f v síti $N = (D, x_0, y_0, c)$ je maximální tehdy a jen tehdy, když neexistuje f-nenasycená cesta končící ve spotřebiči y_0.*

Důkaz. $\boxed{\Rightarrow:}$

Důkaz této implikace bude v podstatě shrnutím úvah provedených v minulém příkladu. Postupujme sporem: nechť existuje f-nenasycená cesta P končící v y_0. Potom definujeme zobrazení $\tilde{f}$ takto:

[1] Cestu P uvažujeme tak, jako kdyby graf D nebyl orientovaný, tj. každé hraně $a = (u, v)$ odpovídá neorientovaná hrana $\{u, v\}$. Formálně můžeme zapsat, že orientovanému grafu $D = (V, A)$ přísluší neorientovaný graf $G_D = (V, \{\{u, v\} | (u, v) \in A\})$.

[2] Pokud uvažujeme P jako podgraf G_D, pak bychom měli psát spíše „$a \in A$ taková, že $a = (u, v)$ a $\{u, v\} \in E(P)$“.



Obrázek 0.1.2: f-nenasycená cesta v síti

- $\forall a \in A, a \notin P$ položíme $\tilde{f}(a) = f(a)$,
- $\forall a \in A, a \in P$, která je po cestě P orientována ve směru z x_0 do y_0, položíme $\tilde{f}(a) = f(a) + \iota(P)$,
- $\forall a \in A, a \in P$, která je po cestě P orientována ve směru z y_0 do x_0, položíme $\tilde{f}(a) = f(a) - \iota(P)$.

Potom je opět $(\forall a \in A)\left(0 \leq \tilde{f}(a) \leq c(a)\right)$ a rovněž $(\forall v \in I)\left(\sum_{(u,v)\in A} \tilde{f}\left((u,v)\right) = \sum_{(v,u)\in A} \tilde{f}\left((v,u)\right)\right)$, takže $\tilde{f}$ je tok a pro jeho hodnotu platí

$$\operatorname{val} \tilde{f} = \operatorname{val} f + \iota(P) > \operatorname{val} f,$$

což je spor s maximalitou toku f.

$\boxed{\Leftarrow:}$
Definujme

$$M = \{v \in V \,|\, \exists f\text{-nenasycená cesta z } x_0 \text{ do } v\}\,.$$

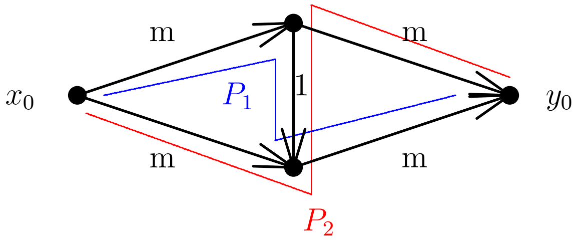
Potom $x_0 \in M$ a z předpokladu platí $y_0 \notin M$. $(M, \bar{M})$ je tedy řez v síti N. Potom na každé hraně $a = (u,v) \in A, u \in M, v \in \bar{M}$ musí z definice M platit $\iota(a) = 0$, neboli $f(a) = c(a)$, jinak by totiž $v \in M$. Stejně tak i na každé hraně $a = (u,v) \in A, u \in \bar{M}, v \in M$ musí být $\iota(a) = 0$, což v tomto případě odpovídá (z definice $\iota(a)$) rovnosti $f(a) = 0$. Proto platí

$$c\left((M, \bar{M})\right) = \sum_{\substack{(u,v)\in A \\ u\in M, v\in \bar{M}}} c\left((u,v)\right) = f^+(M) = f^+(x_0) = \operatorname{val} f.$$

Našli jsme tedy řez, pro nějž je $c\left((M, \bar{M})\right) = \operatorname{val} f$, a tedy podle poznámky 0.1.7 je f maximální tok. $\square$

Poznámka. Celočíselnost kapacit hran (tj. funkce c) zaručuje, že algoritmus hledání maximálního toku fungující na principu hledání nenasycených cest je finitní. Pokud totiž začíná s tokem $f(a) = 0$ pro každé $a \in A$, tak v každém kroku zvedne hodnotu toku o $\iota(P) \geq 1$, přičemž kapacita minimálního řezu, které nakonec hodnota toku f dosáhne, je rovněž konečné přirozené číslo. Navíc $\operatorname{val} f \in \mathbb{N}_0$ v každém kroku.

Příklad. Na obrázku 0.1.3 je vidět, že algoritmus nemusí být příliš efektivní. Pokud bude střídavě volit f-nenasycené cesty P_1 a P_2, zvýší v každém kroku hodnotu toku pouze o 1. (čísla m a 1 u jednotlivých hran udávají jejich kapacity)



Obrázek 0.1.3: Algoritmus hledání maximálního toku pomocí f-nenasycených cest

Poznámka. Algoritmus hledání maximálního toku pomocí f-nenasycených cest lze použít k nalezení perfektního párování v bipartitiním grafu $G = (V_1 \cup V_2, E)$. Tomuto grafu přiřadíme síť $N = (D, x_0, y_0, c)$ definovanou takto:

- $D = (\{x_0, y_0\} \cup V, A)$, kde
- $A = \{\,(x_0, v)|\, v \in V_1\} \cup \{\,(u, v)|\, u \in V_1 \wedge v \in V_2 \wedge \{u, v\} \in E\} \cup \{\,(v, y_0)|\, v \in V_2\}$ a
- $(\forall a \in A)\,(c(a) = 1)$.

To znamená, že přidáme vrcholy x_0 a y_0, z x_0 vedeme hrany do všech vrcholů ve V_1, mezi V_1 a V_2 orientujeme existující hrany ve směru do V_2 a ze všech vrcholů z V_2 vedeme hrany do y_0. Všechny hrany mají jednotkovou kapacitu. Najděme nyní maximální tok pomocí našeho algoritmu. Potom $(\forall a \in A)\,(f(a) \in \{0, 1\})$, tj. neexistují hrany s neceločíselným tokem[3]. Označme

$$M = \left\{ \{u, v\} \in E|\, f(\underbrace{(u, v)}_{\in A}) = 1 \right\}.$$

Potom M je maximální párování: Především se zřejmě jedná o párování, jinak by byla porušena druhá podmínka v definici toku 0.1.3. Například z žádného $v \in V_1$ nemohou vycházet dvě hrany, pro něž je $f = 1$, protože do v může přitékat maximálně jednotkový tok (z x_0). Dále platí, že val $f = \#M$, z čehož už plyne, že párování M je maximální. V opačném případě by totiž existovalo párování M', $\#M' > \#M$ a k němu by bylo možné najít tok f', pro který $\#M' = \operatorname{val} f' > \operatorname{val} f = \#M$, a tok f by nebyl maximální.

[3]Obecně lze najít maximální tok i s neceločíselnými hodnotami funkce f. Proto je důležité, že používáme algoritmus hledání f-nenasycených cest!