0.1 Hamiltonovské kružnice a grafy

Definice 0.1.1. Řekneme, že kružnice v grafu $G = (V, E)$ je **hamiltonovská** (angl. *Hamilton cycle*), jestliže má délku $n = \#V$. Řekneme, že cesta v G je hamiltonovská (angl. *Hamilton path*), jestliže má délku $n-1$. Graf G se nazývá hamiltonovský (angl. *hamiltonian*), jestliže obsahuje hamiltonovskou kružnici.

Poznámka. Půjdeme-li po hamiltonovské cestě, projdeme každým vrcholem grafu právě jednou. Půjdeme-li po hamiltonovské kružnici, vrátíme se navíc do vrcholu, z nějž jsme vyšli. Každý hamiltonovský graf obsahuje hamiltonovskou cestu.

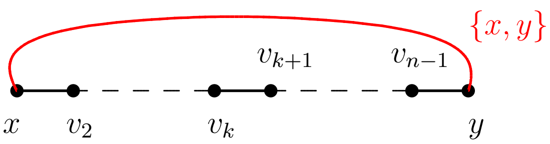
Poznámka. Problém existence hamiltonovské kružnice v obecném grafu je NP-úplný. To zhruba znamená, že jej není možné řešit algoritmem s lepší než exponenciální složitostí[1].

Věta 0.1.2. (Chvátal, 1972)
Nechť $G = (V, E)$ je graf a x, y dva jeho vrcholy takové, že $d_G(x) + d_G(y) \geq n$ a přitom $\{x, y\} \notin E$. Potom G je hamiltonovský právě tehdy, když $G' = (V, E \cup \{x, y\})$ je hamiltonovský.

Důkaz. $\boxed{\Leftarrow:}$ Zřejmé.
$\boxed{\Rightarrow:}$
Důkaz provedeme sporem. Nechť G' je hamiltonovský a G není. Označme si hamiltonovskou kružnici jako

$$x = v_1, v_2, ..., v_{n-1}, v_n = y,$$

tj. jako na obrázku:

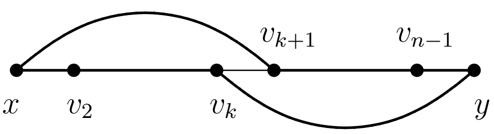


Označme $E' = E \cup \{x, y\}$ a dále definujme množiny

$$T = \{i | \{x, v_{i+1}\} \in E'\},$$

$$S = \{j | \{y, v_j\} \in E'\}.$$

Potom paltí, že $S \cap T = \emptyset$. Kdyby totiž existovalo $k \in S \cap T$, nastala by tato situace:



[1] Uvedeme bez detailů jednu z mnoha definic NP-úplnosti (viz. [?]): Problém je otázka, na niž očekáváme odpověď ANO/NE. Problém je třídy NP, existuje-li nedeterministický algoritmus s nejvýše polynomiální složitostí, který jej rozhoduje. Problém P_0 je NP-těžký, lze-li na něj polynomiálně transformovat libovolný problém P třídy NP, tj. jednoznačná transformace zadání P na zadání P_0 má nejvýše polynomiální složitost. Problém je NP-úplný, jestliže je NP-těžký a je třídy NP.

Jsou známy desítky NP-úplných problémů. Přitom, vzhledem k definici NP-úplnosti, najde-li se deterministický algoritmus rozhodující jeden z těchto problémů s polynomiální složitostí, bude možné rozhodnout každý NP-úplný problém s polynomiální složitostí. Dosud se však takový algoritmus nenašel a proto se věří, že NP-úplné problémy nelze řešit v polynomiálním čase. Není to však dokázáno.

Konečně, každý nedeterministický algoritmus s polynomiální složitostí lze snadno převést na deterministický algoritmus s exponenciální složitostí, což odůvodňuje formulaci naší poznámky.

Jinými slovy, existovala by hamiltonovská kružnice i v původním grafu G, bez přidání hrany $\{x, y\}$. Díky tomu platí

$$\#(S \cup T) = \#S + \#T$$

a navíc zřejmě

$$\begin{aligned} \#S &= d_G(y), \\ \#T &= d_G(x). \end{aligned}$$

Snadno si ověříme, že $0 \notin T$ a hlavně $n \notin S \cup T$. Proto

$$n > \#(S \cup T) = \#S + \#T = d_G(y) + d_G(x),$$

což je ovšem spor s předpokladem věty. □

Chvátalova věta nás opravňuje k následující definici :

Definice 0.1.3. Uzávěrem grafu $G = (V, E)$ rozumíme minimální nadgraf $C(G) = (V, \tilde{E})$ grafu G takový, že pro každé $x, y \in V, x \neq y$ platí

$$\{x, y\} \notin E \Rightarrow d_{C(G)}(x) + d_{C(G)}(y) < n \, (= \#V) \, .$$

Poznámka 0.1.4. Uzávěr grafu je definován jednoznačně.

Důkaz. Korektnost (tedy jednoznačnost) definice dokážeme tak, že popíšeme algoritmus konstrukce $C(G)$:

1. Označíme $G^{(0)} := G$. Dále nechť $i := 0$.

2. Používejme označení $G^{(i)} = (V, E^{(i)})$. Přiřadíme $E^{(i+1)} := E^{(i)}$.

3. Procházíme všechny dvojice vrcholů x, y grafu $G^{(i)} = \left(V, E^{(i)}\right)$, které nejsou v hraně, a pokud platí $d_{G^{(i)}}(x) + d_{G^{(i)}}(y) \geq n$, přidáme hranu $\{x, y\}$ do $E^{(i+1)}$. Poté, co projdeme všechny takové dvojice, vznikne nový graf $G^{(i+1)}$, v němž díky přidaým hranám mohly vzniknout další dvojice, kde $d_{G^{(i+1)}}(x) + d_{G^{(i+1)}}(y) \geq n$.

4. $i := i + 1$. Jdeme na krok 2, dokud nenastane $G^{(i+1)} = G^{(i)}$, tj. nebylo již nutné nic přidávat. V krajním případě to nastane teprve tehdy, když $G^{(i)}$ je už úplný graf.

5. $C(G) := G^{(i)}$.

□

Důsledek 0.1.5. *Graf G je hamiltonovský, právě když $C(G)$ je hamiltonovský.*

Důkaz. Postupné přidávání takových hran do G, pro které součet stupňů jejich koncových vrcholů je alespoň n, podle Chvátalovy věty nemění „hamiltonovskost“ grafu G. □

Triviálním důsledkem předchozího tvrzení je i věta, kterou však nezávisle na Chvátalovi formuloval Dirac (mladší) již v roce 1952:

Věta 0.1.6. (Dirac, 1952)
Nechť $G = (V, E)$ je graf, $n = \#V$. Jestliže $\delta \geq \frac{n}{2}$, potom G je hamiltonovský.

Důkaz. Podmínka $\delta \geq \frac{n}{2}$ zřejmě vynucuje, aby $C(G)$ byl úplný graf, který je samozřejmě hamiltonovský. Proto i G je hamiltonovský. □

Lze tedy shrnout, že postačující podmínkou pro to, aby graf byl hamiltonovský, je „dostatek“ hran.

Věta 0.1.7. *Nechť $G = (V, E)$ je graf se skóre $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$. Jestliže skóre G má vlastnost*

$$\left(\forall k < \frac{n}{2}\right)(d_k \le k \Rightarrow d_{n-k} \ge n-k)\,,$$

pak G je hamiltonovský.

Důkaz. Stejně jako v důkazu Diracovy věty se ukáže, že uvedená podmínka již implikuje $C(G) = K_n$. □

Věta 0.1.8. *Nechť $G = (V, E)$, $x \notin V$. Označme $G' = (V \cup \{x\}, E \cup \{\{x, v\} | \, v \in V\})$. Potom G obsahuje hamiltonovskou cestu, právě když G' je hamiltonovský.*

Důkaz. je téměř zřejmý. □

Věta 0.1.9. *Každý samokomplementární graf obsahuje hamiltonovskou cestu.*

Důkaz. Nechť $G = (V, E)$ je samokomplementární graf, s vrcholy uspořádanými tak, že jejich stupně (skóre grafu G) splňují $d_1 \le d_2 \le \ldots \le d_n$. Potom jeho doplněk má skóre

$$\underbrace{n-1-d_1}_{d_n} \ge \underbrace{n-1-d_2}_{d_{n-1}} \ge \ldots \ge \underbrace{n-1-d_n}_{d_1}.$$

G je ovšem samokomplementární, tj. $G \sim \bar{G}$, neboli oba grafy jsou až na označení vrcholů stejné. Vzhledem k vzestupnému uspořádání vcholů grafu G podle velikosti jejich stupňů pak musí platit vztah naznačený svorkami:

$$\boxed{(\forall i \in \hat{n})\,(d_i = n-1-d_{n+1-i})}$$

Nyní z G utvoříme graf $G' = (V \cup \{x\}, E \cup \{\{x, v\} | \, v \in V\})$ kde $x \notin V$ a o něm ukážeme, že je hamiltonovský. Uděláme to tak, že ověříme podmínku věty 0.1.7. Potom z věty 0.1.8 již plyne dokazované tvrzení.

Označme si d'_i stupně vrcholů grafu G'. Potom zřejmě pro všechna $i \in \hat{n}$ platí $d'_i = d_i + 1$ a $d'_{n+1} = n$. Zvolme nyní $k < \frac{n+1}{2}$ a ověřme zmíněnou podmínku. Postupně platí

$$d'_k \le k \;\Leftrightarrow\; d_k + 1 \le k \;\Leftrightarrow\; (n-1-d_{n+1-k}) + 1 \le k \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; n-k \le d_{n+1-k} \;\Leftrightarrow\; (n+1)-k < (d_{n+1-k}+1) \;\Leftrightarrow\; (n+1)-k \le d'_{(n+1)-k}.$$

□