0.1 Hledání minimální kostry grafu

Nechť je dán souvislý graf $G = (V, E)$ a zobrazení $c : E \mapsto (0, +\infty)$, které přiřazuje hranám jejich *cenu*. Úkolem je najít takovou podmnožinu $\tilde{E} \subset E$, že graf $\tilde{G} = (V, \tilde{E})$ je souvislý a přitom cena

$$c(\tilde{E}) := \sum_{e \in \tilde{E}} c(e)$$

je minimální. Této úloze říkáme úloha na nalezení minimální kostry grafu.

Pozorování. *$\tilde{G}$ bude strom.*

Důkaz. Pokud $\tilde{G}$ není strom, pak v $\tilde{G}$ je kružnice. Je tedy možné ubrat hranu, aniž se poruší souvislost grafu, a cena $c(\tilde{E})$ se přitom sníží. □

Pro hledání minimální kostry v grafu je možno použít následující algoritmus, který je příkladem tzv. hladového (greedy) algoritmu.

Algoritmus 0.1.1. (Kruskalův algoritmus konstrukce minimální kostry)

1. *Uspořádej hrany z E podle jejich ceny od nejlevnější k nejdražší. Buď T množina hran, inicializovaná na $T := \emptyset$.*
2. *Obsahuje-li T hrany $f_1, ..., f_i$, vyber nejlevnější hranu f_{i+1} takovou, že graf $G_{i+1} = (V, T \cup \{f_{i+1}\})$ neobsahuje kružnici, a zařaď ji do T. Tento krok opakuj, dokud to jde.*

Je zřejmé, že v okamžiku ukončení bude $\tilde{G} = (V, T)$ souvislý a bude to tedy strom. Druhý krok algoritmu se bude opakovat právě $(n - 1)$-krát.

Věta 0.1.2. *Kruskalův algoritmus konstruuje strom s minimální cenou.*

Důkaz. Označme T_{Kr} množinu $n - 1$ hran dodaných Kruskalovým algoritmem. Definujme množinu

$$\mathcal{T} = \{\, T \subset E |\, \text{graf } (V, T) \text{ je souvislý a } c(T) \text{ je minimální } \},$$

tj. jako množinu všech vhodných výběrů $n - 1$ hran, na nichž se nabývá minima ceny. Důkaz provedeme sporem: předpokládejme tedy, že $T_{Kr} \notin \mathcal{T}$. Potom lze korektně definovat zobrazení $g : \mathcal{T} \mapsto \{1, 2, ..., n-1\}$ vztahem

$$g(T) = \min \{\, i |\, f_i \notin T_{Kr} \}\,.$$

Nechť $\tilde{T} \in \mathcal{T}$ je taková množina hran, že $k := g(\tilde{T}) = \max_{T \in \mathcal{T}} g(T)$. Přidáme-li hranu f_k do $\tilde{T}$, vznikne množina n hran, a tedy graf $(V, \tilde{T})$ obsahuje kružnici. V ní musí ležet nějaká hrana $e \notin T_{Kr}$, protože jinak by graf (V, T_{Kr}) nemohl být strom. Sestrojme novou množinu vrcholů

$$\tilde{\tilde{T}} = \tilde{T} \cup \{f_k\} \backslash \{e\},$$

tj. vyjměme hranu e ze zmiňované kružnice. Potom graf $(V, \tilde{\tilde{T}})$ zůstává souvislý, navíc $\#\tilde{\tilde{T}} = n - 1$, a je to tedy strom. Pro cenu platí

$$c(\tilde{\tilde{T}}) = c(\tilde{T}) + c(f_k) - c(e).$$

Abychom zjistili, jak vysoká je cena $\tilde{\tilde{T}}$ v porovnání s cenou $\tilde{T}$, uvažujme takto: V k-tém kroku se Kruskalův algoritmus rozhodl pro hranu f_k a nikoli pro hranu e, přičemž se pro e rozhodnout mohl, protože hrany$\{f_1, ..., f_{k-1}, e\} \subset \tilde{T}$ a tyto hrany tedy netvoří kružnici. Důvodem, proč se algoritmus rozhodl pro f_k, musí tedy být $c(f_k) \le c(e)$. Z toho plyne, že také

$$c(\tilde{\tilde{T}}) \le c(\tilde{T}),$$

ale protože už $c(\tilde{T})$ byla minimální, musí zde platit rovnost. Každopádně $\tilde{\tilde{T}} \in \mathcal{T}$. Ovšem $\tilde{\tilde{T}}$ obsahuje i hranu f_k, takže $g(\tilde{\tilde{T}}) > k$, což je spor s volbou k. □