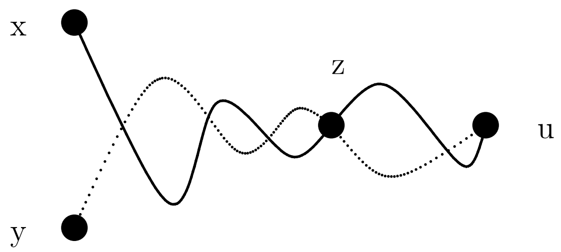

Obrázek 0.1.1: Cesty P_x a P_y

0.1 Bipartitní grafy

Definice 0.1.1. Řekneme, že graf $G = (V, E)$ je **bipartitní** (angl. *bipartite*), existuje-li rozklad množiny V na dvě disjunktní neprázdné množiny V_1, V_2 takový, že $E \cap \binom{V_1}{2} = \emptyset$, $E \cap \binom{V_2}{2} = \emptyset$, tj. takový, že mezi žádnými dvěma vrcholy z V_1 ani mezi žádnými dvěma vrcholy z V_2 nevede hrana.

Poznámka 0.1.2. Jestliže je G bipartitní, lze očíslovat vrcholy tak, že prvních k vrcholů leží ve V_1 a zbylých $n-k$ vrcholů ve V_2. Adjacenční matice má potom tvar

$$\boldsymbol{A}_G = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

Naopak: G je bipartitní, existuje-li permutace vrcholů (a tedy zároveň řádků i sloupců matice $\boldsymbol{A}_G$) taková, že $\boldsymbol{A}_G$ má uvedený tvar.

Definice 0.1.3. Bipartitní graf $G = (V_1 \cup V_2, E)$ se nazývá **úplný**, jestliže $(\forall u \in V_1)\,(\forall v \in V_2)\,(\{u, v\} \in E)$.

Věta 0.1.4. *Buď $G = (V, E)$ graf, $\#V \geq 2$. Potom G je bipartitní právě tehdy, když neobsahuje kružnici liché délky.*

Důkaz. $\boxed{\Rightarrow:}$

Libovolná kružnice prochází střídavě vrcholy z V_1 a V_2. Zvolíme-li nějaký vrchol za počáteční a půjdeme po kružnici, nakonec se do tohoto vrcholu vrátíme. Jdeme tedy několikrát z V_1 do V_2 a zpět, takže kružnice nemůže mít lichou délku.

$\boxed{\Leftarrow:}$

Nejprve předpokládejme, že G je souvislý. Necht' tedy v G neexistuje kružnice liché délky. Zvolme libovolně $u \in V$ a definujme nejkratší cesta z u do v má sudou délku

$$V_1 = \{\, v \in V |\text{ nejkratší cesta z } u \text{ do } v \text{ má sudou délku}\},$$

$$V_2 = V \backslash V_1.$$

Protože G je souvislý, tak vrcholy z V_2 mají nejkratší cestu do u liché délky.

Platí zřejmě $u \in V_1, V_1 \cap V_2 = \emptyset$ a navíc z u určitě vede nějaká hrana, třeba do vrcholu z, což znamená, že $z \in V_2$ (nejkratší cesta z u do z je po jediné hraně, tj. má délku 1, a to je liché číslo). V_1i V_2 jsou tedy neprázdné. Ukážeme sporem, že ve V_1 nevede hrana:

Necht' $(\exists x, y \in V_1)\,(\{x, y\} \in E)$. Bud' P_x nejkratší cesta z u do x, podobně P_y nejkratší cesta z u do y. P_x i P_y jsou sudé délky. Označmě z nejbližší bod od bodů x, y na cestách P_x a P_y, který je pro obě cesty stejný (v krajním případě může být tímto bodem i u), viz obrázek 0.1.1. Potom úsek cesty P_x mezi z a u je stejně dlouhý jako tentýž úsek po cestě P_y. Kdyby tomu tak nebylo, mohli bychom ten kratší z nich (necht' je to třeba úsek P_x) použít pro vytvoření kratší cesty z y do u, což je spor s volbou P_y jako nejkratší cesty.

Z toho ale plyne, že sled složený z úseků

1. x do z po P_x,

2. z do y po P_y,

3. y do x po hraně $\{x, y\}$

je kružnice liché délky, což je spor. Je to proto, že cesta $x \to z \to u \to z \to y$ je sudé délky, její úsek $z \to u \to z$, po kterém nejdeme, je však také sudé délky, a tak i cesta $x \to z \to y$ musí být sudé délky. Hrana $\{x, y\}$ ji pak uzavírá na kružnici liché délky.

Zcela stejně ukážeme, že ani mezi vrcholy z V_2 nevede hrana.

Jestliže G není souvislý, provedeme důkaz pro jeho komponenty $G^{(1)}, ..., G^{(m)}$ a získáme tak množiny $V_1^{(1)}, ..., V_1^{(m)}$ a $V_2^{(1)}, ..., V_2^{(m)}$. Potom definujeme

$$
\begin{aligned}
V_1 &= \bigcup_{j=1}^{m} V_1^{(j)} \\
V_2 &= \bigcup_{j=1}^{m} V_2^{(j)}.
\end{aligned}
$$

□

Poznámka. Necht' $G = (V, E)$ je souvislý. Potom zobrazení $d : V \times V \mapsto \mathbb{N}_0$ definované jako $d(u, v)$ =délka nejkatšího sledu z u do v je metrika na množině vrcholů v. Číslo $d(u, v)$ nazýváme **vzdáleností** vrcholů u, v v grafu G.