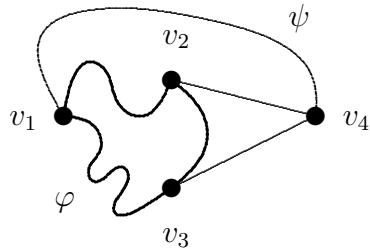
Obrázek 0.1.1: K_4 nakreslený do rovinyObrázek 0.1.2: K_5 není planární

0.1 Planární grafy

Definice 0.1.1. Graf G nazveme **planárním** (rovinným) **grafem** (angl. *planar graph*), jestliže jej lze namalovat do roviny tak, že se žádné dvě jeho hrany nekříží jinde než ve svých koncových vrcholech.

Poznámka. Uvedená definice je pouze intuitivní. Korektní definice by byla zbytečně komplikovaná, neboť by vybočovala ze záměru přednášky, která je orientována na kombinatorickou stránku teorie grafů. Pro představu se o takovou definici *pokusíme*:

Necht \mathcal{C} je množina všech jednoduchých spojitých křivek v \mathbb{R}^2 . Graf (bez násobných hran) G se nazývá **planární** právě tehdy, existuje-li prosté zobrazení $\varphi : V \cup \{\emptyset\} \mapsto \mathbb{R}^2 \cup \{\emptyset\}$ a zobrazení $\psi : E \mapsto \mathcal{C}$, takové že

$$\varphi(\emptyset) = \emptyset,$$

$$\begin{aligned} (\forall e \in E, e = \{u_1, u_2\}) (\psi(e)_{orig} = \varphi(u_1) \wedge \psi(e)_{term} = \varphi(u_2)), \\ (\forall e, f \in E, e = \{u_1, u_2\}, f = \{v_1, v_2\}) (\psi(e) \cap \psi(f) = \varphi(e \cap f)), \end{aligned}$$

kde ψ_{orig} je počáteční bod (angl. *origin*) křivky ψ a ψ_{term} je koncový bod (angl. *terminus*) křivky ψ .

Pro studium vlastností planárních grafů je potřeba rozumět topologii roviny, tj. lineárního prostoru \mathbb{R}^2 . Zde se omezíme na intuitivní chápání používaných pojmu.

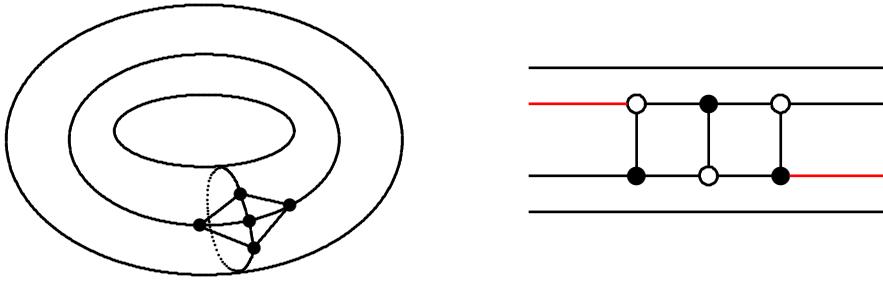
Poznámka 0.1.2. **Jordanovou křivkou** rozumíme jednoduchou uzavřenou spojitu křivku φ . Její **vnitřek** označujeme $\text{int } \varphi$, její **vnějšek** $\text{ext } \varphi$. **Jordanova věta** říká, že každá spojitá křivka ψ s počátkem v bodě $x \in \text{int } \varphi$ a koncem v bodě $y \in \text{ext } \varphi$ protíná křivku φ , tj $\varphi \cap \psi \neq \emptyset$. Tato skutečnost je téměř samozrejmá, její formální důkaz je však obtížný.

Příklad. K_4 je planární graf. To je vidět na obrázku 0.1.1.

Příklad. K_5 není planární.

Důkaz. Vezměme vrcholy v_1, v_2, v_3 a spojme je hranami, jako na obrázku 0.1.2. Tyto hranы vytvoří Jordanovu křivku φ . Aby bylo možné spojit i vrcholy v_4 a v_5 , nemůže podle Jordanovy věty ležet $v_4 \in \text{int } \varphi$ a $v_5 \in \text{ext } \varphi$ nebo naopak. Nechť jsou tedy $v_4, v_5 \in \text{ext } \varphi$. Spojíme v_4 s v_1, v_2, v_3 , čímž se (podle obrázku) dostane vrchol v_2 do vnitřku křivky ψ tvořené hranami mezi vrcholy v_1, v_3, v_4 . Umístíme-li nyní vrchol v_5 do $\text{ext } \psi$, nebude možné jej spojit s v_2 . Umístíme-li jej někam do $\text{int } \psi$, nebude možné jej spojit s jedním z vrcholů v_1, v_3, v_4 . Pokud bychom předpokládali $v_4, v_5 \in \text{int } \varphi$, byl by další postup podobný.

□

Obrázek 0.1.3: K_5 na toru a $K_{3,3}$ na Möbiusově listu

Poznámka. Uvedený důkaz je velice těžkopádný. Za chvíli vyslovíme větu, která umožní dokázat stejné tvrzení mnohem snáze. Její pomocí dále dokážeme, že také úplný bipartitní graf na $3+3$ vrcholech ($K_{3,3}$) není planární.

Definice 0.1.3. Necht' $G = (V, E)$, $e = \{u, v\} \in E$. Potom definujeme **dělení hrany** e jako graf

$$G \% e = (V \cup \{\alpha\}, E \setminus \{e\} \cup \{\{u, \alpha\}, \{\alpha, v\}\}),$$

kde $\alpha \notin V$.

Pozorování. G je planární $\Leftrightarrow G \% e$ je planární.

Definice 0.1.4. Graf H nazveme **dělením grafu** G , vznikne-li z G konečným počtem opakování operace dělení hrany.

Pozorování. Jestliže G obsahuje jako svůj podgraf dělení K_5 nebo $K_{3,3}$, tak G není planární.

Věta 0.1.5. (Kuratowski, 1930)

Graf G není planární právě tehdy, když obsahuje jako svůj podgraf dělení K_5 nebo $K_{3,3}$.

Důkaz. Implikace \Leftarrow : je obsažena v předchozí poznámce. Implikaci \Rightarrow : dokazovat nebudeme. \square

Poznámka. (Zajímavost) Je otázka, jestli je každý graf G planární právě tehdy, jde-li namalovat na povrch koule či do jiných ploch.

Pro kouli uvedená ekvivalence platí, protože mezi rovinou a koulí (až na jeden její bod) existuje bijekce - takzvaná *stereografická projekce* π , definovaná následovně. Kouli B položíme na rovinu P . Označme jako z nejvyšší bod B , tj. průsečík B s kolmicí na P vedenou bodem dotyku B a P . Libovolný bod x na B kromě bodu z spojíme přímkou s bodem z . Její průsečík s rovinou P pak označíme jako $\pi(x)$. π pak představuje bijekci

$$\pi : B \setminus \{z\} \mapsto P.$$

Pro jiné plochy však už ekvivalence neplatí. Například K_5 je možné namalovat na torus a $K_{3,3}$ na Möbiusův list, jak je vidět na obrázku 0.1.3. Zvláště v druhém případě je však třeba si uvědomit, že „namalovat na plochu“ znamená spíše „položit do plochy“, nikoliv namalovat na jednu stranu papíru. Pokud si vyrobíme Möbiusův list z pásky papíru, jejíž jeden konec přetočíme o 180° a oba konce spojíme, musíme graf nakreslit na obě strany, jako kdyby byl papír průhledný.

Lze dokázat zobecnění Kuratowského věty, které zhruba tvrdí: Pro každou plochu existuje konečný počet „zakázaných“ grafů takových, že každý graf G lze namalovat do této plochy bez křížení hran, právě když G neobsahuje jako podgraf dělení nějakého zakázaného grafu.

Naopak, pro každý graf existuje plocha, do níž je možné jej namalovat bez křížení hran.

Věta 0.1.6. (Euler)

Pro každý konvexní mnohostěn platí:

$$(počet vrcholů) - (počet hran) + (počet stěn) = 2$$

Známá Eulerova věta se snadno dokáže pomocí následující věty:

Věta 0.1.7. Necht' $G = (V, E)$ je souvislý planární graf. Označme $\Phi(G)$ počet oblastí, na něž se rozpadne rovina po namalování grafu G . Potom platí

$$\#V - \#E + \Phi(G) = 2.$$

Poznámka. Rozmyslete si, zda je $\Phi(G)$ skutečně definováno jednoznačně, tj. že nezávisí na způsobu namalování grafu G .

Poznámka. Eulerova věta je přímým důsledkem naší věty. Převod konvexního mnohostěnu na souvislý planární graf provedeme tak, že odebereme jednu jeho stěnu. Ze zbytku vnikne zdeformovaná síť mnohostěnu, kterou zobrazíme do roviny. Odebraná stěna pak představuje vnějšek grafu, jdoucí v rovině do nekonečna.

Důkaz. Indukcí podle $\Phi(G)$:

$\Phi(G) = 1 \Leftrightarrow$ v G není kružnice $\Leftrightarrow G$ je strom. (Je zřejmé, že každý strom lze namalovat do roviny.) Ve stromu platí $\#E = \#V - 1$, takže po dosazení vyjde $\#V - \#E + \Phi(G) = \#V - (\#V - 1) + 1 = 2$.

Indukční krok: $\Phi(G) \geq 2 \Rightarrow$ existuje hrana $e \in E$, po jejíž stranách leží dvě různé oblasti roviny. Tuto hranu uberejme. Potom pro graf $G \setminus e$ je $\Phi(G \setminus e) = \Phi(G) - 1$. Počet oblastí se zmenší právě o 1, neboť dvě oblasti na obou stranách hrany e se spojí do jedné. Z indukčního předpokladu platí

$$\#V - (\#E - 1) + (\Phi(G) - 1) = 2$$

a z toho už vychází

$$\#V - \#E + \Phi(G) = 2.$$

□

Poznámka. Věta platí i pro grafy se smyčkami a násobnými hranami, které mají vliv na $\Phi(G)$. V dalším se však budeme zabývat již pouze grafy bez násobných hran a smyček.

Věta 0.1.8. Necht' $G = (V, E)$ je souvislý planární graf (bez násobných hran a smyček), necht' $\#V = n \geq 3$. Potom

$$\#E \leq 3\#V - 6.$$

Důkaz. Odhadneme shora i zdola součet

$$\sum_{i=1}^{\Phi(G)} \nu(\Omega_i),$$

kde sčítáme přes všechny oblasti roviny a $\nu(\Omega_i)$ vyjadřuje počet hran, které tvoří hranici oblasti Ω_i . Pro odhad zdola využijeme, že hranice každé oblasti je tvořena alespoň třemi hranami. Pro odhad shora naopak použijeme, že každá hrana může tvořit část hranice jen dvou různých oblastí, a nebo netvoří část žádné hranice. Proto

$$3\Phi(G) \leq \sum_{i=1}^{\Phi(G)} \nu(\Omega_i) \leq 2\#E.$$

Dosadíme-li nyní z předchozí věty za $\Phi(G)$, dostaneme

$$\begin{aligned} 3(2 + \#E - \#V) &\leq 2\#E \\ \#E &\leq 3\#V - 6. \end{aligned}$$

□

Důsledek. K_5 není planární.

Důkaz. K_5 nesplňuje nerovnost z předchozí věty. Platí pro něj totiž

$$\#E = \binom{5}{2} = 10 > 9 = 3 \cdot 5 - 6 = 3\#V - 6.$$

□

Tvrzení. $K_{3,3}$ není planární.

Důkaz. Nyní nemůžeme přímo využít minulou větu, neboť $K_{3,3}$ má $\#V = 6$, $\#E = 9$ a nerovnost 0.1.8 splňuje. Pomůže nám ale dodatečný předpoklad. Je-li totiž G bipartitní, tak neobsahuje liché kružnice, takže hranice každé oblasti v rovině je tvořena nejméně čtyřmi hranami. Potom lze odvodit přísnější nerovnost:

$$4\Phi(G) \leq \sum_{i=1}^{\Phi(G)} \nu(\Omega_i) \leq 2\#E,$$

z čehož dostaneme

$$2\Phi(G) \leq \#E$$

a po dosazení za $\Phi(G)$ z věty 0.1.7 máme

$$\#E \leq 2\#V - 4.$$

Pro bipartitní graf $K_{3,3}$ však platí

$$\#E = 9 > 8 = 2 \cdot 6 - 4 = 2\#V - 4,$$

takže nemůže být planární.

□

0.1.1 Barevnost planárních grafů

Věta 0.1.9. Necht' $G = (V, E)$ je souvislý planární graf (bez násobných hran a smyček). Potom

$$\delta(G) \leq 5.$$

Důkaz. Zřejmě

$$\delta(G) \cdot \#V \leq \sum_{v \in V} d_G(v) = 2\#E.$$

Z toho plyne

$$\begin{aligned} \delta(G) \cdot \#V &\leq 2\#E \leq 2(3\#V - 6) = 6\#V - 12 \\ \delta(G) &\leq \frac{6\#V - 12}{\#V} = 6 - \frac{12}{\#V} \end{aligned}$$

a protože $\delta(G) \in \mathbb{N}_0$, tak zřejmě $\delta(G) \leq 5$.

□

Důsledek 0.1.10. Je-li G planární, potom $\chi(G) \leq 6$.

Důkaz. Indukcí podle počtu vrcholů $\#V$. Vezmeme vrchol $v \in V$, který má minimální stupeň. Potom

$$d_G(v) = \delta(G) \leq 5.$$

Graf $G \setminus v$ je z indukčního předpokladu možné barvit 6 barvami. Když v opět přidáme, je jasné, že na něj jedna barva ze šesti vyjde, neboť má nejvýše 5 sousedů.

□

Věta 0.1.11. Je-li $G = (V, E)$ planární graf, potom $\chi(G) \leq 5$.

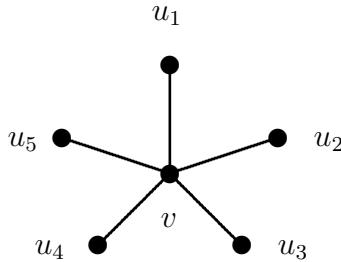
Důkaz. Sporem. Necht' $\chi(G) > 5$, takže podle předchozí věty $\chi(G) = 6$. BÚNO předpokládejme, že G je 6-kritický. Pokud tomu tak není, lze z něj ubírat hrany tak dlouho, dokud se 6-kritickým nestane, přičemž zřejmě bude stále planární.

Víme, že k -kritické grafy jsou souvislé a platí pro ně $\delta(G) \geq k - 1$. V našem případě máme

- G je planární $\Rightarrow \delta(G) \leq 5$,
- G je 6-kritický $\Rightarrow \delta(G) \geq 5$,

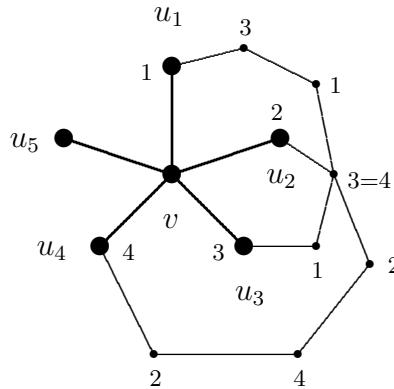
takže $\delta(G) = 5$. Vezměme $v \in V$ takový, že $d_G(v) = 5$. Protože G je 6-kritický, tak $\chi(G \setminus v) = 5$ (z definice je $\chi(G \setminus v) \leq 5$, je ale jasné, že nemůže být $\chi(G \setminus v) < 5$) a navíc při každém vlastním obarvení grafu $G \setminus v$ pomocí 5 barev se na 5 sousedech vrcholu v musí vyskytovat všech 5 barev, jinak by i $\chi(G) = 5$, což by byl spor.

Necht' má tedy v sousedy u_1, \dots, u_5 , kde u_i má (při nějakém pevném vlastním 5-vrcholovém obarvení φ) barvu i , a necht' jsou tyto vrcholy při namalování G rozmístěny jako na obrázku.



Uvažujme podgraf $G[\varphi^{-1}(1) \cup \varphi^{-1}(3)]$ grafu G indukovaný vrcholy s barvou 1 a 3. Potom u_1 a u_3 jsou ve stejné komponentě tohoto podgrafa. Pokud by tomu tak nebylo, zaměnili bychom např. v komponentě, ve které je u_1 , barvy 1 a 3. Obarvení celého grafu by zůstalo vlastní, ale pak u_1 by měl také barvu 3 a sousedé v by neměly 5 různých barev, což je spor. Proto existuje cesta z u_1 do u_3 pouze po vrcholech barvy 1 a 3. Toto tvrzení si pro účely poznámky za důkazem označme jako (*).

Ze stejného důvodu existuje cesta z u_2 do u_4 pouze po vrcholech barvy 2 a 4. Tyto cesty se musí někde protínat. Protože G je planární, musí to být v nějakém vrcholu, který pak má barvu $b \in \{1, 3\} \cap \{2, 4\}$, což je spor.

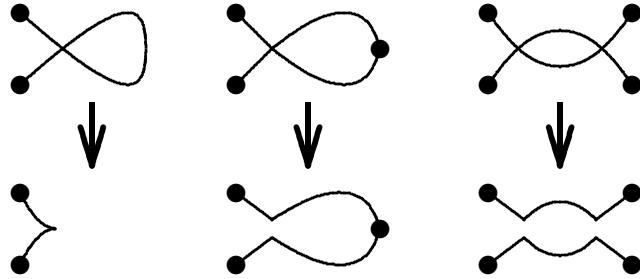


□

Poznámka. Vrchol v_5 jsme v důkazu vůbec nepoužili. Nabízí se otázka, zda by tedy stejným způsobem nešlo dokázat $\chi(G) \leq 4$.

Zkusíme tedy důkaz sporem. Necht' $\chi(G) > 4$, tj. $\chi(G) = 5$. Potom pro 5-kritický graf dostaneme $\delta(G) \geq 4$ a z planarity opět $\delta(G) \leq 5$. Proto $\delta(G) \in \{4, 5\}$.

- Pokud $\delta(G) = 4$, pak $(\exists v \in V)(d_G(v) = 4)$. Platí $\chi(G \setminus v) = 4$ a tím pádem při každém vlastním 4-vrcholovém obarvení $G \setminus v$ musí být na 4 sousedech v všechny 4 barevy. Důkaz až do konce je pak stejný, dostaneme spor s planaritou.



Obrázek 0.1.4: Zbytečné křížení hran a jeho odstranění

- Pokud $\delta(G) = 5$, pak $(\exists v \in V)(d_G(v) = 5)$ a situace vypadá přesně jako na prvním obrázku v důkazu věty. Platí ovšem opět $\chi(G \setminus v) = 4$ a tak při každém vlastním 4-vrcholovém obarvení $G \setminus v$ musí být na 5 sousedech v právě 4 barvy. Právě dva vrcholy z u_1, \dots, u_5 mají tedy stejnou barvu. Očíslujme si vrcholy tak, že při namalování G jdou čísla opět po sobě jako na obrázku, a vrchol u_5 má stejnou barvu jako jeden z vrcholů u_1, \dots, u_4 , které tak mají 4 různé barvy. Takové očíslování vždy existuje. Potom nemusí platit (*). Jestliže totiž u_5 má barvu 3 a leží ve stejné komponentě grafu $G[\varphi^{-1}(1) \cup \varphi^{-1}(3)]$ jako u_1 a zaměníme-li barvy 1 a 3 v této komponentě, bude mít v stále 5 sousedů s právě 4 barvami a ke sporu nedojde. Pokud zaměníme barvy v komponentě, kde leží vrchol u_3 , budou mít sice u_3 i u_1 barvu 1, ale u_5 bude mít stále barvu 3 a opět ke sporu nedojde. Různé kombinace barvy a umístění vrcholu u_5 nám v obecném planárním grafu G nedovolí dokázat tvrzení (*) vždy nejvýše pro jednu z dvojic vrcholů u_1, u_3 a u_2, u_4 . Celkově tedy nelze důkaz nerovnosti $\chi(G) \leq 4$ tímto způsobem provést.

Poznámka. I když se nám nepodařilo dokázat $\chi(G) \leq 4$ pro každý planární graf, je známo, že toto tvrzení platí. Všichni jej známe v podobě „K obarvení každé politické mapy tak, aby žádné dva stejně barevné státy neměly společnou hranici (nenulové délky), stačí čtyři barvy.“. Dlouho však bylo uváděno pouze jako domněnka, teprve v roce 1976 jej dokázali K. Appel a W. Haken. Jeho důkaz si vyžádal použití počítače poté, co bylo toto tvrzení pro obecný planární graf transformováno na stejné tvrzení pro desítky speciálních případů, u kterých jej již bylo možné ověřit „hrubou silou“. Jen zmíněné transformace prý vydají na knihu o asi dvou stranách...

0.1.2 Minimální počet křížení v grafu

Definice 0.1.12. **Minimální počet křížení** (angl. *crossing number*) $\text{cr}(G)$ grafu G je minimální počet dvojic hran, které se po namalování grafu G do roviny kříží.

Poznámka. $\text{cr}(G)$ není počet průsečíků hran. G je planární právě tehdy, když $\text{cr}(G) = 0$.

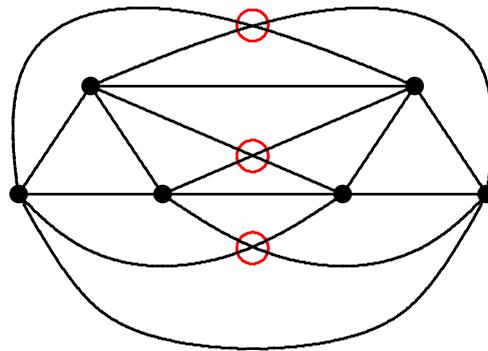
Poznámka. Jak namalovat G s co nejmenším počtem křížení? Podívejme se na obrázek 0.1.4:

- Jedna hrana se nemusí křížit sama se sebou.
- Dvě hrany, které mají společný vrchol, se nemusejí křížit.
- Žádná dvojice hran se nemusí křížit více než jednou.

Věta 0.1.13. Nechť $G = (V, E)$ je graf. Potom platí

$$\#E - 3\#V + 6 \leq \text{cr}(G).$$

Důkaz. Namalujme graf G tak, že počet křížení v obrázku je právě $\text{cr}(G)$. Na místě každého křížení přidáme vrchol. Tím za každé křížení přibude 1 nový vrchol a 2 nové hrany. Dostaneme planární graf s

Obrázek 0.1.5: Minimální počet křížení v grafu K_6

počtem vrcholů $\#V + \text{cr}(G)$ a počtem hran $\#E + 2\text{cr}(G)$. Pro planární graf platí věta 0.1.8, tj. $\#E \leq 3\#V - 6$. Po dosazení našich hodnot máme

$$\#E + 2\text{cr}(G) \leq 3(\#V + \text{cr}(G)) - 6$$

a z toho už

$$\#E - 3\#V + 6 \leq \text{cr}(G).$$

□

Příklad. Pro $G = K_6$ platí $\#E = 15$, $\#V = 6$, takže vychází nerovnost $3 \leq \text{cr}(G)$. Podle obrázku 0.1.5 jsme schopni tří křížení dosáhnout, takže $\text{cr}(G) = 3$.

Věta 0.1.14. Nechť $G = (V, E)$ je graf, $m = \#E$, $n = \#V$ a nechť $m \geq 4n$. Potom platí

$$\text{cr}(G) \geq \frac{1}{64} \frac{m^3}{n^2}.$$

Poznámka. Pro velký počet hran, tj. $m \approx n^2$ (nejvýše je $m = \binom{n}{2} = \frac{n^2-n}{2}$) tato věta dává mnohem silnější odhad $\text{cr}(G)$:

$$\text{cr}(G) \geq \text{konst} \cdot \frac{n^6}{n^2} = \text{konst} \cdot n^4 \approx \text{konst} \cdot m^2,$$

což je odhad kvadratický v počtu hran m .

Důkaz. Provedeme tzv. *pravděpodobnostní* důkaz tohoto tvrzení. Tento typ důkazu se nám bude ještě mnohokrát hodit v druhé kapitole.

Namalujeme G tak, aby počet křížení byl $\text{cr}(G)$. Vezmeme zatím blíže neurčené $p \in [0, 1]$ a pro každý vrchol se nezávisle rozhodujeme, zda jej necháme v obrázku: Vrchol ponecháme s pravděpodobností p a odstraníme jej s pravděpodobností $1 - p$. Každá hrana zůstane v obrázku, pokud v něm zůstanou oba její koncové vrcholy. Stejně tak křížení zůstane v obrázku, pokud v něm zůstanou obě hrany, které jej tvoří. Výsledkem je obrázek nového grafu $G_p \subset G$. Označme si následující náhodné veličiny:

- | | |
|-------|--|
| n_p | počet ponechaných vrcholů, tj. počet vrcholů v G_p , |
| m_p | počet hran v G_p , |
| X | počet křížení v obrázku G_p . |

X nemusí být rovno $\text{cr}(G_p)$, protože obrázek G_p vznikl jen odebráním některých částí obrázku původního grafu G . Proto podle předchozí věty platí

$$X \geq \text{cr}(G_p) \geq m_p - 3n_p + 6.$$

Z toho plyne, že i pro střední hodnoty platí (jestliže na pravé straně zanedbáme konstantu 6)

$$\text{E}X \geq \text{Em}_p - 3\text{En}_p. \quad (0.1.1)$$

Střední hodnoty jednotlivých veličin vyjádříme následovně. Pro každé $v \in V$ označíme elementární náhodnou veličinu

$$x_v = \begin{cases} 1 & v \in V(G_p) \\ 0 & v \notin V(G_p) \end{cases},$$

tj. x_v je indikátor jevu $v \in V(G_p)$. Potom $\forall v \in V$ platí

$$\text{Ex}_v = 1 \cdot \Pr(v \in V(G_p)) + 0 \cdot \Pr(v \notin V(G_p)) = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p$$

a protože $n_p = \sum_{v \in V} x_v$, tak

$$\text{En}_p = \sum_{v \in V} \text{Ex}_v = np.$$

Analogicky zavedeme indikátor y_e jevu $e \in E(G_p)$ pro každou $e \in E$. Potom $\forall e \in E$ platí $\text{Ey}_e = p^2$ a tak

$$\text{Em}_p = mp^2.$$

Konečně totéž provedeme i pro křížení, přičemž podle konstrukce obrázku G_p v něm zůstává každé konkrétní křížení s pravděpodobností p^4 , takže $\text{EX} = \text{cr}(G) \cdot p^4$. Po dosazení do (0.1.1) máme

$$\begin{aligned} \text{cr}(G) \cdot p^4 &\geq mp^2 - 3np \\ \text{cr}(G) &\geq \frac{m}{p^2} - \frac{3n}{p^3}, \end{aligned}$$

což musí platit pro každé $p \in [0, 1]$. Pokud nyní zvolíme $p = \frac{4n}{m} \leq 1$, dostaneme

$$\text{cr}(G) \geq \frac{m}{p^2} - \frac{3n}{p^3} = \frac{m^3}{16n^2} - 3 \frac{m^3}{4^3 n^2} = \frac{m^3}{n^2} \left(\frac{4}{4^3} - \frac{3}{4^3} \right) = \frac{1}{64} \frac{m^3}{n^2}.$$

□