0.1 Hranové obarvení grafu

Definice 0.1.1. Nechť $G = (V, E)$ je graf, $k \in \mathbb{N}$. Zobrazení $\varphi : E \mapsto \hat{k}$ nazveme k-**hranové obarvení** grafu G (angl. k-*edge colouring*). φ se nazývá **vlastní** (angl. *proper*) k-hranové obarvení grafu G, pokud

$$(\forall e, f \in E, e \neq f) \left(\varphi(e) = \varphi(f) \Rightarrow e \cap f = \emptyset\right),$$

tj. pokud hrany se stejnou barvou nemají společný konec. **Hranová barevnost** (angl. *edge chromatic number*) $\chi'(G)$ grafu G je minimální k takové, že G má vlastní k-hranové obarvení.

Poznámka. $\chi'(G) \geq \Delta(G)$.

Poznámka. φ je vlastní k-hranové obarvení gafu G, právě když pro každé $i \in \hat{k}$ $\varphi^{-1}(i)$ (všechny vrcholy barvy i) představuje párování.

Důsledek. *Hranová barevnost grafu $G = (V, E)$ je minimální počet disjunktních párování, jejichž sjednocením je celé E.*

Úmluva. V důkazech budeme často používat obrat „G lze obarvit k barvami“. Máme tím vždy na mysli „existuje *vlastní* k-hranové obarvení grafu G“. Stejným způsobem budeme hovořit o grafech i v další kapitole, zabývající se vrcholovým obarvením.

0.1.1 Problém rozvrhu hodin

Příklad. Uvažujme bipartitní graf $G = (V_1 \cup V_2, E)$, kde V_1 představuje množinu učitelů a V_2 množinu kroužků. Z $u \in V_1$ vede do $v \in V_2$ m hran, pokud učitel u učí v kroužku v m hodin (např. týdně). Nalezneme obarvení grafu G, a potom hrany stejné barvy, představující párování v G, znamenají stejný čas (hodinu, termín) přednášky. Zatím však neuvažujeme omezení počtem volných místností.

Věta 0.1.2. *Je-li $G = (V_1 \cup V_2, E)$ bipartitní graf, tak platí $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Úmluva. Vzhledem k velmi častému výskytu symbolu $\Delta(G)$ označujícího maximální stupeň grafu G v následujícím výkladu budeme místo $\Delta(G)$ psát jen Δ.

Důkaz. Využijeme důsledku **??** (sňatkového problému), který říká, že r-regulární bipartitní graf má perfektní párování. Z G nejdříve takový graf vyrobíme, a to takto:

1. Nechť BÚNO $\#V_1 > \#V_2$. Potom doplníme do V_2 potřebný počet izolovaných vrcholů, vznikne tak V_2', $\#V_1 = \#V_2'$.

2. Ve V_1 vybereme libovolný vrchol u se stupněm $d_G(u) < \Delta$. Potom i ve V_2' musí existovat vrchol v se stupněm $d_G(v) < \Delta$. Vrcholy u, v spojíme hranou. Tento krok opakujeme, dokud je to možné, přičemž skončíme zřejmě právě tehdy, když všechny vrcholy budou mít stupeň roven Δ.

Dostaneme nový Δ-regulární graf $\tilde{G} = (V_1 \cup V_2', \tilde{E})$. Najdeme v něm perfektní párování M, všechny hrany z M obarvíme barvou Δ a následně je z grafu $\tilde{G}$ odstraníme. Tím získáme $(\Delta - 1)$-regulární graf a úvahu můžeme opakovat, dokud zbývají nějaké hrany. Výsledkem bude, že nakonec původní Δ-regulární graf $\tilde{G}$ bude obarven Δ barvami. To znamená, že i jeho podgraf G lze obarvit Δ barvami, takže $\chi'(G) \leq \Delta$. Víme však, že vždy platí $\chi'(G) \geq \Delta$, a tvrzení je tedy dokázáno. □

Lemma 0.1.3. *Nechť M_1, M_2 jsou dvě disjunktní párování v grafu $G = (V, E)$ taková, že $\#M_1 > \#M_2$. Potom existují disjunktní párování N_1, N_2 v G taková, že:*

1. $N_1 \cup N_2 = M_1 \cup M_2$,

2. $\#N_1 = \#M_1 - 1$, $\#N_2 = \#M_2 + 1$, *tj. N_1, N_2 mají menší rozdíl v počtu prvků.*

Důkaz. Definujme graf $H = (V, M_1 \cup M_2)$. Potom zřejmě $(\forall v \in V)\,(d_H(v) \leq 2)$. H je sjednocením izolovaných vrcholů, cest a kružnic sudé délky, čehož jsme již jednou využili v důkazu Bergeovy věty **??**. Protože $\#M_1 > \#M_2$, musí v H existovat cesta liché délky $2k+1$, která má k hran z M_2 a $k+1$ hran z M_1. Tuto cestu označíme P. Nyní definujeme

$$\begin{aligned} N_1 &= (M_1 \backslash P) \cup (P \cap M_2), \\ N_2 &= (M_2 \backslash P) \cup (P \cap M_1), \end{aligned}$$

tj. na cestě P vyměníme hrany mezi M_1 a M_2, mimo cestu zařadíme do N_i stejné hrany jako jsou v M_i. N_1, N_2 jsou opět párování a přitom si lze snadno rozmyslet, že splňují oba body dokazovaného lemmatu. □

Příklad. Vrat'me se nyní k problému rozvrhu hodin. Necht' l je počet dostupných místností a $m = \#E$, tj. celkový počet různých vyučovacích hodin všech kroužků. Potom počet různých časů (termínů, angl. *period*) P potřebných pro výuku musí splňovat $P \geq \lceil \frac{m}{l} \rceil$. Rovněž platí $P \geq \Delta$, protože $\Delta = \chi'(G)$, tj. počet různých barev v nejlepším možném obarvení bipartitního grafu G. Celkově tedy platí

$$P \geq \max\left\{ \left\lceil \frac{m}{l} \right\rceil, \Delta \right\}.$$

Předpokládejme, že $l = 6$. Snadno si lze představit případ bipartitního grafu, pro který platí $\Delta = 2$ a v němž najdeme jeho hranové obarvení dvěma barvami, tj. dvě disjunktní párování M_1, M_2, pro něž platí $\#M_1 = 8, \#M_2 = 2$ a $M_1 \cup M_2 = E$. Potom počet potřebných časů pro výuku bude $P = 3$, protože blok přednášek M_1, které by teoreticky (bez dalších omezení) mohly probíhat současně, bude nutné rozdělit na dvě části kvůli nedostatku místností. Opakovanou aplikací minulého lemmatu však lze postupně upravit párování M_1, M_2 tak, že $\#M_1 = \#M_2 = 5$. Potom již bude potřeba pouze $P = 2 = \max\left\{ \lceil \frac{10}{6} \rceil, 2 \right\}$ různých časů.

V následujícím ukážeme, že vždy existuje takový rozvrh, pro nějž platí

$$P = \max\left\{ \left\lceil \frac{m}{l} \right\rceil, \Delta \right\}.$$

Začneme obecnou úvahou. Necht' existuje p disjunktních párování $M_1, ..., M_p$ v G, pro něž platí $\bigcup_{i \in \hat{p}} M_i = E$. Potom opakovaným použitím předchozího lemmatu lze tato párování upravit tak, že

$$((\forall i, j \in \hat{p})\,(|\#M_i - \#M_j| \leq 1)),$$

tj. hrany jsou co nejrovnoměrněji rozděleny do jednotlivých párování, a tak v každém párování je nejvýše $\left\lceil \frac{m}{p} \right\rceil$ hran. V takovém případě je maximální počet hran v párování, tj. číslo $\max_{i \in \hat{p}} \#M_i$, nejmenší možné.

Nyní již dokážeme uvedený vztah. Najděme obarvení grafu G Δ barvami. Potom získáme Δ disjunktních párování

$$M_1 = \varphi^{-1}(1), ..., M_\Delta = \varphi^{-1}(\Delta).$$

1. Necht' $\lceil \frac{m}{l} \rceil < \Delta$. Potom chceme dokázat $P = \Delta$. Párování $M_1, ..., M_\Delta$ upravíme popsaným postupem tak, že
$$\left(\forall i \in \hat{\Delta}\right) \left(\#M_i \leq \left\lceil \frac{m}{\Delta} \right\rceil\right).$$
   Z předpokladu však postupně platí, že
$$\left\lceil \frac{m}{l} \right\rceil < \Delta \Rightarrow \frac{m}{l} < \Delta \Rightarrow \frac{m}{\Delta} < l \Rightarrow \left\lceil \frac{m}{\Delta} \right\rceil \leq l.$$
   To znamená, že každé párování M_i lze považovat za blok současně probíhající výuky, protože se vždy vejde do dostupných místností. Proto $P = \Delta$.

2. Necht' $\lceil \frac{m}{l} \rceil \geq \Delta$. Potom chceme dokázat $P = \lceil \frac{m}{l} \rceil$. Je jasné, že existuje-li v G Δ disjunktních párování, pak existuje i $\lceil \frac{m}{l} \rceil$ disjunktních párování. Stačí totiž potřebný počet párování rozdělit

na dvě nebo více disjunktních párování, nebo definovat $M_i = \emptyset$ pro každé $\Delta < i \leq \lceil \frac{m}{l} \rceil$. Párování $M_1, ..., M_{\lceil \frac{m}{l} \rceil}$ pak upravíme tak, aby

$$\left(\forall i \in \left\{1, 2, ..., \left\lceil \frac{m}{l} \right\rceil\right\}\right) \left(\#M_i \leq \left\lceil \frac{m}{\lceil \frac{m}{l} \rceil} \right\rceil\right).$$

Nyní opět ukážeme, že tato párování už lze brát jako bloky současně probíhající výuky, protože se vejdou do l místností. Platí totiž:

$$\left\lceil \frac{m}{\lceil \frac{m}{l} \rceil} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{m}{\left(\frac{m}{l}\right)} \right\rceil = \lceil l \rceil = l.$$

0.1.2 Vizingova věta

Věta 0.1.4. (Vizing)
Pro libovolný graf G platí $\chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Poznámka. Protože víme $\chi'(G) \geq \Delta$, tak Vizingova věta znamená, že hranová barevnost grafu může vlastně nabývat jen dvou hodnot: Δ a $\Delta + 1$. Důkaz této věty provedeme až poté, co si připravíme dvě pomocná tvrzení.

Lemma 0.1.5. *Nechť $G = (V, E)$ je souvislý graf, G není kružnice liché délky. Potom existuje 2-hranové obarvení G takové, že na každém vrcholu se stupněm alespoň 2 se vyskytují hrany obou barev.*

Důkaz. V důkazu využijeme znalostí o eulerovských grafech.

1. Nechť G je eulerovský. Potom

   (a) všechny stupně jsou 2. Z předpokladu se pak jedná o kružnici sudé délky. Hrany obarvíme střídavě oběma barvami, a každý vrchol pak spojuje dvě hrany dvou různých barev.

   (b) existuje vrchol se stupněm ≥ 4. Z tohoto vrcholu pak začneme eulerovský cyklus, barvíme opět střídavě. Proč zrovna tento vrchol volíme za počáteční plyne z následujícího. Do každého vrcholu kromě počátečního totiž vstoupíme po hraně jedné barvy a okamžitě jej opouštíme po hraně druhé barvy. Pokud bychom za počáteční vrchol zvolili vrchol se stupněm 2, tak bychom u něj tuto jistotu neměli. Má-li však počáteční vrchol stupeň alespoň 4, potom jím v eulerovském cyklu projdeme alespoň jednou stejným způsobem jako ostatními vrcholy.

2. Nechť G není eulerovský, tj. podle věty **??** má vrchol s lichým stupněm. Protože ale

   $$\sum_{v \in V} d_G(v) = 2\#E$$

   je sudý, je vrcholů s lichým stupněm sudý počet. Když ke grafu G přidáme vrchol $x \notin V$ a napojíme ho na všechny vrcholy s lichým stupněm, bude mít x sudý stupeň a nový graf $\tilde{G}$ bude eulerovský. Tento graf obarvíme podle bodu 1 a nakonec vše, co jsme přidali, opět odebereme. Každý vrchol v $\tilde{G}$ kromě x však má u sebe obě barvy hran zastoupeny v stejném počtu: do každého vrcholu jsme přišli a zase odešli. Při odebrání hran z $\tilde{G}$ u vrcholů se sudým stupněm už nic nezměníme, u vrcholů s lichým stupněm (v G), který je alespoň 3, pak nezmizí žádná z barev, protože v $\tilde{G}$ u něj byla každá alespoň dvakrát.

□

Definice 0.1.6. k-hranové obarvení $\varphi : E \mapsto \hat{k}$ grafu $G = (V, E)$ se nazývá optimální, jestliže pro každé jiné k-hranové obarvení $\tilde{\varphi} : E \mapsto \hat{k}$ platí

$$\sum_{v \in V} c_\varphi(v) \geq \sum_{v \in V} c_{\tilde{\varphi}}(v),$$

kde $c_\varphi(v)$ je počet různých barev hran vedoucích z vrcholu v.

Poznámka. Obarvení φ je vlastní, právě když $(\forall v \in V)\,(c_\varphi(v) = d_G(v))$.

Poznámka. Pojem optimální obarvení nevyužijeme nikde jinde než v důkazu Vizingovy věty.

Lemma 0.1.7. *Nechť φ je optimální obarvení grafu $G = (V, E)$ a nechť existuje vrchol $u \in V$ a barvy i, j takové, že barva i se na vrcholu u nevyskytuje vůbec a barva j se na u vyskytuje alespoň dvakrát. Potom komponenta U grafu*

$$\tilde{G} = \left(V, \varphi^{-1}(i) \cup \varphi^{-1}(j)\right),$$

která obsahuje vrchol u, je kružnice liché délky.

Důkaz. Sporem: V $\tilde{G}$ určitě platí $d_{\tilde{G}}(u) \geq 2$ a počet barev u vrcholu u v grafu $\tilde{G}$ (při obarvení φ grafu G) je 1. Kdyby U nebyla lichá kružnice, pak lze podle lemmatu 0.1.5 najít 2-hranové obarvení $\tilde{\varphi}$ grafu $\tilde{G}$ barvami i, j takové, že $c_{\tilde{\varphi}}(u) = 2$ a u ostatních vrcholů v grafu $\tilde{G}$ počet barev neklesne. Definujeme-li pak nové obarvení ψ grafu G jako

$$(\forall e \in E)\left(\psi(e) = \begin{cases} \varphi(e) & \text{pokud } \varphi(e) \notin \{i, j\} \\ \tilde{\varphi}(e) & \text{pokud } \varphi(e) \in \{i, j\} \end{cases}\right),$$

tak bude platit

$$\sum_{v \in V} c_\varphi(v) < \sum_{v \in V} c_\psi(v),$$

což je spor s optimalitou φ. □

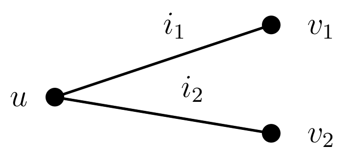
Nyní máme již vše připraveno pro důkaz Vizingovy věty 0.1.4.

Důkaz. Mějme libovolný graf $G = (V, E)$. Ukážeme, že $\chi'(G) \leq \Delta + 1$. Vezmeme optimální $(\Delta + 1)$-hranové obarvení φ grafu G a sporem o něm dokážeme, že je vlastní.

Nechť φ není vlastní. Potom existuje $u \in V$ takový, že $c_\varphi(u) < d_G(u)$. Proto

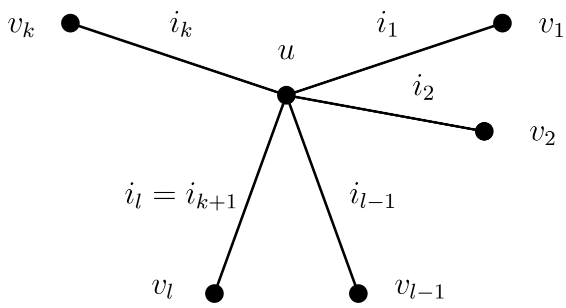
- existuje barva i_0, která na u schází (taková barva existuje na každém vrcholu) a
- existuje barva i_1, která je na u aslespoň dvakrát.

Označme v_1 vrchol, do nějž vede z u hrana barvy i_1. Dále označme i_2 barvu, která se nevyskytuje na v_1. Potom i_2 se vyskytuje na u. V opačném případě totiž přebarvíme hranu $\{u, v_1\}$ na i_2, tím se počet barev na u zvýší (i_1 je na u dvakrát), ale počet barev na v_1 neklesne. To je spor s optimalitou φ.



Označme rekurzivně pro rostoucí $k = 2, 3, \ldots$ jako i_k barvu, která není na v_{k-1}. Potom platí, že pro každé k tato barva musí být na u. Díky tomu lze označit vrchol, do nějž vede z u hrana barvy i_k, jako v_k. Zdůvodnění uvedeného tvrzení provedeme indukcí podle k: Pokud i_k na u chybí, přebarvíme hranu $\{u, v_{k-1}\}$ na i_k, čímž se počet barev na v_{k-1} nesníží. Počet barev na u se zvýší (a tak ihned dostaneme spor) jen tehdy, pokud i_{k-1} je stále na u, jinak pouze neklesne. V druhém případě však získáme jiné optimální obarvení grafu G, při němž i_{k-1} není na u, což je zase spor s indukčním předpokladem. Počáteční krok pro $k = 2$ jsme již dokázali nad obrázkem.

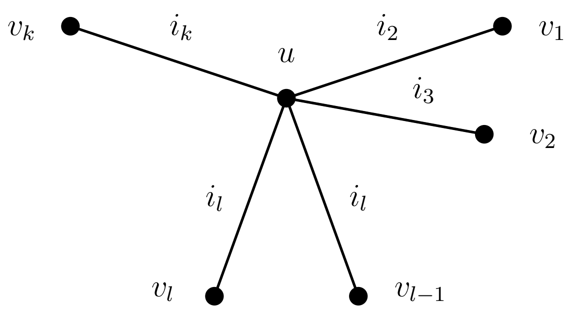
Pro určité k nastane situace, že barva i_{k+1}, která schází na v_k, se již vyskytuje mezi barvami $i_1, \ldots, i_{k-1}$. Označíme jako l takový index, že $i_{k+1} = i_l$. To je zobrazeno na následujícím obrázku:



Nyní definujeme nové obarvení $\tilde{\varphi}$, které bude pro všechny hrany stejné jako φ, až na následující změny:

$$(\forall j \in \{1, ..., l-1\}) \left(\tilde{\varphi}\left(\{u, v_j\}\right) = i_{j+1}\right).$$

Potom bude při obarvení $\tilde{\varphi}$ situace následující:

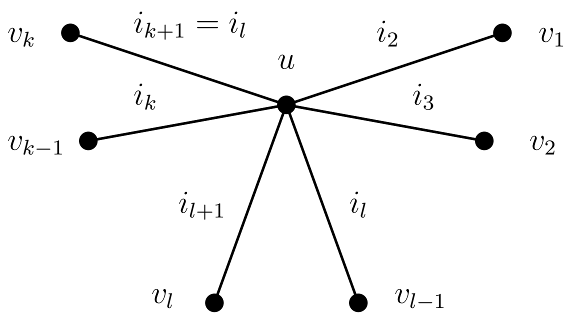


Každý vrchol v_j, $j \in \{1, ..., l-1\}$, dostal na hraně $\{u, v_j\}$ barvu, kterou předtím neměl. Vrchol u ztratil v_1, ale tu měl dvakrát. Nyní ji má jen jednou, ale zase má alespoň dvakrát i_l. Z toho je jasné, že $\tilde{\varphi}$ je opět optimální obarvení grafu G.

Definujeme ještě jedno obarvení $\tilde{\tilde{\varphi}}$, které bude pro všechny hrany stejné jako φ, až na následující změny:

$$(\forall j \in \{1, ..., k\}) \left(\tilde{\tilde{\varphi}}\left(\{u, v_j\}\right) = i_{j+1}\right).$$

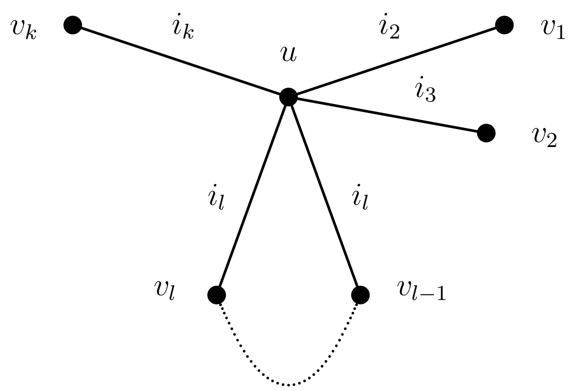
Potom při obarvení $\tilde{\tilde{\varphi}}$ dostaneme situaci:



Rovněž obarvení $\tilde{\tilde{\varphi}}$ je zřejmě optimální. Nyní již snadno dojdeme ke sporu, když použijeme lemma 0.1.7. Komponenta podgrafu

$$\tilde{G} = \left(V, \tilde{\varphi}^{-1}(i_0) \cup \tilde{\varphi}^{-1}(i_l)\right),$$

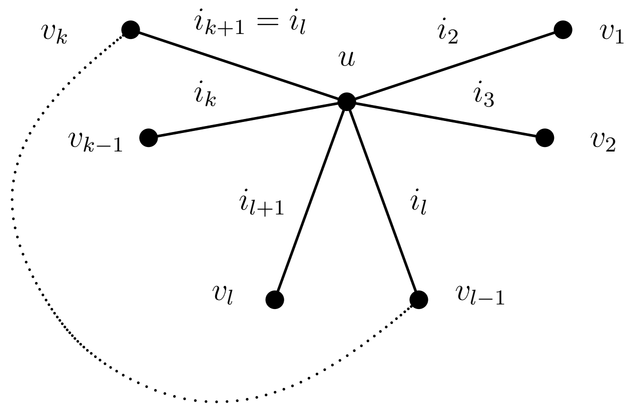
obsahující vrchol u, má totiž být lichá kružnice. Z vrcholu v_{l-1} nás tato kružnice přivede po hranách barvy i_0 a i_l do vrcholu v_l.



Zároveň však platí, že i komponenta podgrafu

$$\tilde{\tilde{G}} = \left(V, \tilde{\tilde{\varphi}}^{-1}(i_0) \cup \tilde{\tilde{\varphi}}^{-1}(i_l)\right),$$

obsahující vrchol u, je lichá kružnice. Z vrcholu v_{l-1} nás tato kružnice přivede po hranách barvy i_0 a i_l do vrcholu v_k.



To je ale spor, protože jediné hrany, které mají v obarvení $\tilde{\tilde{\varphi}}$ barvu odlišnou od barvy v obarvení $\tilde{\varphi}$, jsou hrany $\{u, v_l\}, \{u, v_{l+1}\}, ..., \{u, v_k\}$, takže kružnice vedoucí přes v_{l-1} se nemůže tímto způsobem změnit jen díky změně obarvení z $\tilde{\varphi}$ na $\tilde{\tilde{\varphi}}$. $\square$