# 1 Funkce komplexní proměnné

## 1.1 Komplexní čísla

### 1.1.1 Definice

$$\mathbb{C} = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

### 1.1.2 Definice - operace na $\mathbb{C}$

Na $\mathbb{C}$ definujeme sčítání a odčítání jako

$$(x_1, y_1) \pm (x_2, y_2) = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2)$$

a násobení jako

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$$

### 1.1.3 Věta

Číslo $x \in \mathbb{R}$ ztotožníme s $(x, 0)$.

*Důkaz:*

- $x, y \in \mathbb{R}$
- $(x, 0) \pm (y, 0) = (x \pm y, 0)$
- $(x, 0) \cdot (y, 0) = (xy, 0)$

### 1.1.4 Důsledek

Operace $\pm$ a $\cdot$ na $\mathbb{C}$ rozšiřují sčítání, odčítání a násobení z $\mathbb{R}$.

### 1.1.5 Definice

$(0, 1) := \mathrm{i}$

### 1.1.6 Věta

$\mathrm{i}^2 = -1$

*Důkaz:* $(0, 1) \cdot (0, 1) = (0 - 1, 0 + 0) = -1$

### 1.1.7 Věta

Libovolné komplexní číslo $(x, y)$, kde $x, y \in \mathbb{R}$ lze psát ve tvaru

$$z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + \mathrm{i}y$$

Tomuto zápisu říkáme algebraický tvar komplexního čísla. $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. K číslu $z = x + \mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$ přiřazuji číslo komplexně sdružené: $\bar{z} = x - \mathrm{i}y$. $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

### 1.1.8 Důsledky

Pro libovolné $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ platí

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2 \qquad |z| = |\bar{z}|$$
$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z - \bar{z}}{2\mathrm{i}}$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$
$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||$$

Dělení komlexních čísel probíhá následovně (po složkách)

$$\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{\overbrace{z_1 \cdot \bar{z}_2}^{\in\mathbb{C}}}{\underbrace{|z_2|^2}_{\in\mathbb{R}}}$$

### 1.1.9 Věta

Každé $z = x + \mathrm{i}y$; $x, y \in \mathbb{R}$ lze chápat jako $[x, y] \in \mathbb{R}^2$ v Gaussově rovině. Můžeme tedy zavést polární souřadnice

$$x = r\cos(\varphi)$$
$$y = r\sin(\varphi)$$

kde $r \geq 0$ a $\varphi$ je úhel, který svírá průvodič $[x, y]$ s kladnou částí osy $x$. $r = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.

### 1.1.10 Důsledek

Každé komplexní číslo lze zapsat v goniometrickém tvaru

$$z = |z|\left(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)\right)$$

### 1.1.11 Věta

Jelikož funkce sin a cos jsou $2\pi$ periodické, zavedeme množinu argumentů čísla $z$

$$\mathrm{Arg}z := \{\varphi \in \mathbb{R} : z = |z|\left(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)\right)\}$$

Mezi prvky množiny Arg$z$ existuje právě jedno $\varphi \in (-\pi, \pi\rangle$. Tomuto $\varphi$ říkáme hlavní hodnota argumentu čísla $z$ a značíme ho arg$z$, tj.

$$\mathrm{arg}z = \mathrm{Arg}z \cap (-\pi, \pi\rangle$$

### 1.1.12 Věta

Násobení a mocnění čísel v goniometrickém tvaru:

$$z = |z|\left(\cos(\varphi) + \mathrm{i}\sin(\varphi)\right) \qquad w = |w|\left(\cos(\psi) + \mathrm{i}\sin(\psi)\right)$$

$$\begin{aligned} z \cdot w &= |z| \cdot |w|\left(\cos(\varphi)\cos(\psi) - \sin(\varphi)\sin(\psi) + \mathrm{i}\cos(\varphi)\sin(\psi) + \mathrm{i}\cos(\psi)\sin(\varphi)\right) \\ &= |z \cdot w|\left(\cos(\varphi + \psi) + \mathrm{i}\sin(\varphi + \psi)\right) \end{aligned}$$

### 1.1.13 Poznámka

$\mathrm{Arg}(z \cdot w) = \mathrm{Arg}z + \mathrm{Arg}w$, ale $\arg(z \cdot w) = \arg z + \arg w$ neplatí! Platí pouze $\arg(z \cdot w) = \arg z + \arg w + 2k\pi$ pro vhodně zvolené $k \in \{-1, 0, 1\}$.

### 1.1.14 Příklad

$$z = \mathrm{i} = \cos(\frac{\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{2}) \qquad \arg z = \frac{\pi}{2}$$
$$w = -1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{3}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{3}{4}\pi)\right) \qquad \arg w = \frac{3}{4}\pi$$
$$z \cdot w = -1 - \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\cos(\frac{5}{4}\pi) + \mathrm{i}\sin(\frac{5}{4}\pi)\right) \qquad \arg(z \cdot w) = -\frac{3}{4}\pi \neq \arg z + \arg w$$

## 1.2 Základní pojmy

### 1.2.1 Definice - funkce komplexní proměnné

Řekněme, že na množině $M \subset \mathbb{C}$ je dána funkce $f(z)$ komplexní proměnné, je-li každému $z \in M$ přiřazeno právě jedno komplexní číslo $w \in \mathbb{C}$. Potom značíme $w = f(z)\ \forall z \in M$.

### 1.2.2 Poznámka - reálná a imaginární složka FKP

$z \in M \to z = x + \mathrm{i}y$ kde $x, y \in \mathbb{R}$
$w = f(z) \to w = u + \mathrm{i}v$ kde $u, v \in \mathbb{R}$

$$f(x + \mathrm{i}y) = \underbrace{u(x,y)}_{\mathrm{Re}\, f} + \mathrm{i}\,\underbrace{v(x,y)}_{\mathrm{Im}\, f}$$

### 1.2.3 Příklad

$f(z) = z^2$, $z = x + iy$, kde $x, y \in \mathbb{R}$
$f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{u(x,y)} + \mathrm{i}\ \underbrace{2xy}_{v(x,y)}$
$u, v$ jsou definované $\forall [x, y] \in \mathbb{R}^2 \iff f$ je definována $\forall z \in \mathbb{C}$.

### 1.2.4 Definice - rozšíření množiny komplexních čísel

Rozšíříme $\mathbb{C}$ o komplexní nekonečno $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, kde operace s nekonečnem se definují jako:

- $z \pm \infty = \infty \qquad \forall z \in \mathbb{C}$
- $z \cdot \infty = \infty \qquad \forall z \in \mathbb{C}^* \backslash \{0\}$
- $\frac{z}{\infty} = 0 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$
- $\frac{z}{0} = \infty \qquad \forall z \in \mathbb{C}^* \backslash \{0\}$

Nedefinujeme tyto neurčité výrazy: $\infty + \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$.

## 1.3 Limita a spojitost FKP

### 1.3.1 Definice - okolí bodu

Pro dané $\varepsilon > 0$ rozumíme $\varepsilon$-okolím bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ množinu

$$H_\varepsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \varepsilon\}$$
$$H_\varepsilon(\infty) = \{z \in \mathbb{C} : |z| > \varepsilon\}$$

### 1.3.2 Definice

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}^*$ je hromadný bod definičního oboru fce $f(z)$. Řekneme, že fce $f(z)$ má v bodě $z_0$ limitu rovnou $w \in \mathbb{C}^*$ a píšeme

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w$$

právě tehdy když

$$(\forall H(w))(\exists H(z_0)) : (\forall z \in H(z_0) \cap Dom(f) \backslash \{z_0\}) \implies f(z) \in H(w)$$

Ekvivalentně lze psát $(z \neq \infty \wedge w \neq \infty)$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : (\forall z \in \mathbb{C}, 0 < |z - z_0| < \delta) \implies |f(z) - w| < \varepsilon$$

a v případě, že $z_0 = \infty$, $w \in \mathbb{C}$

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : (\forall z \in \mathbb{C}, |z| > \delta) \implies |f(z) - w| < \varepsilon$$

Na další speciální případy ($z_0 \in \mathbb{C}$ a $w = \infty$; $z_0 = \infty$ a $w = \infty$) jistě přijde pozorný čtenář sám.

### 1.3.3 Definice

Speciální případ. Řekneme, že komplexní posloupnost $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ má limitu rovnou $a \in \mathbb{C}^*$ a píšeme

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$
$$\iff (\forall H(a))(\exists n_0 \in \mathbb{R}) : (\forall n \in \mathbb{N}, n > n_0) \implies a_n \in H(a)$$

### 1.3.4 Poznámka

Podobně jako v $\mathbb{R}$ platí v $\mathbb{C}$ věty o limitách součtu, rozdílu, součinu a podílu limit, pokud je příslušný součet, rozdíl, součin respektive podíl definován v $\mathbb{C}$. Narozdíl od $\mathbb{R}^*$ platí v $\mathbb{C}^*$:

$$z_n \to \infty \iff |z_n| \to +\infty \qquad \text{v } \mathbb{R} \text{ pouze } \implies$$
$$z_n \to 0 \iff \frac{1}{z_n} \to \infty \qquad \text{v } \mathbb{R} \text{ pouze } \impliedby$$

### 1.3.5 Definice

Řekneme, že funkce $f(z)$ je spojitá v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$, pokud je v $z_0$ definována a platí

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Funkce je spojitá na množině $M \subset \mathbb{C} \iff$ je spojitá v každém bodě $M$.

### 1.3.6 Věta

Funkce je spojitá v bodě $z_0 \in \mathbb{C} \iff$ její složky $u, v$ jsou spojité funkce v bodě $[x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$, kde $z_0 = x_0 + \mathrm{i}y_0$.

### 1.3.7 Příklad

$f(z) = \frac{1}{z} \qquad Dom(f) = \mathbb{C} \backslash \{0\}$

$$f(x + \mathrm{i}y) = \frac{1}{x + \mathrm{i}y} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - \mathrm{i}\frac{y}{x^2 + y^2}$$
$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \qquad v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$
$$x^2 + y^2 = 0 \iff [x, y] = [0, 0] \iff z = 0$$

$\forall [x, y] \neq [0, 0]$ jsou $u, v$ spojité.

### 1.3.8 Příklad

$\arg z \qquad \forall z \in \mathbb{C} \quad \arg z \in \mathbb{R} \in (-\pi, \pi\rangle$

$$\cos(\varphi) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad z = x + iy \qquad x, y \in \mathbb{R}$$

$$\arg z = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & y \geq 0 \\ -\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & y < 0 \end{cases}$$

$$u(x,y) = \begin{cases} \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & y \geq 0 \\ -\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, & y < 0 \end{cases}$$

$$v(x,y) = 0 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

- $x > 0, y = 0$
  $\lim_{[x,y]\to[x_0,0]} u(x,y) = 0$
- $x_0 < 0, y_0 = 0$
  $\lim_{[x,y]\to[x_0,0]} u(x,y) = \arccos(-1) = \pi$
- $y_0 > 0$
  $\lim_{[x,y]\to[x_0,0]} u(x,y) = -\pi$

$\implies$ Celkově limita neexistuje.
$\arg z$ je spojitá na $\mathbb{C}\backslash P_\theta$, kde $P_\theta = \{\alpha(\cos\theta + i\cos\theta) : \alpha \geq 0\}$. Na $P_\theta$ má $\arg z$ skok v reálné složce o velikosti $2\pi$.

### 1.3.9 Příklad

Funkce $f(z) = |z|$ je spojitá na $\mathbb{C}$.

## 1.4 Elementární funkce komplexní proměnné

### 1.4.1 Definice

$z \in \mathbb{C}$, definujeme

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

### 1.4.2 Věta

Za pomoci těchto definic můžeme získat Eulerův vzorec:

$$\begin{aligned} e^{\mathrm{i}z} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{i}^n z^n}{n!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{i} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z) \qquad \forall z \in \mathbb{C} \end{aligned} \tag{1.1}$$

$\implies$ každé $z \in \mathbb{C}$ lez psát v exponenciálním tvaru $z = |z|e^{\mathrm{i}\varphi}$, kde $\varphi \in \mathrm{Arg}(z)$

### 1.4.3 Poznámka

$$e^{\mathrm{i}z} = \cos(z) + \mathrm{i}\sin(z) \qquad e^{-\mathrm{i}z} = \cos(z) - \mathrm{i}\sin(z)$$

Sečtením těchto dvou rovností získáme:

$$\cos(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2} \qquad \cosh(z) = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}$$

Odečtením získáme:

$$\sin(z) = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}} \qquad \sinh(z) = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}$$

### 1.4.4 Věta

$\forall z, w \in \mathbb{C}: \quad e^{z+w} = e^z e^w$

*Důkaz:*

$$e^z e^w = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{w^k}{k!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}\frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \quad / \cdot \frac{n!}{n!}$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = e^{z+w}$$

### 1.4.5 Příklad - peridiciota exponenciály

$z = \underbrace{\mathrm{Re}\, z}_{x} + i\underbrace{\mathrm{Im}\, z}_{y}$
$e^z = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$
$\implies$ funkce $e^z, z \in \mathbb{C}$ je periodická, s periodou $2\pi\mathrm{i}$!

### 1.4.6 Příklad - komplexní logaritmus

Pro zadané $w \in \mathbb{C}$ řešte rovnici $e^z = w$
hledáme množinu $\mathrm{Ln}(w) = \{z \in \mathbb{C}, e^z = w\} = ?$
$w = |w|e^{\mathrm{i}\varphi}, \quad \varphi \in \mathrm{Arg}(w)$
$z$ hledáme ve tvaru $x + \mathrm{i}y, \quad x, y \in \mathbb{R}$
$e^z = e^x e^{\mathrm{i}y} = w$ na rovnici aplikuji absolutní hodnotu
$e^x = |w| \quad \implies \quad x = \ln|w|$
$y \in \mathrm{Arg}(w)$
$z = x + \mathrm{i}y \in \ln|w| + \mathrm{i}\ \mathrm{Arg}(w)$

$$\implies \mathrm{Ln}(w) = \ln|w| + \mathrm{i}\mathrm{Arg}(w)$$

Funkci $e^z$ nelze invertovat na $\mathbb{C}$, protože není na $\mathbb{C}$ prostá. V množině $\mathrm{Ln}(w)$ existuje právě jedno číslo $z$ takové, že $\mathrm{Im}\, z \in (-\pi, \pi\rangle$. Toto $z$ značíme $\ln(w)$ (přirozený logaritmus čísla $w$) a nazývá se hlavní hodnota logaritmu.

$$\ln(w) = \ln|w| + \mathrm{i}\arg(w)$$

### 1.4.7 Poznámka

Funkce $\ln(w)$ je definovaná $\forall w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$.

### 1.4.8 Poznámka

Rovnice $e^z = w$ má řešení nejen $\ln(w)$, ale i $z_k = \ln(w) + 2k\pi\mathrm{i}, \quad k \in \mathbb{Z}$

### 1.4.9 Poznámka

$\mathrm{Ln}(z \cdot w) = \mathrm{Ln}(z) + \mathrm{Ln}(w)$
$\ln(z \cdot w) = \ln(z) + \ln(w) + 2k\pi\mathrm{i}, \quad$ pro vhodně zvolené $k \in \{-1, 0, 1\}$.

### 1.4.10 Definice - obecná mocnina

$z^w := e^{w \ln z} \qquad \forall z, w \in \mathbb{C}, z \neq 0$

### 1.4.11 Příklad

$$\sqrt{\mathrm{i}} = e^{\frac{1}{2}\ln(\mathrm{i})} = e^{\frac{1}{2}(\ln|\mathrm{i}| + \mathrm{i}\arg(\mathrm{i}))} = e^{\frac{1}{2}(0+\mathrm{i}\frac{\pi}{2})} = e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

### 1.4.12 Poznámka

$$\sqrt[n]{z} = z^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln(z)}$$

je jednoznačně určená funkce, ale rovnice $z^n = w$ má pro dané $w \in \mathbb{C}/\{0\}$ celkem $n$ řešení v $\mathbb{C}$ ve tvaru

$$z_k = \sqrt[n]{w} \cdot e^{\frac{2k\pi}{n}\mathrm{i}} \quad k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$$

## 1.5 Derivace funkce komplexní proměnné

### 1.5.1 Definice

Nechť funkce $f(z)$ komplexní proměnné je definována na množině $M \subset \mathbb{C}$ a nechť je $z_0 \in M$ vnitřní bod $Dom(f)$. Existuje-li konečná limita

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \tag{1.2}$$

potom říkáme, že $f(z)$ je diferencovatelná v bodě $z_0$, tutu hodnotu značíme $f'(z_0)$ a nazýváme derivací funkce $f(z)$ v bodě $z_0$.

### 1.5.2 Definice - holomorfnost funkce

Pro komplexní funkci komplexní proměnné se běžně zavádí následující označení.

Pokud je $f(z)$ diferencovatelná v $z_0$ a na celém okolí $z_0$, pak říkáme, že $f(z)$ je **holomorfní** v $z_0$.

Pokud je $f(z)$ diferencovatelná v každém bodě otevřené množiny $M$, pak říkáme, že $f(z)$ je holomorfní na $M$.

Pokud je $f(z)$ diferencovatelná na okolí $\infty$, tj. $\forall z, |z| > R$, a při označení $w = \frac{1}{z}$, $g(w) = f(z)$ je funkce $g(w)$ holomorfní v 0. Pak říkáme, že $f(z)$ je holomorfní v $\infty$.

### 1.5.3 Poznámka

Pokud $f'(z_0)$ existuje, pak hodnota limity (1.2) nesmí záviset na způsobu, jakým se $z$ přibližuje k $z_0$. Diferencovatelnost v komplexních číslech je silnější požadavek než v číslech reálných a má zajímavé důsledky.

### 1.5.4 Příklad

Nechť $z_0 = x_0 + iy_0$

1. $z = x_0 + \Delta x + \mathrm{i}y_0 \qquad \Delta x \in \mathbb{R} \qquad$ přibližovanání $\leftrightarrow$
   $f(x + \mathrm{i}y) = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y) \qquad u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) + \mathrm{i}v(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0) - \mathrm{i}v(x_0, y_0)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \left( \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} - \mathrm{i}\frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x} \right) \\ &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = f'(z_0) \end{aligned}$$

2. $z = x_0 + i(y_0 + \Delta y) \qquad \Delta y \in \mathbb{R} \qquad$ přibližování $\updownarrow$

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) + \mathrm{i}v(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0) - \mathrm{i}v(x_0, y_0)}{\mathrm{i}\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \to 0} \left( \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)}{\Delta y} - \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{i}} \frac{v(x_0, y_0 + \Delta y) - v(x_0, y_0)}{\Delta y} \right) \\ &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = f'(z_0) \end{aligned}$$

Když je $f(z)$ diferencovatelná, tak 1. musí být stejná jako 2. $\implies$ musí se rovnat reálné i imaginární části:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \end{aligned} \tag{1.3}$$

Tyto dvě rovnosti se nazývají **Cauchy-Riemannovy podmínky** a jsou nutné pro existenci $f'(z_0)$.

### 1.5.5 Věta - Cauchy-Riemannova

Funkce $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ má v bodě $z_0 = (x_0 + \mathrm{i}y_0); x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ derivaci, tehdy a jen tehdy, mají-li funkce $u(x, y) = \mathrm{Re}\, f(x + \mathrm{i}y)$ a $v(x, y) = \mathrm{Im}\, f(x + \mathrm{i}y)$ totální diferenciál v bodě $[x_0, y_0]$ a platí-li Cauchy-Reimannovy podmínky (1.3).

### 1.5.6 Příklad

$f(z) = e^{x+\mathrm{i}y} = e^x(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y))$

$$\begin{aligned} u(x, y) &= e^x \cos(y) \\ v(x, y) &= e^x \sin(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) &= e^x \cos(y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) &= -e^x \sin(y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \end{aligned}$$

Parciální derivace jsou spojité a všechny existují $\implies$ funkce $f(z)$ má Totální diferenciál $\forall z \in \mathbb{C}$.

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + \mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = e^x \cos(y) + \mathrm{i} \cdot e^x \sin(y) = e^x(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)) = e^z$$

Funkce $f(z) = e^z$ je holomorfní.

### 1.5.7 Příklad

Vyřešíme diferencovatelnost funkce $f(z) = z|z|$

$$f(x,y) = (x+iy)\sqrt{x^2+y^2}$$

$$u(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2}$$

$$v(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + x\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + y\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Jsou definované a spojité $\forall [x,y] \in \mathbb{R}^2 \backslash \{[0,0]\}$. Cauchy-Reimannovy podmínky nejsou splněny všude kromě $x = 0, y = 0 \implies f'(z)$ existuje pouze pro $z = 0, f'(0) = 0$.

### 1.5.8 Věta

Nechť $f(z)$ a $g(z)$ jsou diferencovatelné v bodě $z \in \mathbb{C}$ a nechť $c \in \mathbb{C}$. Potom

$$\begin{aligned}
(f \pm g)'(z) &= f'(z) \pm g'(z) \\
(cf)'(z) &= cf'(z) \\
(f \cdot g)'(z) &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z) \\
\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)'(z) &= \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g^2(z)} \qquad \text{pokud } g(z) \neq 0
\end{aligned}$$

### 1.5.9 Věta - o vztahu diferencovatelnosti a spojitosti

Pokud je $f(z)$ diferencovatelná v bodě $z \in \mathbb{C}$, pak je v bodě $z$ také spojitá. Obrácené tvrzené neplatí.

### 1.5.10 Věta - o derivaci složené funkce

Je-li $g(z)$ diferencovatelná v $z_0 \in \mathbb{C}$ a $f(z)$ je diferencovatelná v bodě $g(z_0)$, potom $(f \circ g)(z)$ je diferencovatelná v bodě $z_0$ a platí

$$(f \circ g)'(z_0) = f'(g(z_0)) \cdot g'(z_0)$$

### 1.5.11 Věta - o derivaci inverzní funkce

Nechť $f(z)$ je holomorfní v oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}, f'(z) \neq 0, \forall z \in \Omega$. Je-li $f^{-1}(z)$ inverzní funkce k funkci $f(z)$ definovaná a spojitá na oblasti $\Omega' \subset f(\Omega)$. Potom $f^{-1}(z)$ je holomorfní na $\Omega'$ a platí

$$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))} \quad \forall z \in \Omega'$$

### 1.5.12 Příklad

$f(z) = \ln(z)$ – inverzní funkce k $g(z) = e^z$ definovaná na množině $M, \forall z \in \mathbb{C}$.

$$(\ln(z))' = (g^{-1})'(z) = \frac{1}{e^{\ln(z)}} = \frac{1}{z} \qquad \forall z \in \mathbb{C}\backslash P_\pi$$

$P_\pi$ je polopřímka od počátku ve směru záporné části reálné osy. Na $P_\pi$ je logaritmus nespojitý.

## 1.6 Integrál funkce komplexní proměnné

### 1.6.1 Definice - integrál komplexní funkce reálné proměnné

Pro funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definujeme:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \mathrm{Re}\, f(x)\mathrm{d}x + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}\, f(x)\mathrm{d}x$$

### 1.6.2 Definice - křivka

Křivkou v $\mathbb{C}$ rozumíme libovolné spojité zobrazení nějakého uzavřeného intervalu $\langle a, b\rangle$ do $\mathbb{C}$, tj. $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{C}$.

Křivku $\varphi$ nazveme **uzavřenou** pokud $\varphi(a) = \varphi(b)$

Křivku $\varphi$ nazveme **jednoduchou** pokud $\varphi$ je prosté na $\langle a, b\rangle$ (sama sebe neprotíná)

Křivku $\varphi$ nazveme **Jordanovou**, je-li $\varphi$ prosté na $\langle a, b)$ a $\varphi(a) = \varphi(b)$

Obor hodnot $\varphi$ značíme $\langle\varphi\rangle$ a nazýváme ho geometrický obraz křivky.

Řekneme, že křivka $\varphi$ je třídy $\mathcal{C}^1$ (hladká), pokud má v $(a, b)$ spojitou derivaci.

Řekneme, že křivka $\varphi$ je po částech hladká (po částech třídy $\mathcal{C}^1$), pokud ji lze rozložit na sjednocení konečně mnoha křivek třídy $\mathcal{C}^1$.

### 1.6.3 Definice - operace s křivkami

Součet křivek $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{C}$ a $\psi : \langle c, d\rangle \to \mathbb{C}$ lze definovat, pokud $\varphi(b) = \psi(c)$

$$(\varphi\dot{+}\psi)(t) : \langle a, d + b - c\rangle \to \mathbb{C} = \begin{cases} \varphi(t) & t \in \langle a, b\rangle \\ \psi(t - b + c) & t \in \langle b, d + b - c\rangle \end{cases}$$

Opačná křivka ke křivce $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{C}$ je křivka $\dot{-}\varphi : \langle -b, -a\rangle \to \mathbb{C}$, dána předpisem $\dot{-}\varphi(t) = \varphi(-t)$ pro $t \in \langle -b, -a\rangle$

### 1.6.4 Poznámka

Je-li $\varphi$ křivka po částech třídy $\mathcal{C}^1$ dána rovnicí $\varphi(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$ pro $t \in \langle a, b\rangle$, pak výraz

$$S_\varphi := \int_a^b |\varphi'(t)|\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\mathrm{d}t$$

představuje délku křivky $\varphi$. Dále platí:

$$S_{\varphi\dot{+}\psi} = S_\varphi + S_\psi \qquad S_{\dot{-}\varphi} = S_\varphi$$

### 1.6.5 Definice - křivkový integrál komplexní funkce komplexní proměnné

Nechť $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{C}$ je po částech hladká křivka v $\mathbb{C}$ a nechť funkce komplexní proměnné $f$ je spojitá na $\langle\varphi\rangle$. Potom klademe

$$\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z := \int_a^b f(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)\mathrm{d}t$$

### 1.6.6 Příklad

$\int_\varphi z^2 \mathrm{d}z \qquad \varphi$ úsečka spojující $z_1 = 0$ a $z_2 = 1 + i$
$\varphi(t) = (1 + i)t \quad t \in \langle 0, 1\rangle$
$\dot{\varphi}(t) = 1 + i$

$$\int_\varphi z^2 \mathrm{d}z = \int_0^1 ((1 + i)t)^2 (1 + i)\mathrm{d}t = (1 + i)^3 \int_0^1 t^2 \mathrm{d}t = \frac{(1 + i)^3}{3} = \frac{(2i - 2)}{3}$$

### 1.6.7 Příklad

Popisy jedné $\langle\varphi\rangle$ pomocí dvou $\varphi_{1,2}$

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= e^{it} \qquad t \in \langle 0, \pi\rangle \\ \varphi_2(t) &= \sqrt{1 - t^2} \qquad t \in \langle 0, \pi\rangle \end{aligned}$$

### 1.6.8 Poznámka

V reálné analýze platí

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$$

ale v $\mathbb{C}$ toto neplatí.

### 1.6.9 Věta

Nechť $\varphi$ je křivka po částech třídy $\mathcal{C}^1$ konečné délky $S_\varphi$ a nechť funkce $f$ je spojitá a omezená na $\langle\varphi\rangle$. Potom

$$\left|\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z\right| \leq S_\varphi \cdot \max_{z\in\langle\varphi\rangle} |f(z)|$$

*Důkaz:*

$$\left|\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z\right| = \left|\int_a^b f(\varphi(t))\dot{\varphi}(t)\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b \underbrace{|f(\varphi(t))|}_{\text{omezená na } \langle\varphi\rangle} |\dot{\varphi}(t)|\mathrm{d}t \leq \max_{z\in\langle\varphi\rangle} |f(z)| \int_a^b |\dot{\varphi}(t)|\mathrm{d}t$$

$$\leq S_\varphi \cdot \max_{z\in\langle\varphi\rangle} |f(z)|$$

### 1.6.10 Věta

Jsou-li $\varphi$ a $\psi$ po částech hladké křivky v $\mathbb{C}$ a $f$ a $g$ funkce komplexní proměnné spojité na $\langle\varphi\rangle$, respektive $\langle\psi\rangle$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, potom platí:

- linearita $\int_\varphi [\alpha f(z) + \beta g(z)]\mathrm{d}z = \alpha \int_\varphi f(z)\mathrm{d}z + \beta \int_\varphi g(z)\mathrm{d}z$
- aditivita v mezích $\int_{\varphi\dot{+}\psi} f(z)\mathrm{d}z = \int_\varphi f(z)\mathrm{d}z + \int_\psi f(z)\mathrm{d}z$
- $\int_{\dot{-}\varphi} f(z)\mathrm{d}z = -\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z$

### 1.6.11 Primitivní funkce

Nechť $f$ a $F$ jsou funkce komplexní proměnné takové, že $F'(z) = f(z)\ \forall z \in \Omega$ ($\Omega$ otevřená podmnožina v $\mathbb{C}$). Pak říkáme, že $F$ je primitivní funkce k $f$ na $\Omega$.

### 1.6.12 Věta

Jsou-li $F$ a $G$ primitivní funkce k funkcím $f$ a $g$ na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$ a jsou-li $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, pak $\alpha F + \beta G$ jsou primitivni fuknce k $\alpha f + \beta g$ na $\Omega$.

Je-li $F$ primitivní funkce k $f$ na $\Omega \in \mathbb{C}$ a je-li $C \in \mathbb{C}$ libovolná konstanta, potom je $F+C$ primitivní funkce k $f$ na $\Omega$.

Jsou-li $F$ a $G$ primitivní funkce k $f$ a $g$ na $\Omega \subset \mathbb{C}$ a je-li $H$ primitivní funkce k $fG$ na $\Omega$, potom funkce $FG - H$ je primitivní funkce k $Fg$ na $\Omega$.

$\varphi$ je po částech hladká křivka, $F$ je primitivní funkce k $f$ na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$, která obsahuje $\langle\varphi\rangle$. Vyšetřujeme

$$\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(\varphi(t))(\dot{\varphi}(t))\mathrm{d}t = \int_a^b \underbrace{F'(\varphi(t))}_{\frac{d}{\mathrm{d}t}(F(\varphi(t))} \mathrm{d}t = [F(\varphi(t))]_a^b = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$$

### 1.6.13 Důsledky

Má-li $f$ v oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$ primitivní funkci, potom:

1. $\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z = 0$ pro každou uzavřenou křivku $\varphi$, pro kterou $\langle\varphi\rangle \subset \Omega$
2. $\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z$ nezávisí na integrační cestě $\varphi$ v $\Omega$, ale pouze na počátečním a koncovém bodu křivky, tj.:
$$\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z = \int_\psi f(z)\mathrm{d}z$$
kde $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{C}$ $\psi : \langle c, d\rangle \to \mathbb{C}$
$\varphi(a) = \psi(c)$ $\varphi(b) = \psi(d)$
$\langle\varphi\rangle \subset \Omega, \langle\psi\rangle \subset \Omega$

### 1.6.14 Příklad

Vypočtěte: $\int_\varphi (z - z_0)^n \mathrm{d}z \qquad n \in \mathbb{Z}$
$\varphi$ je kladně orientovaná kružnice se středem $z_0$ a poloměrem $R > 0$
$\varphi(t) = z_0 + Re^{\mathrm{i}t} \qquad t \in \langle 0, 2\pi\rangle$
$\dot{\varphi}(t) = \mathrm{i}Re^{\mathrm{i}t}$

$$\int_\varphi (z - z_0)^n \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} (Re^{\mathrm{i}t})^n R\mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \mathrm{i}R^{n+1}e^{\mathrm{i}(n+1)t}\mathrm{d}t = I$$

- $n \neq -1 \quad I = R^{n+1}\mathrm{i}\left[\frac{e^{\mathrm{i}(n+1)t}}{\mathrm{i}(n+1)}\right]_0^{2\pi} = \frac{\mathrm{i}R^{n+1}}{\mathrm{i}(n+1)}\left(e^{2\pi\mathrm{i}(n+1)} - e^0\right) = 0$
- $n = -1 \quad I = \int_\varphi \frac{1}{z-z_0}\mathrm{d}z = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} e^{0\cdot t}\mathrm{d}t = \mathrm{i}\int_0^{2\pi} 1\mathrm{d}t = 2\pi\mathrm{i}$

Tento výsledek není v rozporu s předchozí větou $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ má primitivní funkci $F(z) = \ln(z - z_0)$. $F'(z) = f(z)$ platí $\forall z \in \mathbb{C}\backslash P_\pi$. Hodnota skoku $f$ na $P_\pi$ je právě $2\pi\mathrm{i}$.

### 1.6.15 Poznámka

Libovolná Jordanova křivka (uzavřená a jednoduchá v $\mathbb{C}$) rozděluje $\mathbb{C}$ na 2 komponenty z nichž právě jedna je omezená – Int$\varphi$, tzv. "vnitřek křivky". Druhá je neomezená – Ext$\varphi$, tzv. "vnějšek křivky".

### 1.6.16 Věta - Cauchyho

Nechť $f$ je holomorfní na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$ a nechť $\varphi$ je po částech hladká Jordanova křivka taková, že $\overline{\mathrm{Int}\varphi} \subset \Omega$. Potom

$$\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z = 0$$

*Důkaz:* $z = x + \mathrm{i}y \qquad x, y \in \mathbb{R} \qquad f(x+\mathrm{i}y) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$
$\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{C}$
$\varphi(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$
$\dot\varphi(t) = \dot x(t) + \mathrm{i}\dot y(t)$

$$\begin{aligned}
\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z &= \int_a^b f(\varphi(t))(\dot\varphi)(t)\mathrm{d}t = \int_a^b [u(x(t),y(t)) + \mathrm{i}v(x(t),y(t))][\dot x(t) + \mathrm{i}\dot y(t)]\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b u(x(t),y(t))\dot x(t) - v(x(t),y(t))\dot y(t)\mathrm{d}t \\
&+ \mathrm{i}\int_a^b u(x(t),y(t))\dot y(t) + v(x(t),y(t))\dot x(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_\varphi u\mathrm{d}x - v dy + \mathrm{i}\int_\varphi u dy + v\mathrm{d}x \\
&\underbrace{=}_{Green} \int_{\overline{Int\varphi}} \underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right]}_{=0} \mathrm{d}x\,dy + \mathrm{i}\int_{\overline{Int\varphi}} \underbrace{\left[\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right]}_{=0} \mathrm{d}x\,dy = 0
\end{aligned}$$

Hranaté závorky jsou nulové díky platnosti Cauchy-Riemannových podmínek.

### 1.6.17 Důsledek

Nechť $\varphi$ a $\psi$ jsou stejně orientované, po částech hladké Jordanovy křivky takové, že $\langle\varphi\rangle \subset \mathrm{Int}\psi$ a nechť funkce $f$ je holomorfní na oblasti $\Omega$ obsahující $\overline{\mathrm{Int}\psi} \setminus \mathrm{Int}\varphi$. Potom

$$\int_\varphi f(z)\mathrm{d}z = \int_\psi f(z)\mathrm{d}z$$

### 1.6.18 Poznámka

Body, v nichž funkce $f$ není holomorfní nazveme **singulární**. Věta říká, že integrál z $f$ se nezmění pokud křivky $\varphi$ a $\psi$ mají stejnou orientaci a obě obíhají stejné singulární body.

### 1.6.19 Definice - index bodu

Nechť $\varphi$ je po částech hladká, uzavřená křivka (ne nutně Jordanova) a $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \langle\varphi\rangle$. Index bodu $z_0$ vzhledem ke křivce $\varphi$ je definován jako

$$\mathrm{ind}_\varphi z_0 = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}$$

### 1.6.20 Poznámka - vlastnosti $\mathrm{ind}_\varphi z_0$

Nechť $\varphi$ je Jordanova křivka. Funkce $f(z) = \frac{1}{z-z_0}$ je holomorfní $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.

- $z_0 \in \mathrm{Ext}\varphi \Rightarrow \mathrm{ind}_\varphi z_0 = 0$ z Cauchyho věty.
- $z_0 \in \mathrm{Int}\varphi \Rightarrow \mathrm{ind}_\varphi z_0 = \frac{1}{2\pi i} \underbrace{\int_\psi \frac{\mathrm{d}z}{z - z_0}}_{2\pi\mathrm{i}} = 1$, kde $\psi$ je dost malá kladně orientovaná kružnice se středem v $z_0$ a poloměrem takovým, že $\langle\psi\rangle \subset \mathrm{Int}\varphi$.

- pokud $z_0 \in \mathrm{Int}\varphi$ a $\varphi$ je záporně orientovaná, pak

$$\mathrm{ind}_\varphi z_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\psi \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0} = -1$$

  kde $\psi$ je záporně orientovaná kružnice se středem $z_0$ a poloměrem $R>0$ dost malým, aby křivka $\langle\psi\rangle \subset \mathrm{Int}\varphi$.

- pokud je $\varphi$ uzavřená, ale ne Jordanova $\mathrm{ind}_\varphi z_0 \in \mathbb{Z}$ udává počet oběhů daného bodu křivkou $\varphi$. Oběhy v kladném smyslu se přičítají, v záporném odečítají.

### 1.6.21 Věta - Cauchyho integrální vzorec

Nechť $\varphi$ je po částech hladká Jordanova křivka a nechť $f$ je holomorfní na obslati $\Omega \supset \overline{\mathrm{Int}\varphi}$. Potom $\forall z_0 \in \mathrm{Int}\varphi$ platí

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}\cdot \mathrm{ind}_\varphi z_0}\int_\varphi \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-z_0}$$

Hodnoty holomorfní funkce uvnitř $\mathrm{Int}\varphi$ jsou jednoznačně určeny hodnotami $f$ na $\langle\varphi\rangle$.[1]

*Důkaz:*

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}\cdot \mathrm{ind}_\varphi z_0}\int_\varphi \frac{f(z)\mathrm{d}z}{z-z_0} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}\cdot \mathrm{ind}_\varphi z_0}\left[\underbrace{\int_\varphi \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z}_{I_1} + \int_\varphi \frac{f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z\right]$$

Křivka $\psi\ldots$ malá kružnice se středem $z_0$ s poloměrem $R>0$. $\langle\psi\rangle \subset \mathrm{Int}\varphi$, stejně orientovaná jako $\varphi$.

$$I_1 = \int_\psi \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z$$

$$|I_1| = \left|\int_\psi \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\mathrm{d}z\right| \le 2\pi R\cdot \max_{z\in\langle\psi\rangle} \underbrace{\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|}_{\text{spojitá fce na } \langle\psi\rangle}$$

pro $R\to 0 \quad \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \longmapsto f'(z_0)$
pro $R \in H_0^+$ lze hodnoty $\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|$ odhadnout shora pomocí konstanty $M>0$

$$|I_1| \le 2\pi RM \qquad |\lim_{R\to 0}$$

$$|I_1| = 0 \Rightarrow I_1 = 0$$

$$\frac{(\mathrm{ind}_\varphi z_0)^{-1}}{2\pi\mathrm{i}}\int_\varphi \frac{f(z)}{z-z_0}\mathrm{d}z = 0 + \frac{f(z_0)}{\mathrm{ind}_\varphi z_0}\underbrace{\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\varphi \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}}_{\mathrm{ind}_\varphi z_0} = f(z_0)$$

### 1.6.22 Věta - o rozvoji holomorfní funkce v mocninou řadu

Nechť $f$ je holomorfní v kruhu $B(z_0,R)$, kde $R>0$. Potom $\forall z \in B(z_0,R)$ platí

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z-z_0)^n$$

$$\text{kde } a_n = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_\varphi \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\mathrm{d}\xi$$

a $\varphi$ je kladně orientovaná po částech hladká Jordanova křivka taková, že $\langle\varphi\rangle \subset B(z_0,R)$ a $z_0 \in \mathrm{Int}\varphi$.

[1] Například v elektrostatice u potenciálu. Hodnoty potenciálu na povrchu tělesa určují hodnoty potenciálu uvnitř tělesa.

### 1.6.23 Důsledek - Cauchyho integrální vzorec pro derivace

Nechť $f$ je holomorfní na oblasti $\Omega \in \mathbb{C}$ a nechť $\varphi$ je po částech hladká Jordanova křivka taková, že $\overline{\mathrm{Int}\varphi} \subset \Omega$. Potom $f$ má v každém bodě $z_0 \in \Omega$ derivace všech řádů a platí

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i} \mathrm{ind}_\varphi(z_0)} \int_\varphi \frac{f(\xi)\mathrm{d}\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

*Důkaz:*

- $\varphi$ kladně orientovaná
- z Taylorovy věty

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i} \mathrm{ind}_\varphi(z_0)} \int_\varphi \frac{f(\xi)\mathrm{d}\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}}$$

### 1.6.24 Příklad

$\mathrm{I} = \int_\varphi \frac{\sin(z)}{(z-\mathrm{i})^2}\mathrm{d}z$
$f(z) = \sin(z) \quad f'(z) = \cos(z) \quad z_0 = \mathrm{i}$
$\varphi$ je nějaká uzavřená křivka neprocházející bodem i.
$\mathrm{I} = 2\pi\mathrm{i} \cdot \mathrm{ind}_\varphi(z_0) \frac{1}{1!} f'(\mathrm{i}) = 2\pi\mathrm{i} \cdot \mathrm{ind}_\varphi(\mathrm{i}) \cos(\mathrm{i})$