1. Absolutně spojitá rozdělení

Definice 1. Náhodná veličina X má **absolutně spojité rozdělení** (dále jen **ASR**), pokud existuje $f_X : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ tak, že

$$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)\,\mathrm{d}t.$$

Funkci f_X nazýváme **hustota pravděpodobnosti**.

Definice 2. Náhodné veličiny $(X_1, \ldots, X_n) = \mathbf{X}$ mají **sdružené absolutně spojité rozdělení** (**SASR**), pokud existuje

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \cdots \int\limits_{-\infty}^{x_n} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})\,\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2 \cdots \mathrm{d}t_1.$$

Funkce $f_{\mathbf{X}}$ je **sdružená hustota pro X**.

Poznámka. (1) Někde se místo pojmu „absolutní spojitost“ používá pouze „spojitost“.

(2) Funkce F je absolutně spojitá, právě když existuje funkce f definovaná skoro všude tak, že

$$F = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)$$

a $F'_X(x_0) = f_X(x_0)$

Definice 3. Funkce F je absolutně spojitá na (a, b), právě když pro každé ε existuje δ tak, že $\forall\{(a_i, b_i) \subset (a, b)\}$

$$\sum_{i=1}^{n} |b_i - a_i| < \delta \implies \sum_{i=1}^{\infty} |F(b_i) - F(a_i)| < \varepsilon.$$

(3) Je-li F riemannovsky integrabilní a spojitá v x_0, pak $F'(x_0) = f(x_0)$.

Věta 4. Je-li funkce $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ riemannovsky integrabilní a spojitá v $\mathbf{x}_0$, pak

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}.$$

Věta 5 (Lebesgueova pro distribuční funkce)**.** Libovolnou distribuční funkci lze zapsat jako

$$F(x) = F_1(x) + K(x) + S(x),$$

kde F_1 je absolutně spojitá, K je s nejvýše spočetně skoky, S je spojitá a rostoucí pouze na množině míry 0.

Poznámka. Vlastnosti distribuční funkce:

(1) $f_{\mathbf{X}} \geq 0$ skoro všude.

(2)

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f_{\mathbf{X}}(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

(3)

$$P(a < \mathbf{X} \leq b) = \int\limits_{a}^{b} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. (1) Vyplývá z monotonie F_X.

(2)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_X = \lim_{x\to\infty} \int\limits_{-\infty}^{x} f_X = \lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$$

(3)

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f - \int_{-\infty}^{a} f$$

$$\begin{aligned}
&P(a_1 < X \leq b_1, a_2 < Y \leq b_2) = \\
&= F_{X,Y}(b_1, b_2) - F_{X,Y}(a_1, b_2) - F_{X,Y}(b_1, a_2) + F_{X,Y}(a_1, a_2) = \\
&= \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} f_X(u, v) \, \mathrm{d}u \mathrm{d}v
\end{aligned}$$

□

Věta 6. Nechť (X_1, X_2, X_3) mají SASR. Pak (X_1, X_3) mají SASR a platí

$$f_{X_1,X_3}(x_1, x_3) = \int_{-\infty}^{-\infty} f_{X_1,X_2,X_3}(x_1, x_2, x_3) \, \mathrm{d}x_2.$$

Důkaz.

$$\begin{aligned}
F_{X_1,X_3}(x_1, x_3) &= \lim_{x_2 \to +\infty} F(x_1, x_2, x_3) = \\
&= \lim_{x_2 \to +\infty} \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \int_{-\infty}^{x_3} f_{X_1,X_2,X_3}(t_1, t_2, t_3) \, \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \mathrm{d}t_3 = \\
&= \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_3} \left(\lim_{x_2 \to +\infty} \int_{-\infty}^{x_2} f_{X_1,X_2,X_3}(t_1, t_2, t_3) \, \mathrm{d}t_2 \right) \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_3,
\end{aligned}$$

tedy

$$f_{X_1,X_3}(x_1, x_3) = \int_{-\infty}^{-\infty} f_{X_1,X_2,X_3}(x_1, x_2, x_3).$$

□

Věta 7. Nechť náhodné veličiny $(X_1, \dots, X_n)$ mají SASR. Pak $(X_1, \dots, X_n)$ jsou nezávislé, právě když

$$f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(\alpha_i).$$

Důkaz. (1) $(\Leftarrow)$

$$\begin{aligned}
F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) &= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_{\mathbf{X}} = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(t_i) \, \mathrm{d}t_i = \\
&= \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{x_i} f_{X_i}(t_i) \, \mathrm{d}t_i = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i).
\end{aligned}$$

(2) $(\Rightarrow)$

$$F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} F_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \int_{-\infty}^{x_i} f_{X_i}(t_i) \, \mathrm{d}t_i = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(t_i) \, \mathrm{d}t_i.$$

□

Definice 8. Buďte X, Y náhodné veličiny, $y_0 \in \operatorname{Ran} Y$. Podmíněná distribuční funkce náhodné veličiny X za podmínky $Y = y_0$ je funkce $F_{X|Y} : \mathbb{R} \mapsto [0,1]$ definovaná předpisem

$$F_{X|Y}(x|y_0) = \lim_{\varepsilon \to 0+} P(\{X \leq x\} | \{y_0 - \varepsilon < Y \leq y_0 + \varepsilon\}).$$

Definice 9. Podmíněná hustota pravděpodobnosti za $Y = y_0$ je taková funkce $f_{X|Y}$, že platí

$$F_{X|Y}(x|y_0) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(t|y_0)\,\mathrm{d}t.$$

Lemma 10. Nechť X má ASR a f_X je spojitá v $x_0 \in \mathbb{R}$. Pak

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\varepsilon} \int\limits_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} f_X(t)\,\mathrm{d}t = f_X(x_0).$$

Důkaz.

$$\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\varepsilon}(F_X(x_0+\varepsilon) - F_X(x_0-\varepsilon) + F_X(x_0) - F_X(x_0)) =$$

$$= \frac{1}{2}({F_x}'_+(x_0) + {F_x}'_-(x_0)) = f_X(x_0).$$

□

Věta 11. Nechť X, Y jsou náhodné veličiny se SASR. Nechť $y_0 \in \mathbb{R}$ takové, že

(1) $f_{X,Y}$ je spojitá v y_0 pro skoro všechna $x \in \mathbb{R}$,
(2) $f_Y(y)$ je spojitá v y_0 a $f_Y(y_0) > 0$.

Pak

$$f_{X|Y}(x|y_0) = \frac{f_{X,Y}(x, y_0)}{f_Y(y_0)}$$

pro skoro každé $x \in \mathbb{R}$.

Důkaz.

$$\begin{aligned}
F_{X|Y}(x|y_0) &= \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{P(\{X \leq x\} \cap \{y_0 - \varepsilon < Y \leq y_0 + \varepsilon\})}{P(y_0 - \varepsilon < Y \leq y_0 + \varepsilon)} = \\
&= \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{\int_{-\infty}^{x} \mathrm{d}t \int_{y_0-\varepsilon}^{y_0+\varepsilon} \mathrm{d}y f_{X,Y}(t,y)}{\int_{y_0-\varepsilon}^{y_0+\varepsilon} f_Y(y)\,\mathrm{d}y} = \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{x} \lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{-y_0-\varepsilon}^{y_0+\varepsilon} f_{X,Y}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}t}{\lim_{\varepsilon \to 0+} \frac{1}{2\varepsilon} \int_{y_0-\varepsilon}^{y_0+\varepsilon} f_Y(y)\,\mathrm{d}y} = \\
&= \frac{\int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(t, y_0)\,\mathrm{d}t}{f_Y(y_0)} = \int\limits_{-\infty}^{x} \frac{f_{X,Y}(t,y_0)}{f_Y(y_0)}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

□