1. Numerické řešení okrajových úloh pro PDE 1. řádu

1.1. **Zákony zachování.** Připomeňme úvahu známou z fyziky. Podobně jako ve fyzice budeme předpokládat, že jsme oprávněni provádět úpravy, které použijeme. Uvažme jednorozměrné proudění stlačitelné tekutiny ve směru osy x. Přírůstek množství tekutiny v prostoru mezi libovolnými dvěma body x_1, x_2 v libovolném čase t je dán

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{x_1}^{x_2} \varrho(t,\,x)\,\mathrm{d}x = (\varrho v)(t,\,x_1) - (\varrho v)(t,\,x_2)$$

(předpokládáme, že $x_1 < x_2$). Integrací předchozí rovnosti od t_1 do t_2 dostaneme *zákon zachování hmotnosti v integrálním tvaru*

$$\int_{x_1}^{x_2} \varrho(t_2,\,x)\,\mathrm{d}x - \int_{x_1}^{x_2} \varrho(t_1,\,x)\,\mathrm{d}x = \int_{t_1}^{t_2} (\varrho v)(t,\,x_1)\,\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} (\varrho v)(t,\,x_2)\,\mathrm{d}t.$$

Jiné možné vyjádření dostaneme, jestliže zaměníme derivaci a integrál:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial t}\varrho(t,\,x)\,\mathrm{d}x = -\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}(\varrho v)(t,\,x)\,\mathrm{d}x.$$

Protože tento vztah platí pro všechna x_1, x_2, musí platit

$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho(t,\,x) + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho v)(t,\,x) = 0 \tag{1}$$

pro skoro všechna x. To je *zákon zachování hmotnosti v diferenciálním tvaru.* Další zákony zachování platí pro hybnost a energii, označíme-li tlak p a celkovou hustotu energie E, mají diferenciální tvar

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho v)(t,\,x) + \frac{\partial}{\partial x}(\varrho v^2 + p)(t,\,x) = 0 \tag{2a}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}(t,\,x) + \frac{\partial}{\partial x}(v[E+p])(t,\,x) = 0 \tag{2b}$$

Systém (1),(2) nazýváme Eulerovými rovnicemi pro pohyb stlačitelné tekutinu. Pokud zavedeme vektory

$$\boldsymbol{U} = (\varrho, \varrho v, E) \qquad , \qquad \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}) = (\varrho v, \varrho v^2 + p, v(E+p))$$

Můžeme zákony zachování zapsat elegantně v diferenciálním tvaru

$$\frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})\right) = \mathbf{0}. \tag{3}$$

popř. v integrálním tvaru

$$\int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{U}(t_2,\,x)\,\mathrm{d}x - \int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{U}(t_1,\,x)\,\mathrm{d}x = \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}(t,\,x_1))\,\mathrm{d}t - \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}(t,\,x_2))\,\mathrm{d}t.$$

Veličina $\boldsymbol{F}$ se nazývá *tok*. Zabývejme se dále úlohou (3).

Příklad 1.1. Zvolíme-li v jednorozměrném případě $F(u) = \frac{1}{2}u^2$, dostaneme *Burgersovu rovnici*

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Nyní odvodíme slabou formulaci úlohy (3). Vynásobme (3) skalárně zobrazením $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^1((t_1,\,t_2) \times \mathbf{R})$ a vzniklou rovnost integrujme přes $\langle t_1,\,t_2\rangle \times \langle x_1,\,x_2\rangle$. Dostaneme

$$\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t}\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})\right)\boldsymbol{\varphi}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}t = \mathbf{0}. \tag{4}$$

Je

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \boldsymbol{U}}{\partial t} \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}t = [\boldsymbol{U}\boldsymbol{\varphi}]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{U} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} \, \mathrm{d}t$$

a podobně

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})\right) \boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}x = [\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{\varphi}]_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}) \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x} \, \mathrm{d}x.$$

Můžeme tedy (4) přepsat jako

$$\left[\int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{U}\boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}x\right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{U} \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t + \left[\int_{t_1}^{t_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})\boldsymbol{\varphi} \, \mathrm{d}t\right]_{x_1}^{x_2} - \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}) \frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \mathbf{0}.$$

Za předpokladu, že $\boldsymbol{\varphi}(t_2, x) = \mathbf{0}$ pro všechna x a že $\boldsymbol{\varphi}(t, x) = \mathbf{0}$ pro $|x| \to +\infty$, odtud pro v absolutní hodnotě dost velká x_1, x_2 dostaneme

$$-\int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{U}(t_1, x)\boldsymbol{\varphi}(t_1, x) \, \mathrm{d}x - \int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} \left(\boldsymbol{U}\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial t} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{U})\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}}{\partial x}\right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}t = \mathbf{0}.$$

Slabým řešením úlohy (3) nazýváme zobrazení $\boldsymbol{U}$, které splňuje předchozí vztah pro každé zobrazení $\boldsymbol{\varphi} \in \mathcal{C}^1((t_1, t_2) \times \mathbf{R})$ s danými vlastnostmi.

1.2. **Numerické metody pro nalezení slabého řešení.** V celém odstavci bude τ, resp. h značit časový, resp. prostorový krok; U_j^k pak bude značit $\boldsymbol{U}(k\tau, jh)$.

1.2.1. *Laxovo-Friedrichsovo schéma.*

$$U_j^{k+1} = U_j^k - \frac{\tau}{h}\left[\boldsymbol{F}_{\mathrm{num}}(U_j^k, U_{j+1}^k) - \boldsymbol{F}_{\mathrm{num}}(U_{j-1}^k, U_j^k)\right],$$

kde

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{num}}(\boldsymbol{U}, \boldsymbol{V}) = \frac{h}{2\tau}(\boldsymbol{U} - \boldsymbol{V}) + \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{U}) + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{V})\right)$$

je tzv. *numerický tok*.

1.2.2. *Laxovo-Wendroffovo schéma.*

$$U_{j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(U_j^k + U_{j+1}^k) - \frac{\tau}{2h}\left[\boldsymbol{F}(U_{j+1}^k) - \boldsymbol{F}(U_j^k)\right],$$

$$U_j^{k+1} = U_j^k - \frac{\tau}{h}\left[\boldsymbol{F}(U_{j+\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}}) - \boldsymbol{F}(U_{j-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}})\right].$$

1.2.3. *MacCormackovo schéma.*

$$U_j^{k+1} = \frac{1}{2}(U_j^k + U_j^*) - \frac{\tau}{2h}\left[\boldsymbol{F}(U_j^*) - \boldsymbol{F}(U_{j-1}^*)\right],$$

kde

$$U_j^* = U_j^k - \frac{\tau}{h}\left[\boldsymbol{F}(U_{j+1}^k) - \boldsymbol{F}(U_j^k)\right].$$

1.2.4. *Podmínka stability.* Podmínka stability všech tří schémat je

$$\frac{\tau}{h} \le \frac{1}{\sigma(\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{U}))},$$

kde σ značí spektrální poloměr.