# 1. Numerické řešení okrajových úloh pro PDE eliptického typu

Buď $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ omezená oblast, jejíž hranicí je nadplocha $\Gamma$ po částech třídy $\mathcal{C}^1$. Zabývejme se lineární parciální diferenciální rovnicí 2. řádu

$$-\operatorname{div}(\mathbf{A}(x)\nabla y) + q(x)y = f(x) \quad \text{v } \Omega \tag{1}$$

společně s okrajovou podmínkou

$$\alpha(x)\frac{\partial y}{\partial \vec{n}} + \beta(x)y = \gamma(x) \quad \text{na } \Gamma. \tag{2}$$

Symbol $\frac{\partial y}{\partial \vec{n}}$ značí derivaci ve směru tzv. *konormály* $\vec{n} = \mathbf{A}^\mathsf{T}\vec{\nu}$, kde $\mathbf{A}^\mathsf{T}$ značí transponovanou matici $\mathbf{A}$ a $\vec{\nu}$ je směrový vektor vnější normály k nadploše $\Gamma$.

Předpokládáme, že platí $q \geq 0$ a že existuje $p_0 > 0$ tak, že

$$\left(\mathbf{A}\vec{\xi}, \vec{\xi}\right) \geq p_0\|\vec{\xi}\|^2 \quad \text{na}\Omega, \quad \forall\vec{\xi} \in \mathbf{R}^n.$$

*Poznámka* 1.1. Jsou-li $\alpha$, $\beta \geq 0$ a navíc $\alpha + \beta > 0$ a jsou-li funkce $\mathbf{A}$, $q$, $f$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ dost hladké, je úloha jednoznačně řešitelná.

1.1. **Metoda sítí.** Omezíme se na obdélníkovou oblast v $\mathbf{R}^2$, tj. bez újmy na obecnosti oblast tvaru $\Omega = (0, L_1) \times (0, L_2)$. Buďte $m_1$, $m_2 \in \mathbf{N}$ a položme

$$h_1 = \frac{L_1}{m_1}, \quad h_2 = \frac{L_2}{m_2}.$$

Na $\overline{\Omega}$ položíme síť

$$\overline{\omega}_h = \{[ih_j, jh_2] \,|\, i = 0, \ldots, m_1;\, j = 0, \ldots, m_2\}.$$

Množina vnitřních bodů sítě je

$$\omega_h = \{[ih_j, jh_2] \,|\, i = 1, \ldots, m_1 - 1;\, j = 1, \ldots, m_2 - 1\}$$

a množina hraničních uzlů

$$\gamma_h = \overline{\omega}_h - \omega_h.$$

Zabývejme se nyní úlohou

$$-\frac{\partial}{\partial x_1}\left(p(x)\frac{\partial y}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(p(x)\frac{\partial y}{\partial x_2}\right) + q(x)y = f(x) \quad \text{na } \Omega, \tag{3a}$$

$$y = \gamma_0 \quad \text{na } \Gamma, \tag{3b}$$

kde $\gamma_0 \in \mathbf{R}$.

*Poznámka* 1.2. Hodnoty funkcí v síťových uzlech značíme $y_{ij} = y(ih_1, jh_2)$, $i \in \widehat{m_1}_0$, $j \in \widehat{m_2}_0$. Parciální derivace funkcí aproximujeme pomocí diferencí

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x_1}\right)_{ij} \approx y_{\bar{x}_1} = \frac{y_{ij} - y_{i-1j}}{h_1}, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial x_2}\right)_{ij} \approx y_{\bar{x}_2} = \frac{y_{ij} - y_{ij-1}}{h_2}.$$

Přesnost je v obou případech řádu $O(h_1 + h_2)$.

Úlohu (3) nahradíme diferenčním schématem

$$-(pu_{\bar{x}_1})_{x_1} - (pu_{\bar{x}_2})_{x_2} + qu = f \quad \text{na } \omega_h, \tag{4a}$$

$$u = \gamma_0 \quad \text{na } \gamma_h. \tag{4b}$$

*Poznámka* 1.3 (5bodové schéma). V celé této poznámce bude index $i$, resp. $j$ probíhat množinu $\widehat{m_1 - 1}$, resp. $\widehat{m_2 - 1}$. Podle předchozí poznámky můžeme rozepsat rovnici (4a) jako

$$-\frac{1}{h_1}\left(p_{i+1j}\frac{u_{i+1j} - u_{ij}}{h_1} - p_{ij}\frac{u_{ij} - u_{i-1j}}{h_1}\right) - \\ -\frac{1}{h_2}\left(p_{ij+1}\frac{u_{ij+1} - u_{ij}}{h_2} - p_{ij}\frac{u_{ij} - u_{ij-1}}{h_2}\right) + q_{ij}u_{ij} = f_{ij}$$

neboli

$$A_{ij}u_{i-1j} + B_{ij}u_{ij-1} + C_{ij}u_{i+1j} + D_{ij}u_{ij+1} + E_{ij}u_{ij} = F_{ij},$$

kde

$$A_{ij} = -\frac{p_{ij}}{h_1^2}, \quad B_{ij} = -\frac{p_{ij}}{h_2^2}, \quad C_{ij} = -\frac{p_{i+1j}}{h_1^2}, \quad D_{ij} = -\frac{p_{ij+1}}{h_2^2},$$
$$E_{ij} = \frac{p_{i+1j}}{h_1^2} + \frac{p_{ij}}{h_1^2} + \frac{p_{ij}}{h_2^2} + \frac{p_{ij+1}}{h_2^2} + q_{ij}, \quad F_{ij} = f_{ij}.$$

Tuto soustavu lze řešit např. zobecněnou faktorizací.

1.2. **Konvergence, odhad chyby.** Restrikci funkce $y : \overline{\Omega} \to \mathbf{R}$ na síť $\omega_h$ budeme opět značit $\mathcal{P}_h y$. Dále zavádíme chybu aproximace diferenciálního operátoru $L$ diferenčním operátorem $L_h$ jako síťovou funkci $\Psi_h : \overline{\omega}_h \to \mathbf{R}$, $\Psi_h = \mathcal{P}_h(Ly) - L_h(\mathcal{P}_h y)$.

**Definice 1.1.** Buďte $u$, $v : \overline{\omega}_h \to \mathbf{R}$. Potom definujeme skalární součiny

$$(u, v)_h = \sum_{i=1}^{m_1-1} \sum_{j=1}^{m_2-1} h_1 h_2 u_{ij} v_{ij},$$
$$(u, v] = \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2-1} h_1 h_2 u_{ij} v_{ij},$$
$$(u, v\rceil = \sum_{i=1}^{m_1-1} \sum_{j=1}^{m_2} h_1 h_2 u_{ij} v_{ij}.$$

**Definice 1.2.** Buď $u : \overline{\omega}_h \to \mathbf{R}$. Potom definujeme normu

$$\|u\|_h = \sqrt{(u,\, u)_h}.$$

**Definice 1.3.** Buďte $U$, $V : \overline{\omega}_h \to \mathbf{R}^2$, $U = [U^1,\, U^2]$, $V = [V^1,\, V^2]$. Potom klademe

$$(U, V] = (U^1, V^1] + (U^2, V^2\rceil.$$

**Definice 1.4.** Buď $U : \overline{\omega}_h \to \mathbf{R}^2$, $U = [U^1,\, U^2]$. Potom definujeme normu

$$\|U]| = \sqrt{(U,\, U]}.$$

**Definice 1.5.** Buď $u : \overline{\omega}_h \to \mathbf{R}$. Potom definujeme síťový a zpětný gradient

$$\nabla_h u = [u_{x_1},\, u_{x_2}], \quad \overline{\nabla}_h u = [u_{\bar{x}_1},\, u_{\bar{x}_2}],$$

a síťový laplacián

$$\Delta_h u = u_{\bar{x}_1 x_1} + u_{\bar{x}_2 x_2}.$$

**Definice 1.6.** Buď $U : \overline{\omega}_h \to \mathbf{R}^2$, $U = [U^1,\, U^2]$. Potom definujeme síťovou divergenci

$$\operatorname{div}_h U = (U^1)_{x_1} + (U^2)_{x_2}.$$

**Tvrzení 1.1** (Greenova formule)**.** Buďte $u$, $v : \overline{\omega}_h \to \mathbf{R}$ a nechť $u = v = 0$ na $\gamma_h$. Pak platí

$$\left(\operatorname{div}_h(p\overline{\nabla}_h u),\, v\right)_h = -\left(p\overline{\nabla}_h u,\, \overline{\nabla}_h v\right].$$

*Důkaz.* K dispozici máme jednorozměrnou Greenovu formuli: Jsou-li $u$, $v$ funkce definované na jednorozměrné síti a splňující $u_0 = u_m = v_0 = v_m = 0$, pak

$$(v, (pu_{\bar{x}})_x)_h = -(pu_{\bar{x}}, v_{\bar{x}}].$$

Tento vztah můžeme použít pro jednorozměrná zúžení síťových funkcí $u$, $v$ ve směru $x_1$. Dostaneme

$$\left(v_{\cdot j}, (pu_{\bar{x}_1})_{x_1\cdot j}\right)_h = -((pu_{\bar{x}_1})_{\cdot j},\, v_{\bar{x}_1\cdot j}], \quad j \in \widehat{m_2 - 1},$$

neboli

$$\sum_{i=1}^{m_1-1} h_1 v_{ij} (pu_{\bar{x}_1})_{x_1 ij} = -\sum_{i=1}^{m_1} h_1 p_{ij} u_{\bar{x}_1 ij} v_{\bar{x}_1 ij}, \quad j \in \widehat{m_2 - 1}.$$

Vynásobením $h_2$ a vysčítáním přes $j$ dostáváme

$$(v, (pu_{\bar{x}_1})_{x_1})_h = -(v_{\bar{x}_1}, pu_{\bar{x}_1}\rfloor.$$

Obdobně bychom odvodili vztah

$$(v, (pu_{\bar{x}_2})_{x_2})_h = -(v_{\bar{x}_2}, pu_{\bar{x}_2}\rceil.$$

Sečtením posledních dvou rovností pak dostaneme

$$\begin{aligned}\left(\operatorname{div}_h(p\overline{\nabla}_h u),\, v\right)_h &= ((pu_{\bar{x}_1})_{x_1} + (pu_{\bar{x}_2})_{x_2},\, v)_h = \\ &= -(v_{\bar{x}_1}, pu_{\bar{x}_1}\rfloor - (v_{\bar{x}_2}, pu_{\bar{x}_2}\rceil = -\left(\overline{\nabla}_h v,\, p\overline{\nabla}_h u\right] . \quad \square\end{aligned}$$

**Lemma 1.1** (Sobolev)**.** Nechť $u : \overline{\omega}_h \to \mathbf{R}$, $u = 0$ na $\gamma_h$. Pak

$$\|u\|_h^2 \le \frac{1}{8}\max\{L_1^2,\, L_2^2\}\|\overline{\nabla}_h u]|^2.$$

*Důkaz.* Podle lemmatu **??**, aplikovaného na jednorozměrná zúžení funkce $u$ ve směru osy $x_1$, resp. $x_2$ platí

$$\|u_{\cdot j}\|_h \le \frac{L_1}{2}\|(u_{\cdot j})_{\bar{x}_1}]|, \quad \forall j \in \widehat{m_2 - 1},$$

resp.

$$\|u_{i\cdot}\|_h \le \frac{L_2}{2}\|(v_{i\cdot})_{\bar{x}_2}]|, \quad \forall i \in \widehat{m_1 - 1}.$$

Po umocnění na druhou můžeme tyto odhady přepsat jako

$$\sum_{i=1}^{m_1-1} h_1\left|u_{ij}\right|^2 \le \frac{L_1^2}{4}\sum_{i=1}^{m_1} h_1\left|u_{\bar{x}_1 ij}\right|^2, \qquad \Bigg|\cdot h_2, \sum_{j=1}^{m_2-1} \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^{m_2-1} h_1\left|u_{ij}\right|^2 \le \frac{L_2^2}{4}\sum_{i=1}^{m_2} h_2\left|u_{\bar{x}_2 ij}\right|^2. \qquad \Bigg|\cdot h_1, \sum_{i=1}^{m_1-1} \tag{6}$$

Sečtením (5) a (6) dostaneme

$$\begin{aligned}\|u\|_h^2 &= \sum_{i=1}^{m_1-1}\sum_{j=1}^{m_2-1} h_1 h_2\left|u_{ij}\right|^2 \le \\ &\le \frac{L_1^2}{8}\sum_{i=1}^{m_1}\sum_{j=1}^{m_2-1} h_1 h_2\left|u_{\bar{x}_1 ij}\right|^2 + \frac{L_2^2}{8}\sum_{i=1}^{m_1-1}\sum_{j=1}^{m_2} h_1 h_2\left|u_{\bar{x}_2 ij}\right|^2 \le \\ &\le \frac{1}{8}\max\left\{L_1^2,\, L_2^2\right\}\left(\sum_{i=1}^{m_1}\sum_{j=1}^{m_2-1} h_1 h_2\left|u_{\bar{x}_1 ij}\right|^2 + \sum_{i=1}^{m_1-1}\sum_{j=1}^{m_2} h_1 h_2\left|u_{\bar{x}_2 ij}\right|^2\right) = \\ &= \frac{1}{8}\max\left\{L_1^2,\, L_2^2\right\}\|\overline{\nabla}_h u]|^2. \quad \square\end{aligned}$$

1.2.1. *Metoda energetických nerovností.* Úlohu (3) zúžíme na síť a odečteme ji od (4). Položíme-li

$$L : y \mapsto -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(p(x)\frac{\partial y}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(p(x)\frac{\partial y}{\partial x_2}\right) + q(x)y,$$

$L_h : u \mapsto -(pu_{\bar{x}_1})_{x_1} - (pu_{\bar{x}_2})_{x_2} + qu$, dostaneme

$$L_h u - \mathcal{P}_h(Ly) = 0 \quad \text{na } \omega_h, \tag{7a}$$

$$u - \mathcal{P}_h y = 0 \quad \text{na } \gamma_h. \tag{7b}$$

Chyba aproximace $\Psi_h = \mathcal{P}_h(Ly) - L_h(\mathcal{P}_h y)$ je řádu $O(h_1 + h_2)$ a s její pomocí můžeme (7a) přepsat jako

$$L_h u - L_h(\mathcal{P}_h y) = \Psi_h.$$

Položíme-li $z = u - \mathcal{P}_h y$, můžeme tudíž (7) psát ve tvaru

$$L_h z = \Psi_h \quad \text{na } \omega_h, \tag{8}$$

$$z = 0 \quad \text{na } \gamma_h. \tag{9}$$

První z obou vztahů skalárně vynásobíme $z$. S využitím Greenovy formule pak dostaneme

$$\begin{aligned}(\Psi_h, z)_h &= (L_h z, z)_h = (-(pz_{\bar{x}_1})_{x_1} - (pz_{\bar{x}_2})_{x_2} + (qz, z)_h = \\ &= -\big(\mathrm{div}_h(p\overline{\nabla}_h z), z\big)_h + (qz, z)_h = \big(p\overline{\nabla}_h z, \overline{\nabla}_h z\big] + (qz, z)_h = \\ &= (pz_{\bar{x}_1}, z_{\bar{x}_1}\rfloor + (pz_{\bar{x}_2}, z_{\bar{x}_2}\rceil + (qz, z)_h.\end{aligned}$$

Podle základních předpokladů je $q \geq 0$, a proto $(qz, z)_h \geq 0$. Dále je $p \geq p_0 > 0$, takže

$$\big(p\overline{\nabla}_h z, \overline{\nabla}_h z\big] \geq p_0 \|\overline{\nabla}_h z]|^2.$$

Celkově jsme dokázali, že

$$(\Psi_h, z)_h \geq p_0 \|\overline{\nabla}_h z]|^2.$$

Podle lemmatu 1.1 a Schwarzovy nerovnosti je

$$\|z\|_h^2 \leq c\|\overline{\nabla} z]|^2 \leq \frac{c}{p_0}(\Psi_h, z)_h \leq \frac{c}{p_0}\|\Psi_h\|_h \|z\|_h$$

a odtud

$$\|z\|_h \leq \frac{c}{p_0}\|\Psi_h\|_h.$$

Diferenční schéma (4) je tedy korektní (mj. také stabilní) a $\|z\|_h$ se chová stejně jako $\|\Psi_h\|_h$, tj. jako $O(h_1 + h_2)$.

*Poznámka* 1.4. V případě, že $p \equiv$ konst., je dokonce $\Psi_h = O(h_1^2 + h_2^2)$.