1. Derivace a integrace

Poznámka. (ZS 2015/16) Přednášeno bez prezentace, ta prý zatím není použitelná. (ZS 2016/17) Prezentace již je k dispozici. Zatím ponecháno v původním stavu.

Spáchala Hanele ze svých výpisků. Chtělo by to přepsat podle prezentace, ale už se mi to ve zkouškovém dělat nechce.

1.1. Numerická derivace. Chceme-li derivovat funkci, známe-li pouze její funkční hodnoty, dostáváme se do problémů. Můžeme funkci zkusit aproximovat jejím Lagrangeovým polynomem a získat představu:

$$f'(x) \simeq L_n'(x)$$

tedy

$$f'(x) - L_n'(x) = R_n'(x)$$

Z **??** víme, že $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_n(x)$. Aplikací Leibnizova pravidla pro derivování součinu dostaneme:

$$R_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{f^{(n+1+k-i)}(\xi(x))}{(n+1)!}\omega_n^{(i)}(x)$$

Pro napočítání k-té derivace tedy potřebujeme, aby byla f alespoň $n+k+1$–krát diferencovatelná, navíc neznáme závislost ξ na x. Ukazuje se navíc, že chyba derivace v uzlech není nulová. Tudy tedy cesta nepovede. Naším cílem tedy je udělat $R_n'(x_i)$ libovolně malé $\forall i$. Mějme funkci $f \in \mathcal{C}^2(x)$. Vyjádříme její Lagrangeův polynom stupně 1 na intervalu $\langle x_0; x_1\rangle$

$$L_1(x) = f(x_0) + f[\,x_0; x_1]\,(x - x_0) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$L_1'(x) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f'(\xi)$$

kde poslední rovnost plyne z Lagrangeovy věty o přírůstku funkce ($\exists \xi \in \langle x_0; x_1\rangle\ f(x_1) - f(x_0) = f'(\xi)(x_1 - x_0)$). Mějme tedy $h = x_1 - x_0$. Bude nás zajímat chyba aproximace v závislosti na zmenšujícím se h. K tomu budeme potřebovat konečné diference. Předpokládejme nyní ekvidistantní rozdělení uzlů tak, že bude platit: $x_i = x_0 + ih$, $\forall i \in \mathbb{N}$ Rozvineme podle Taylora:

$$f(x_1) = f(x_0) + f'(x_0)\underbrace{(x_1 - x_0)}_{h} + \frac{f''(x_0)}{2!}\underbrace{(x_1 - x_0)^2}_{h^2} + \frac{f'''(\xi_1)}{3!}\underbrace{(x_1 - x_0)^3}_{h^3}$$

$$f(x_{-1}) = f(x_0) + f'(x_0)\underbrace{(x_{-1} - x_0)}_{-h} + \frac{f''(x_0)}{2!}\underbrace{(x_{-1} - x_0)^2}_{h^2} + \frac{f'''(\xi_{-1})}{3!}\underbrace{(x_{-1} - x_0)^3}_{-h^3} =$$

$$= f(x_0) - f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2!}h^2 - \frac{f'''(\xi_{-1})}{3!}h^3$$

Vytvoříme dopředné, resp. zpětné diference prvního řádu:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)h + \frac{1}{3!}f'''(\xi_1)h^2 = f'(x_0) + \mathcal{O}(h)$$

$$\frac{f(x_0) - f(x_{-1})}{h} = f'(x_0) + \mathcal{O}(h)$$

Za předpokladu spojité diferencovatelnosti druhého řádu jsme tedy schopni aproximovat první derivaci s přesností prvního řádu.

$$f(x_1) - f(x_{-1}) = 2hf'(x_0) + \underbrace{\left(\frac{1}{2}f''(x_0)h^2 - \frac{1}{2}f''(x_0)h^2\right)}_{=0} + \frac{1}{3!}\left(f'''(\xi_1)h^3 + f'''(\xi_{-1})h^3\right)$$

$$\frac{f(x_1) - f(x_{-1})}{2h} = f'(x_0) + \frac{f'''(\xi_1) + f'''(\xi_{-1})}{3!}h^2 = f'(x_0) + \mathcal{O}(h^2)$$

za předpokladu spojité diferencovatelnosti do třetího řádu. Tvaru $\frac{f(x_1)-f(x_{-1})}{2h}$ se říká centrální diference. Protože $\xi_1, \xi_{-1} \in \langle x_{-1}; x_1\rangle$ a f je na $\langle x_{-1}; x_1\rangle$ spojitě diferencovatelná do třetího řádu, je

$$|\frac{1}{3!}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_{-1})| \leq C$$

na $\langle x_{-1}; x_1\rangle$ tedy je omezená. Přesuneme se k druhé derivaci. Rozepsání $f(x_1)$ a $f(x_{-1})$ tentokrát sečteme a dostaneme:

$$f(x_1) + f(x_{-1}) = 2f(x_0) + f''(x_0)h^2 + \frac{f'''(\xi_1) - f'''(\xi_{-1})}{3!}h^3$$
$$\frac{f(x_1) - 2f(x_0) + f(x_{-1})}{h^2} = f''(x_0) + \frac{f'''(\xi_1) - f'''(\xi_{-1})}{3!}h$$

Za předpokladu spojité diferencovatelnosti 3. řádu získáme odhad s přesností h. Máme-li však spojitou diferencovatelnost čtvrtého řádu, je odhad s přesností h^2 (opět dokážeme přes Lagrange, vyskočí tam čtvrtá derivace).

1.2. **Numerická integrace.** Vzorce pro $I(f)$ se nazývají vzorce pro numerickou integraci, resp. kvadraturní vzorce. Mějme reálnou funkci reálné proměnné. Interval, na kterém chceme integrovat, stejně jako u derivace, rozdělíme ekvidistantně na menší intervaly: $x_i = x_0 + ih$, $\forall i \in \hat{n}$ a posčítáme příspěvky od jednotlivých částí. Použijeme interpolaci $f(x)$ takovou, aby se dobře integrovalo. Pro x blízké x_0 bude přibližně platit:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x_0)dx = (b-a)f(x_0) = f(x_0)h$$

Zajímá nás chyba, které se při této aproximaci dopustíme.

$$E_0(f) = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b f(x_0)dx = \int_a^b \underbrace{(f(x) - \underbrace{f(x_0)}_{L_0(x)})dx}_{R_0(x)}$$

Rozvineme $f(x)$ Taylorem:

$$\int_a^b \left(f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x-x_0)^2 - f(x_0)\right)dx = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} f'(x_0)t + \frac{1}{2}f''(\xi)t^2 dt \leq$$

Za předpokladu $f \in \mathcal{C}^{(2)}$ lze použít větu o střední hodnotě integrálu a odhadnout tak $|f''(\xi)| \leq c$ (ξ totiž závisí na x):

$$\leq f'(x_0)\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} + \frac{1}{2}c\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{1}{2}c\frac{h^3}{12} = \mathcal{O}(h^3)$$

Tedy odhad máme s přesností h^3. Zkusíme se nyní přesunout k Lagrangeově polynomu vyššího řádu, vezměme $n = 1$.

$$L_1(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$

$$\int_a^b L_1(x)dx = \frac{1}{2}h(f(a) + f(b))$$

$$E_1(f) = \int_a^b f(x) - f(x_0) - \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0)dx$$

$$E_1(f) = \int_a^b R_1(x)dx = \int_a^b \frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)(x-x_1)dx = \frac{c}{2}\int_0^h t(t-h)dt = \frac{c}{2}\left[\frac{t^3}{3} - h\frac{t^2}{2}\right]_0^h = \frac{c}{2}(\frac{h^3}{3} - h\frac{h^2}{2}) = \mathcal{O}(h^3)$$

Znovu jsme použili větu o střední hodnotě integrálu a odhad $|f''(\xi)| \leq c$. Přednášku z ne úplně zjevného důvodu zakončila Cavalieri-Simpsonova formule:

$$I_2(f) = \frac{a-b}{6}\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$