1. Nelineární rovnice

1.1. Separace kořenů.

Věta 1.1 (Bolzanova Věta)**.** Nechť je $f \in \mathcal{C}(\langle a, b\rangle)$. Nechť dále $f(a)f(b) < 0$. Potom funkce f má na (a, b) alespoň jeden kořen. Pokud f' na (a, b) nemění znaménko, pak je tento kořen jedinný.

Důkaz. BÚNO $f(a) < 0$

(1) Důkaz sporem
Položíme $c = \sup\{x \in \langle a, b\rangle \,|\, f(x) < 0\}$. Předpokládáme $f(c) \neq 0$, tedy podle definice $f(c) < 0$. Volíme $d \in (f(c), 0)$ a díky definici c neexistuje $y \in \langle a, b\rangle$ takové, aby $f(y) = d$, což je spor se spojitostí funkce f. □

1.2. Výpočet kořene - metoda bisekcí. Nechť je $f \in \mathcal{C}(\langle a, b\rangle)$. Nechť dále $f(a)f(b) < 0$. Interval půlíme a vždy pomocí 1.1 určíme, v které polovině se nachází kořen. Postup opakujeme s novým intervalem. Označíme-li kořen α a bod, který půlí interval x_k, můžeme odhadovat

$$|\alpha - x_k| \leq \frac{b-a}{2^k}$$

1.3. Iterativní metody pro hledání kořenů.

Lemma. Nechť $\varphi(\alpha) = \alpha$ pro nějaké α. Nechť je dále φ diferencovatelná na nějakém H_α^r a pro všechna $x \in H_\alpha^r$ a $K < 1$ platí $|\varphi'(x)| \leq K$. Nechť je posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ definována rekurentním vztahem

$$x_{k+1} = \varphi(x_k), x_0 \in H_\alpha^r$$

Potom

$$x_k \in H_\alpha^r,\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Důkaz. indukcí podle k

- $k = 0$ Je předpokladem věty.
- $k \Rightarrow k + 1$

$$|x_{k+1} - \alpha| = |\varphi(x_k) - \varphi(\alpha)|$$

Použijeme Lagrangeovu věty o přírůstku (předpoklady splněny indukčním předpokladem):

$$|\varphi(x_k) - \varphi(\alpha)| = |\varphi'(\xi)|\,|x_k - \alpha| \leq K\,|x_k - \alpha| < |x_k - \alpha|$$

□

Věta 1.4. Nechť $\varphi(\alpha) = \alpha$ pro nějaké α. Nechť je dále φ diferencovatelná na nějakém H_α^r a $|\varphi'(x)| \leq K$ pro nějaké $K < 1$. Nechť je posloupnost $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ definována rekurentním vztahem

$$x_{k+1} = \varphi(x_k)$$

Potom

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \alpha,\ \forall x_0 \in H_\alpha^r$$

Důkaz.

$$|x_k - \alpha| = |\varphi(x_{k-1}) - \varphi(\alpha)|$$

Díky lemmatu můžeme opakovaně použít Lagrangeovu větu o přírůstku

$$|\varphi(x_{k-1}) - \varphi(\alpha)| = |\varphi(\xi_{k-1})|\,|x_{k-1} - \alpha| = \cdots = |x_0 - \alpha| \prod_{i=0}^{k-1} |\varphi(\xi_i)| \leq K^k\,|x_0 - \alpha|$$

A tedy

$$\lim_{k\to\infty} (x_k - \alpha) = \lim_{k\to\infty} K^k\,|x_0 - \alpha| = 0$$

□

Poznámka. Předpoklad $|\varphi'(x)| \leq K < 1$ splníme např. tak, že $|\varphi'(\alpha)| < 1$ (je–li *varphi*$'(x)$ spojité). Budeme tedy hledat okolí H_α^r tak, aby to bylo splněné.

1.4. **Metoda regula falsi.**

Věta 1.10. Nechť je α kořenem funkce f. Nechť dále existuje H_α^r takové, že $f \in \mathcal{C}^2(H_\alpha^r)$. Nechť $f'(\alpha) \neq 0$. Nechť $x_0 \in H_\alpha^r$. Potom metoda regula falsi konverguje.

Důkaz. Využijeme vztahu

$$\varphi(x) = x - \frac{x - x_k'}{f(x) - f(x_k')} f(x)$$

Tedy

$$\varphi'(x) = 1 - \left(\frac{x - x_k'}{f(x) - f(x_k')}\right)' f(x) - \frac{x - x_k'}{f(x) - f(x_k')} f'(x)$$

$$\varphi'(\alpha) = 1 + \frac{\alpha - x_k'}{f(x_k')} f'(\alpha) = \frac{f(x_k') + (\alpha - x_k') f'(\alpha)}{f(x_k')}$$

Nyní pomocí Taylorových rozvojů odhadneme nejprve rozvojem do druhého řádu

$$f(x_k') = f(\alpha) + f'(\alpha)\,(x_k' - \alpha) + \frac{f''(\xi)}{2}\,(x_k' - \alpha)^2$$

Tedy

$$f(x_k') + (\alpha - x_k')\, f'(\alpha) = \frac{f''(\xi)}{2}\,(x_k' - \alpha)^2$$

A následně rozvojem do prvního řádu

$$f(x_k') = f'(\eta)\,(x_k' - \alpha)$$

Tedy ve výsledku

$$\frac{f(x_k') + (\alpha - x_k') f'(\alpha)}{f(x_k')} = \frac{f''(\xi)}{2f'(\eta)}\,(x_k' - \alpha) = K\,(x_k' - \alpha)$$

kde K je definováno poslední rovností. Správnou volbou x_k' můžeme tedy libovolně zmenšit $|\varphi'(\alpha)|$. Tím jsou splněny předpoklady 1.4. $\square$

Poznámka. Pro platnost věty je zásadní, že se jedná o H_α^r, tj. určitá podmnožina, kde je $f \in \mathcal{C}^2(H_\alpha)$. Rozhodně to neplatí pro všechna $x \in \mathbb{R}$, pokud je $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

Poznámka. Věta lze dokázat i přímo, dokonce se slabším předpokladem $f \in \mathcal{C}^1(H_\alpha^r)$:

$$x_{k+1} - \alpha = x_k - \alpha - \frac{x_k - x_k'}{f(x_k) - f(x_k')} f(x_k) = x_k - \alpha - \frac{x_k - x_k'}{f'(\xi)(x_k - x_k')} f(x_k) = x_k - \alpha - \frac{f(x_k)}{f'(\xi)} =$$

V třetím rovnítku jsme použili Lagrangeovu větu.

$$= x_k - \alpha - \frac{f(x_k) + f(\alpha)}{f'(\xi)} = x_k - \alpha - \frac{(x_k - \alpha) f'(\eta)}{f'(\xi)} = \left(\frac{f'(\xi) - f'(\eta)}{f'(\xi)}\right)(x_k - \alpha)$$

Dodali jsme $f(\alpha)$, které je nulové, a znovu použili Lagrangeovu větu. Z ní plyne, že $\xi \in [x_k, x_k']$ a $\eta \in [x_k, \alpha]$. Při dostatečně malém okolí je první závorka posledního výrazu menší než jedna a $f'(\xi) \neq 0$. Dokázali jsme tedy, že posloupnost postupných aproximací konverguje.

1.5. **Newtonova metoda.**

Věta 1.13. Nechť je α kořenem funkce f. Nechť dále existuje H_α^r takové, že $f \in \mathcal{C}^2(H_\alpha^r)$. Nechť $f'(\alpha) \neq 0$. Nechť $x_0 \in H_\alpha^r$. Potom Newtonova metoda konverguje.

Důkaz. Využijeme vztahu

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

k úpravě

$$x_{k+1} - \alpha = x_k - \alpha - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \alpha - \frac{f(x_k) - f(\alpha)}{f'(x_k)}$$

Použijeme Lagrangeovu větu o přírůstku:

$$x_k - \alpha - \frac{f(x_k) - f(\alpha)}{f'(x_k)} = x_k - \alpha - \frac{f'(\xi)(x_k - \alpha)}{f'(x_k)} = \frac{f'(x_k) - f'(\xi)}{f'(x_k)}\,(x_k - \alpha)$$

Znovu použijeme Lagrangeovu větu o přírůstku:

$$\frac{f'(x_k) - f'(\xi)}{f'(x_k)}\,(x_k - \alpha) = \frac{f''(\xi')}{f'(x_k)}\,(x_k - \xi)\,(x_k - \alpha) = K\,(x_k - \xi)\,(x_k - \alpha)$$

kde K je definováno poslední rovností a díky spojitosti f' platí $K < 1$. Tím jsou splněny předpoklady 1.4. □

Poznámka. Obdobně jako u metody regula falsi lze dokázat přímo i se slabším předpokladem $f \in \mathcal{C}^1(H_\alpha^r)$. Pak je ale metodou prvního řádu (viz 1.15).

Věta 1.15. Nechť je α kořenem funkce f. Nechť dále existuje H_α^r takové, že $f \in \mathcal{C}^2(H_\alpha^r)$. Nechť $f'(\alpha) \neq 0$. Nechť $x_0 \in H_\alpha^r$. Potom Newtonova metoda je metodou druhého řádu přesnosti. Pokud je $f \in \mathcal{C}^1(H_\alpha^r)$, potom Newtonova metoda je metodou prvního řádu přesnosti.

Důkaz.
(1) (*druhý řád*) Viz důkaz 1.13.
(2) (*první řád*) Zde můžeme použít Lagrangeovu větu pouze jednou. Pokud je však ξ dostatečně blízko x_k (což zajišťujeme volbou okolí), pak je $K = \frac{f'(x_k) - f'(\xi)}{f'(x_k)} < 1$, Newtonova metoda konverguje podle 1.4 a je metodou prvního řádu.

Poznámka. Pokud neexistuje druhá derivace funkce f, konverguje (dle Oberhubera) Newtonova metoda pomaleji.

□

Poznámka. Newtonova metoda obvykle konverguje rychleji než regula falsi, potřebuje ale většinou přesnější odhad, tj. menší okolí H_α^r.

Poznámka. Pro zlepšení konvergence se používá modifikace Newtonovy metody (metody regula falsi) nazývaná **line search algoritmus**: Pokud se iterací zvětší hodnota $|f(x_{k+1})|$, tj. zhorší se odhad, provedli příliš velký skok. V takovém případě zmenšíme skok na polovinu a opakujeme. Toto zlepšení konvergence však vede ke zpomalení metody.

1.6. **Metody pro řešení soustav nelineárních rovnic.**

Věta 1.24 (Lagrangeova věta o přírůstku funkce více proměnných)**.** Nechť G je konvexní oblast. Nechť funkce $f \in \mathcal{C}^1(G)$. Potom pro každé $\vec{u}, \vec{v} \in G$ existuje $\vec{\xi} \in (\vec{u}, \vec{v})$ (úsečka mezi $\vec{u}$ a $\vec{v}$) takový, že

$$f(\vec{u}) - f(\vec{v}) = \nabla f(\vec{\xi})(\vec{u} - \vec{v})$$

Důkaz. Definujeme funkci

$$\varphi(t) = f(\vec{u} + t(\vec{v} - \vec{u})),\ \forall t \in \langle 0, 1\rangle$$

Potom

$$\varphi'(t) = \nabla f(\vec{u} + t(\vec{v} - \vec{u}))(\vec{v} - \vec{u})$$

Protože φ je funkce jedné proměnné, můžeme použít klasickou Lagrangeovu větu o přírůstku:

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\eta)$$

Označíme $\vec{\xi} = \vec{u} + \eta(\vec{v} - \vec{u})$ a budeme tedy upravovat

$$f(\vec{u}) - f(\vec{v}) = -(\varphi(1) - \varphi(0)) = -\varphi'(\eta) = -\nabla f(\vec{u} + \eta(\vec{v} - \vec{u}))(\vec{v} - \vec{u}) = \nabla f(\vec{\xi})(\vec{u} - \vec{v})$$

□

Věta 1.25. Nechť platí:

- Existuje konvexní oblast G, obsahující řešení $\vec{a}$ systému rovnic $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$
- $\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{a})$ je regulární
- složky $\vec{f}$ jsou funkce spojité na G, jejich první parciální derivace také (tj. $f \in \mathcal{C}^1(G)$)

Potom existuje $H_{\vec{a}}^{\delta}$ takové, že pro každé $\vec{x}^{(0)} \in H_{\vec{a}}^{\delta}$ posloupnost generovaná Newtonovou metodou konverguje k $\vec{a}$.

Důkaz. Nejprve díky 1.24 ukážeme pomocné tvrzení

$$\vec{f}(\vec{x}^{(k)}) - \vec{f}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}^{(k)}) - f_1(\vec{a}) \\ \vdots \\ f_n(\vec{x}^{(k)}) - f_n(\vec{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\vec{\xi}_1) \\ \vdots \\ \nabla f_n(\vec{\xi}_n) \end{pmatrix} \left(\vec{x}^{(k)} - \vec{a}\right) = \mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{\xi}) \left(\vec{x}^{(k)} - \vec{a}\right)$$

kde $\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{\xi})$ je definovaná poslední rovností. Dále využijeme vztahu

$$\vec{x}^{(k+1)} = \vec{x}^{(k)} - \mathbb{J}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^{(k)})\vec{f}(\vec{x}^{(k)})$$

Potom můžeme odhadovat

$$\begin{aligned} \left\|\vec{x}^{(k+1)} - \vec{a}\right\| &= \left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{a} - \mathbb{J}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^{(k)})\vec{f}(\vec{x}^{(k)})\right\| = \left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{a} - \mathbb{J}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^{(k)}) \left(\vec{f}(\vec{x}^{(k)}) - \vec{f}(\vec{a})\right)\right\| = \\ &= \left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{a} - \mathbb{J}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^{(k)})\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{\xi}) \left(\vec{x}^{(k)} - \vec{a}\right)\right\| = \left\|\left(\mathbb{I} - \mathbb{J}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^{(k)})\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{\xi})\right) \left(\vec{x}^{(k)} - \vec{a}\right)\right\| \leq \\ &\leq \left\|\mathbb{I} - \mathbb{J}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^{(k)})\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{\xi})\right\| \left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{a}\right\| = K \left\|\vec{x}^{(k)} - \vec{a}\right\| \end{aligned}$$

kde K je definováno poslední rovností. Budeme chtít ukázat $K < 1$, tedy

$$\begin{aligned} \mathbb{I} - \mathbb{J}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^{(k)})\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{\xi}) &= \mathbb{J}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{a})\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{a}) - \mathbb{J}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^{(k)})\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{\xi}) + \mathbb{J}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{a})\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{\xi}) - \mathbb{J}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{a})\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{\xi}) = \\ &= \mathbb{J}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{a}) \left(\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{a}) - \mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{\xi})\right) + \left(\mathbb{J}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{a}) - \mathbb{J}_{\vec{f}}^{-1}(\vec{x}^{(k)})\right) \mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{\xi}) < 1 \end{aligned}$$

Kde poslední rovnost plyne z faktu, že $\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{a}) - \mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{\xi})$ můžeme udělat libovolně malou a $\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{\xi})$ je omezená. □

Věta 1.26. Nechť platí:

- Existuje konvexní oblast G, obsahující řešení $\vec{a}$ systému rovnic $\vec{f}(\vec{x}) = \vec{0}$
- $\mathbb{J}_{\vec{f}}(\vec{a})$ je regulární
- složky $\vec{f}$ jsou funkce spojité na G, jejich první a druhé parciální derivace také (tj. $f \in \mathcal{C}^2(G)$)

Potom existuje $H_{\vec{a}}^{\delta}$ takové, že pro každé $\vec{x}^{(0)} \in H_{\vec{a}}^{\delta}$ posloupnost generovaná Newtonovou metodou konverguje k $\vec{a}$ kvadraticky, tj. s přesností druhého řádu.

Důkaz 7.26

Důkaz. Není vyžadován. Spočívá v aplikaci věty o přírůstku funkce na rozdíly Jacobiho matic z konce 1.25 tak, aby se z nich dostalo $(\vec{x}^{(k)} - \vec{a})$. □