1. Lagrangeova interpolace

Buď f reálná funkce reálné proměnné a nechť jsou dány její hodnoty ve vzájemně různých bodech $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — nazýváme je interpolační uzly. Našim úkolem je najít polynom L_n co nejnižšího stupně tak, aby platilo $(\forall i \in \hat{n}_0)(L_n(x_i) = f(x_i))$. Tento polynom se nazývá Lagrangeův interpolační polynom příslušný k funkci f a uzlům $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Poznámka. Očekáváme, že je-li funkce f dostatečně hladká, bude ji možno aproximovat polynomem T_n i mezi interpolačními uzly. Proto také mluvíme o interpolačním polynomu. Kdybychom chtěli naopak usuzovat na hodnoty funkce f vně nejmenšího intervalu obsahujícího interpolační uzly, mluvili bychom o extrapolaci.

Tvrzení 1.1. Buďte f reálná funkce reálné proměnné a $x_0, x_1, \ldots, x_n \in D(f)$. Potom existuje právě jeden Lagrangeův interpolační polynom příslušný k funkci f a uzlům $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Důkaz. Existence: Definujme funkci

$$\Phi_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{i-1})(x - x_{i+1})\ldots(x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}.$$

Zřejmě Φ_i je polynom stupně n a platí $\Phi_i(x_j) = \delta_{ij}$ pro $i, j \in \hat{n}_0$. Dále je zřejmé, že funkce

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\Phi_i(x) \tag{1}$$

je polynom stupně nejvýše n-tého a že platí $(\forall i \in \hat{n}_0)(L_n(x_i) = f(x_i))$.

Jednoznačnost: Předpokládejme existenci polynomu $P_n \neq L_n$ stupně nejvýše n-tého takového, že $(\forall i \in \hat{n}_0)(P_n(x_i) = f(x_i))$. Potom funkce $P_n - L_n$ musí být také polynom stupně nejvýše n-tého. Přitom ale $P_n - L_n$ má $n + 1$ kořenů, takže to musí být nulový polynom. □

Věta 1.2. (1) Buď I interval a nechť $x_0, x_1, \ldots, x_n \in I$.
(2) Nechť má funkce f v intervalu I derivaci řádu $n + 1$.
(3) Buď L_n Lagrangeův interpolační polynom příslušný k funkci f a uzlům $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

Potom $\forall x \in I$ existuje bod ξ ležící v nejmenším intervalu obsahujícím body $x, x_0, x_1, \ldots, x_n$ tak, že platí

$$f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega_n(x),$$

kde $\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)$.

Důkaz. Pro $x \in \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ je $f(x) - L_n(x) = 0$, takže tvrzení zřejmě platí. Zvolme tedy pevně $x \in I$ tak, aby $(\forall i \in \hat{n}_0)(x \neq x_i)$. Označíme-li

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x),\ Q(t) = \omega_n(x)R_n(t) - \omega_n(t)R_n(x),$$

potom zřejmě $Q(x) = 0$, a protože $(\forall i \in \hat{n}_0)(\omega_n(x_i) = 0,\ R_n(x_i) = 0)$, je i $(\forall i \in \hat{n}_0)(Q(x_i) = 0)$. Funkce Q má tedy $n + 2$ kořenů a to podle Rolleovy věty[1] znamená, že funkce Q' má $n + 1$ vzájemně různých kořenů ležících mezi kořeny funkce Q. To opět znamená, že funkce Q'' má n vzájemně různých kořenů ležících mezi kořeny funkce Q' atd. Nakonec se dozvídáme, že funkce $Q^{(n+1)}$ má jeden kořen ležící mezi kořeny funkce $Q^{(n)}$. Označíme-li tento kořen ξ, platí tedy $Q^{(n+1)}(\xi) = 0$. Podle definice funkce R_n zřejmě platí

$$R_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - L_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - 0 = f^{(n+1)}(x),$$

neboť L_n je polynom stupně nejvýše n-tého. Podle definice funkce ω zase platí $\omega^{(n+1)}(x) = (n + 1)!$, a tak

$$Q^{(n+1)}(\xi) = \omega_n(x)f_n^{(n+1)}(\xi) - R_n(x)(n+1)! = 0 \Rightarrow R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,\omega_n(x).$$

□

[1] Rolleova věta: Buď f reálná funkce spojitá na omezeném a uzavřeném itervalu $\langle a, b\rangle$ a nechť má f v každém bodě intervalu (a, b) derivaci. Je-li $f(a) = f(b)$, potom existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že $f'(\xi) = 0$.

Konstrukce polynomu L_n podle důkazu tvrzení 1.1 není ekonomická. Ukážeme si proto dvě lepší řešení.

1.1. **Newtonova interpolační formule pro neekvidistantní intervaly.**

Definice 1.3. Buďte f reálná funkce reálné proměnné, $x_0, x_1, \ldots, x_n \in D(f)$ (tyto body přitom nemusejí být seřazeny podle velikosti). Poměrnými diferencemi 1. řádu nazýváme podíly typu

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \ \ldots, \ f(x_{n-1}, x_n) = \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}.$$

Poměrnými diferencemi 2. řádu nazýváme výrazy

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0}, \ \ldots,$$

$$f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) = \frac{f(x_{n-1}, x_n) - f(x_{n-2}, x_{n-1})}{x_n - x_{n-2}}.$$

Poměrnými diferencemi k-tého řádu nazýváme výrazy

$$f(x_i, \ldots, x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}) - f(x_i, \ldots, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i}.$$

Poměrné diference je zvykem zapisovat do tzv. diferenčního schématu:

$$\begin{array}{ccccc}
x_0 & f(x_0) & & & \\
 & & f(x_0, x_1) & & \\
x_1 & f(x_1) & & f(x_0, x_1, x_2) & \\
 & & f(x_1, x_2) & & f(x_0, x_1, x_2, x_3) \\
x_2 & f(x_2) & & f(x_1, x_2, x_3) & \\
 & & f(x_2, x_3) & & \\
x_3 & f(x_3) & & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
x_{n-3} & f(x_{n-3}) & & & \\
 & & f(x_{n-3}, x_{n-2}) & & \\
x_{n-2} & f(x_{n-2}) & & f(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}) & \\
 & & f(x_{n-2}, x_{n-1}) & & f(x_{n-3}, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) \\
x_{n-1} & f(x_{n-1}) & & f(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n) & \\
 & & f(x_{n-1}, x_n) & & \\
x_n & f(x_n) & & &
\end{array}$$

Tvrzení 1.4. Pro poměrnou diferenci k-tého řádu platí

$$f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}) = \frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_{i+k})} +$$

$$+ \frac{f(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_i)(x_{i+1} - x_{i+2}) \ldots (x_{i+1} - x_{i+k})} + \ldots + \frac{f(x_{i+k})}{(x_{i+k} - x_i) \ldots (x_{i+k} - x_{i+k-1})}.$$

Důkaz. Indukcí podle k: Pro $k = 1$ je

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f(x_i)}{x_i - x_{i+1}} + \frac{f(x_{i+1})}{x_{i+1} - x_i}.$$

Předpokládejme, že tvrzení platí pro $k - 1$. Dokážeme, že platí pro k:

$$f(x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}) - f(x_i, \ldots, x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i} \stackrel{\text{IP}}{=}$$

$$\stackrel{\text{IP}}{=} \frac{1}{x_{i+k} - x_i} \left[\frac{f(x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_{i+2}) \ldots (x_{i+1} - x_{i+k})} + \ldots + \right.$$

$$+ \frac{f(x_{i+k-1})}{(x_{i+k-1} - x_{i+1}) \ldots (x_{i+k-1} - x_{i+k-2})(x_{i+k-1} - x_{i+k})} + \frac{f(x_{i+k})}{(x_{i+k} - x_{i+1}) \ldots (x_{i+k} - x_{i+k-1})} -$$

$$-\frac{f(x_i)}{(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_{i+k-1})}-\frac{f(x_{i+1})}{(x_{i+1}-x_i)(x_{i+1}-x_{i+2})\dots(x_{i+1}-x_{i+k-1})}-$$
$$\left.-\dots-\frac{f(x_{i+k-1})}{(x_{i+k-1}-x_i)\dots(x_{i+k-1}-x_{i+k-2})}\right].$$

V lomených závorkách se vyskytují rozdíly typu[2]

$$\frac{f(x_j)}{(x_j-x_{i+1})\dots(x_j-x_{i+k})}-\frac{f(x_j)}{(x_j-x_i)\dots(x_j-x_{i+k-1})}.$$

Pro tyto dvojice platí

$$\frac{1}{x_{i+k}-x_i}\left[\frac{f(x_j)}{(x_j-x_{i+1})\dots(x_j-x_{i+k})}-\frac{f(x_j)}{(x_j-x_i)\dots(x_j-x_{i+k-1})}\right]=$$
$$=\frac{f(x_j)}{(x_j-x_{i+1})\dots(x_j-x_{i+k-1})}\cdot\frac{1}{x_{i+k}-x_i}\cdot\left[\frac{1}{x_j-x_{i+k}}-\frac{1}{x_j-x_i}\right]=$$
$$=\frac{f(x_j)}{(x_j-x_{i+1})\dots(x_j-x_{i+k-1})}\cdot\frac{1}{x_{i+k}-x_i}\cdot\frac{(x_j-x_i)-(x_j-x_{i+k})}{(x_j-x_{i+k})(x_j-x_i)}=$$
$$=\frac{f(x_j)}{(x_j-x_i)\dots(x_j-x_{i+k})}\cdot\frac{x_{i+k}-x_i}{x_{i+k}-x_i}=\frac{f(x_j)}{(x_j-x_i)\dots(x_j-x_{i+k})}.$$

□

Důsledek 1.5. (1) Poměrná diference součtu/rozdílu je součet/rozdíl odpovídajících poměrných diferencí.
(2) Poměrná diference funkce αf, kde α je konstanta, je rovna α-násobku poměrné diference funkce f.
(3) Poměrná diference je symetrická vůči všem svým proměnným, tj. skutečně nezáleží na pořadí uzlů.
(4) Poměrná diference k-tého řádu funkce $f(x)=x^n$ je homogenní forma (viz dále) stupně $n-k$ ve svých proměnných.

Důkaz. Dokážeme bod 4. Ještě předtím si ale vysvětlíme, co je to forma.

Polynom je součet sčítanců tvaru $ax_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$. Číslo $k_1+k_2+\dots+k_n$ se nazývá stupeň sčítance. Polynom, jehož všechny sčítance mají stejný stupeň, se nazývá forma.

Máme tedy dokázat, že $f(x_i,\ \dots,\ x_{i+k})=\sum x_i^{\alpha_0}x_{i+1}^{\alpha_1}\dots x_{i+k}^{\alpha_k}$, kde suma je přes všechny $(k+1)$-tice $(\alpha_0,\ \alpha_1,\ \dots,\ \alpha_k)$, pro které platí $\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_k=n-k$. Důkaz provedeme indukcí podle k. Pro $k=1$ je

$$f(x_i,x_{i+1})=\frac{x_{i+1}^n-x_i^n}{x_{i+1}-x_i}=x_{i+1}^{n-1}+x_{i+1}^{n-2}x_i+\dots+x_i^{n-1}.$$

Předpokládejme nyní, že tvrzení platí pro k. Dokážeme, že platí i pro $k+1$:

$$f(x_i,x_{i+1},\ \dots,\ x_{i+k},\ x_{i+k+1})=\frac{f(x_{i+1},\ \dots,\ x_{i+k},\ x_{i+k+1})-f(x_i,\ x_{i+1},\ \dots,\ x_{i+k})}{x_{i+k+1}-x_i}=$$
$$=\frac{f(x_{i+k+1},\ x_{i+1},\ \dots,\ x_{i+k})-f(x_i,\ x_{i+1},\ \dots,\ x_{i+k})}{x_{i+k+1}-x_i}=$$
$$=\sum x_{i+1}^{\alpha_1}\dots x_{i+k}^{\alpha_k}\cdot\frac{x_{i+k+1}^{\alpha_0}-x_i^{\alpha_0}}{x_{i+k+1}-x_i}=\sum x_{i+1}^{\alpha_1}\dots x_{i+k}^{\alpha_k}(x_{i+k+1}^{\alpha_0-1}+x_{i+k+1}^{\alpha_0-2}x_i+\dots+x_i^{\alpha_0-1}).$$

Sumy jsou opět přes všechna α_j, $j\in\hat{k}_0$, taková, že $\alpha_0+\alpha_1+\dots+\alpha_k=n-k$. □

Poznámka. Z bodu 4 v předchozím tvrzení vyplývá, že n-tá poměrná diference funkce $x\mapsto x^n$ je konstanta a vyšší poměrné diference této funkce jsou rovny nule. Totéž zřejmě platí pro polynom stupně n.

[2] Dále pro stručnost nebudeme zdůrazňovat, že nulové členy ve jmenovatelích jsou vynechány, takže např. místo $(x_j-x_i)\dots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\dots(x_j-x_{j+k})$ budeme psát jen $(x_j-x_i)\dots(x_j-x_{i+k})$.

Nyní můžeme přikročit ke konstrukci Lagrangeova interpolačního polynomu. Nechť je dána funkce f a uzly $x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n$. Pro $n \geq 1$ můžeme psát

$$L_n = L_0 + (L_1 - L_0) + (L_2 - L_1) + \ldots + (L_n - L_{n-1}).$$

Protože $L_k - L_{k-1}$ je polynom stupně nejvýše k-tého a uzly x_0, x_1, x_{k-1} musejí být jeho kořeny, znamená to, že

$$L_k(x) - L_{k-1}(x) = A(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{k-1}),$$

kde A je konstanta. Uvážíme-li, že $L_k(x_k) = f(x_k)$, plyne z předchozího vztahu

$$f(x_k) - L_{k-1}(x_k) = A(x_k - x_0)(x_k - x_1)\ldots(x_k - x_{k-1}), \tag{2}$$

takže pro konstantu A s použitím důkazu tvrzení 1.1 dostáváme

$$A = \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})} - \frac{\sum_{j=0}^{k-1} f(x_j)\frac{(x_k-x_0)\ldots(x_k-x_{j-1})(x_k-x_{j+1})\ldots(x_k-x_{k-1})}{(x_j-x_0)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_{k-1})}}{(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})} =$$

$$= \frac{f(x_k)}{(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{k-1})} - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)\ldots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\ldots(x_j - x_{k-1})(x_k - x_j)} =$$

$$= \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{(x_j - x_0)\ldots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\ldots(x_j - x_k)} = f(x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_k).$$

Protože zřejmě $L_0(x) \equiv f(x_0)$, plyne z předchozích vztahů ihned

$$\begin{aligned} L_n(x) = f(x_0) + (x - x_0)f(x_0,\, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)f(x_0,\, x_1,\, x_2) + \ldots + \\ +(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1})f(x_0,\, x_1,\, \ldots,\, x_n). \end{aligned} \tag{3}$$

Poznámka. V praxi vycházíme z diferenčního schématu. Stačí z něj ovšem spočítat jen $f(x_0)$, $f(x_0,\, x_1)$, $\ldots$, $f(x_0,\, \ldots, x_n)$.

Na závěr se vraťme k větě 1.2. Buď $(\forall j \in \hat{n}_0)(x \neq x_j)$. Potom podle tvrzení 1.4 platí

$$f(x,\, x_0,\, \ldots,\, x_n) = \frac{f(x)}{(x - x_0)\ldots(x - x_n)} +$$

$$+ \sum_{j=0}^{n} \frac{f(x_j)}{(x_j - x)(x_j - x_0)\ldots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\ldots(x_j - x_n)},$$

odkud s použitím důkazu tvrzení 1.1 plyne

$$f(x) = (x - x_0)\ldots(x - x_n)\; f(x,\, x_0,\, \ldots,\, x_n) -$$

$$- \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_n)}{(x_j - x)(x_j - x_0)\ldots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\ldots(x_j - x_n)} =$$

$$= \omega_n(x)f(x,\, x_0,\, \ldots,\, x_n) + \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, \frac{(x - x_0)\ldots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\ldots(x - x_n)}{(x_j - x_0)\ldots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\ldots(x_j - x_n)} =$$

$$= \omega_n(x)f(x,\, x_0,\, \ldots,\, x_n) + \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\Phi_j(x) = \omega_n(x)f(x,\, x_0,\, \ldots,\, x_n) + L_n(x).$$

Je tedy $f(x) - L_n(x) = \omega_n(x)f(x,\, x_0,\, \ldots,\, x_n)$. Porovnáním tohoto výrazu s výrazem ve zmiňované větě 1.2 zjistíme, že platí

$$f(x,\, x_0,\, \ldots,\, x_n) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!},$$

odkud po přeindexování $x \to x_i$, $x_0 \to x_{i+1}$, $\ldots$, $x_{n-1} \to x_{i+k}$ dostaneme

$$f(x_i,\, x_{i+1},\, \ldots,\, x_{i+k}) = \frac{f^{(k)}(\xi)}{k!}. \tag{4}$$

1.2. **Newtonova interpolační formule pro ekvidistantní intervaly.**
Buďte $x_0 \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^+$. Potom $\forall i \in \mathbb{Z}$ definujeme

$$x_i = x_0 + ih,\ f_i = f(x_i). \tag{5}$$

Definice 1.6. Konečnými diferencemi 1. řádu nazýváme výrazy

$$\dots,\ f^1_{-\frac{3}{2}} = f_{-1} - f_{-2},\ f^1_{-\frac{1}{2}} = f_0 - f_{-1},\ f^1_{\frac{1}{2}} = f_1 - f_0,\ f^1_{\frac{3}{2}} = f_2 - f_1,\ \dots$$

Konečnými diferencemi 2. řádu nazýváme výrazy

$$\dots,\ f^2_{-2} = f^1_{-\frac{3}{2}} - f^1_{-\frac{5}{2}},\ f^2_{-1} = f^1_{-\frac{1}{2}} - f^1_{-\frac{3}{2}},\ f^2_0 = f^1_{\frac{1}{2}} - f^1_{-\frac{1}{2}},\ f^2_1 = f^1_{\frac{3}{2}} - f^1_{\frac{1}{2}}, f^2_2 = f^1_{\frac{5}{2}} - f^1_{\frac{3}{2}},\ \dots$$

Konečnými diferencemi k-tého řádu nazýváme výrazy

$$f^k_i = f^{k-1}_{i+\frac{1}{2}} - f^{k-1}_{i-\frac{1}{2}}.$$

Poznámka. Zjednodušené značení:

diference vpřed v i-tém uzlu	Δf_i	$=$	$f_{i+1} - f_i$,
diference vzad v $(i+1)$-ním uzlu	∇f_{i+1}	$=$	$f_{i+1} - f_i$,
symetrická diference	$\delta f_{i+\frac{1}{2}}$	$=$	$f_{i+1} - f_i$.

Poznámka. Diferenční schéma:

$$\begin{array}{ccccccc}
\dots & & & & & & \\
f_{-3} & & & & & & \\
 & f^1_{-\frac{5}{2}} & & & & & \\
f_{-2} & & f^2_{-2} & & & & \\
 & f^1_{-\frac{3}{2}} & & f^3_{-\frac{3}{2}} & & & \\
f_{-1} & & f^2_{-1} & & f^4_{-1} & & \\
 & f^1_{-\frac{1}{2}} & & f^3_{-\frac{1}{2}} & & f^5_{-\frac{1}{2}} & \\
f_0 & & f^2_0 & & f^4_0 & & f^6_0 \\
 & f^1_{\frac{1}{2}} & & f^3_{\frac{1}{2}} & & f^5_{\frac{1}{2}} & \\
f_1 & & f^2_1 & & f^4_1 & & \\
 & f^1_{\frac{3}{2}} & & f^3_{\frac{3}{2}} & & & \\
f_2 & & f^2_2 & & & & \\
 & f^1_{\frac{5}{2}} & & & & & \\
f_3 & & & & & & \\
\dots & & & & & &
\end{array}$$

Tvrzení 1.7 (nerekurzivní vyjádření f^k_i)**.** Platí

$$f^k_i = \binom{k}{0} f_{i+\frac{k}{2}} - \binom{k}{1} f_{i-1+\frac{k}{2}} + \binom{k}{2} f_{i-2+\frac{k}{2}} - \dots +$$

$$+(-1)^{k-1} \binom{k}{k-1} f_{i+1-\frac{k}{2}} + (-1)^k \binom{k}{k} f_{i-\frac{k}{2}}.$$

Náznak důkazu.

$$\begin{aligned}
f^1_{i+\frac{1}{2}} &= f_{i+1} - f_i, \\
f^2_i &= f^1_{i+\frac{1}{2}} - f^1_{i-\frac{1}{2}} = (f_{i+1} - f_i) - (f_i - f_{i-1}) = f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}, \\
f^3_{i+\frac{1}{2}} &= f^2_{i+1} - f^2_i = (f_{i+2} - 2f_{i+1} + f_i) - (f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}) = \\
&= f_{i+2} - 3f_{i+1} + 3f_i - f_{i-1}.
\end{aligned}$$

□

Důsledek 1.8. (1) $f = \varphi \pm \psi \Rightarrow f^k_i = \varphi^k_i \pm \psi^k_i$,
(2) $(\alpha f)^k_i = \alpha f^k_i$.

Tvrzení 1.9 („to neni přímo důsledek”).

$$f(x_i,\, x_{i+1},\, \dots,\, x_{i+k}) = \frac{f^k_{i+\frac{k}{2}}}{k!\, h^k}$$

Důkaz.

$$f(x_i,\, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = \frac{f^1_{i+\frac{1}{2}}}{h},$$

$$f(x_i,\, x_{i+1},\, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1},\, x_{i+2}) - f(x_i,\, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_i} = \frac{1}{2h}\left(\frac{f^1_{i+\frac{3}{2}}}{h} - \frac{f^1_{i+\frac{1}{2}}}{h}\right) = \frac{f^2_{i+1}}{2h^2}.$$

□

Důsledek 1.10. Pro polynom n-tého řádu je n-tá konečná diference konstanta a konečné diference vyšších řádů jsou nulové.

1.2.1. *Newtonova interpolační formule pro ekvidistantní intervaly pro interpolaci vpřed.* Sloučíme vzorce (3) a (5).

(1) Zavedeme substituci $t = \frac{x - x_0}{h}$:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + th \\ x_i &= x_0 + ih \end{aligned}\right\} x - x_i = h(t - i).$$

(2) Poměrné diference nahradíme podle tvrzení 1.9 konečnými:

$$L_n(x_0 + th) = f_0 + tf^1_{\frac{1}{2}} + \frac{t(t-1)}{2!} f^2_1 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} f^3_{\frac{3}{2}} + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} f^n_{\frac{n}{2}}.$$

„Dá se to přepsat elegantně — já to nevyžaduju”:

$$L_n(x_0 + th) = f_0 + \binom{t}{1} \Delta f_0 + \binom{t}{2} \Delta^2 f_0 + \dots + \binom{t}{n} \Delta^n f_0.$$

1.2.2. *Newtonova interpolační formule pro ekvidistantní intervaly pro interpolaci vzad.* Proměnné ve vzorci (3) přeindexujeme takto: $x_i \to x_{-i}$ $(i \in \hat{n})$.

(1) Zavedeme substituci $t = \frac{x - x_0}{h}$:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + th \\ x_{-i} &= x_0 - ih \end{aligned}\right\} x - x_{-i} = h(t + i).$$

(2) Poměrné diference nahradíme konečnými:

$$L_n(x_0 + th) = f_0 + tf^1_{-\frac{1}{2}} + \frac{t(t+1)}{2!} f^2_{-1} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} f^3_{-\frac{3}{2}} + \dots + \frac{t(t+1)\dots(t+n-1)}{n!} f^n_{-\frac{n}{2}}.$$

„Trošku elegantnější je to s tim nabla”:

$$L_n(x_0 + th) = f_0 + \binom{t}{1} \nabla f_0 + \binom{t+1}{2} \nabla^2 f_0 + \dots + \binom{t+n-1}{n} \nabla^n f_0.$$